

台北區高中 106 年(105 學年度)高三下 第二次指考模擬考數學(社會組)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 大慶百貨公司舉辦情人節促銷活動，規劃連續三個週末在大廣場播放 6 部不同的電影，下午一場，晚上一場，每一場播放一部，其中 2 部為愛情片、2 部為劇情片、2 部的動畫片。若 2 部愛情片於同一週播放，2 部劇情片於不同週播放，則會有幾種播放的方法？
(1) 48 種 (2) 66 種 (3) 72 種 (4) 96 種 (5) 144 種。 【106 北區模(2)】

答：(4)

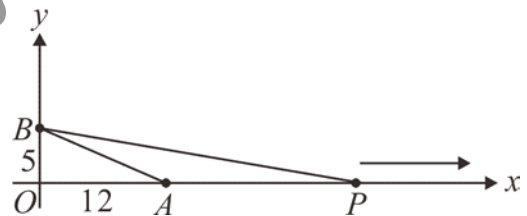
解： $C_1^3 \times 2! \times 2! \times 2 \times 2 \times 2! = 96$
 愛情片 劇情片 動畫片

2. 若對任意實數 x ，不等式 $|x+1| + |x-2| \geq a^2 - 2a$ 恆成立，則實數 a 的範圍為下列哪一個選項？
(1) $a \geq 2$ 或 $a \leq 0$ (2) $a \geq 3$ 或 $a \leq -1$ (3) $0 \leq a \leq 2$ (4) $-1 \leq a \leq 3$ (5) $0 \leq a \leq 3$ 。 【106 北區模(2)】

答：(4)

解： $|x+1| + |x-2| \leq 3$ ，故 $3 \geq a^2 - 2a$
 $\Rightarrow a^2 - 2a - 3 \leq 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq a \leq 3$

3. 在坐標平面上，有兩個定點 $A(12, 0)$ 、 $B(0, 5)$ ，另一動點 $P(n, 0)$ 在 x 軸上往正向移動，其中 n 為大於 12 的正整數，如圖所示，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{PB} - \overline{PA})$ 的值為下列哪一個選項？
(1) 0 (2) 5 (3) 12 (4) 13 (5) 不存在。 【106 北區模(2)】



答：(3)

解： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 5^2} - (n-12) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n - 119}{\sqrt{n^2 + 25} + (n-12)}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24 - \frac{119}{n}}{\sqrt{1 + \frac{25}{n^2}} + \left(1 - \frac{12}{n}\right)} = \frac{24}{1+1} = 12$

二、多選題

4. 熱舞社為準備成果發表，社員相約每週六下午到校練習。每次練習時，社長出席的機率是 0.5，副社長出席的機率是 0.6，社長、副社長至少有一人出席的機率是 0.9，請選出正確的選項：
(1) 社長、副社長均出席的機率是 0.3 (2) 社長、副社長均未出席的機率是 0.1

- (3)若已知社長出席，則副社長也出席的機率是0.4
 (4)若已知社長未出席，則副社長出席的機率是0.6
 (5)社長出席與否與副社長出席與否是獨立事件。

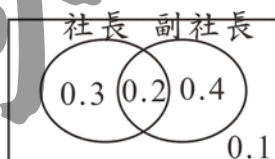
【106 北區模(2)】

答：(2)(3)

解：(1)(2)如文氏圖

$$(3) \frac{0.2}{0.5} = 0.4 \quad (4) \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

$$(5) \underbrace{0.2}_{P(A \cap B)} \neq \underbrace{0.5}_{P(A)} \times \underbrace{0.6}_{P(B)}, \text{非獨立事件}$$



5. 已知二次函數 $f(x) = 4 \cdot \frac{(x-3)(x-8)}{(2-3)(2-8)} - 6 \cdot \frac{(x-2)(x-8)}{(3-2)(3-8)} + 4 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(8-2)(8-3)}$ 。

請選出正確的選項：

- (1)函數 $f(x)$ 有最大值 (2)函數 $y = f(x)$ 圖形之對稱軸方程式為 $x = 6$
 (3)通過函數 $y = f(x)$ 圖形上兩點 $(3, f(3))$ 、 $(8, f(8))$ 的直線方程式為

$$y = -6 \cdot \frac{(x-8)}{(3-8)} + 4 \cdot \frac{(x-3)}{(8-3)}$$

(4)方程式 $f(x) = 0$ 在 2 與 3 之間有一實根

(5)不等式 $f(x)(x-4)^2 \geq 0$ 的實數解與 $f(x) \geq 0$ 的實數解相同。

【106 北區模(2)】

答：(3)(4)

解：(1)(2) $f(2) = 4$ 、 $f(3) = -6$ 、 $f(8) = 4$ 、 $\deg f(x) = 2$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x-5)^2 - 14, \text{開口向上, 無最大值}$$

(3)(4)正確

(5) $f(x) \geq 0$ 的解 $x \geq 5 + \sqrt{7}$ 或 $x \leq 5 - \sqrt{7}$ 。

$$f(x)(x-4)^2 \geq 0 \text{ 的解 } x \geq 5 + \sqrt{7} \text{ 或 } x \leq 5 - \sqrt{7} \text{ 或 } x = 4。$$

6. 已知 a 、 b 為實數且函數 $f(x) = a \log_{101}(x+b)$ 滿足 $f(0) = 0$ ， $f(100) = 100$ ，

請選出正確的選項：

- (1) $b = 0$ (2) $a = 100$ (3)函數 $y = f(x)$ 的圖形與直線 $y = x$ 相交於兩點
 (4)若 $f(p) = 90$ ，則 $p > 90$ (5)存在實數 q ，使 $f(q) = -70$ 。

【106 北區模(2)】

答：(2)(3)(5)

解：(1)(2) $f(0) = a \log_{101}(b) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} b = 1$ 、 $f(100) = a \log_{101}(101) = 100 \Rightarrow a = 100$

(3) $y = f(x)$ 與 $y = x$ 相交於兩點 $(0, 0)$ 、 $(100, 100)$

(4)當 $0 < x < 100$ 時， $f(x) > x$ ，故 $f(p) = 90 > p$ (5) $y = f(x)$ 與 $y = -70$ 交於 1 點

7. 在坐標平面上， $\overrightarrow{AB} = (2, 6)$ 、 $\overrightarrow{BC} = (-1, 1)$ ，請選出正確的選項：

(1) $\triangle ABC$ 為鈍角三角形 (2) $\triangle ABC$ 的面積為 4

(3)若 P 為平面上一點且 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ，則 P 點在 $\triangle ABC$ 的內部

(4)若 G 為 $\triangle ABC$ 的重心，則 $\overrightarrow{AG} = \left(1, \frac{10}{3}\right)$

(5)若 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，則直線 CI 的斜率為 -3 。

【106 北區模(2)】

答：(1)(2)(5)

解：(1) $|\overline{AB}| = \sqrt{40}$ 、 $|\overline{BC}| = \sqrt{2}$ 、 $|\overline{AC}| = |\overline{AB} + \overline{BC}| = |(1, 7)| = \sqrt{50}$
 $|\overline{AC}|^2 > |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2$ ，為鈍角三角形

(2) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2} \left| \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{-6}{-1} \frac{-2}{1} \right| = 4$

(3) $\overline{AP} = \frac{7}{6} \left(\frac{3}{7} \overline{AB} + \frac{4}{7} \overline{AC} \right)$ ，則 P 點在 $\triangle ABC$ 的外部

(4) $\overline{AG} = \frac{1}{3} \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AC} = \frac{1}{3} ((2, 6) + (1, 7)) = \left(1, \frac{13}{3} \right)$

(5) $\overline{CI} = \frac{1}{\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{40}} (\sqrt{2} \overline{CA} + 5\sqrt{2} \overline{CB}) = \frac{1}{6 + \sqrt{20}} (\overline{CA} + 5\overline{CB})$
 $= \frac{1}{6 + \sqrt{20}} ((-1, -7) + 5(1, -1)) = \frac{1}{6 + \sqrt{20}} (4, -12)$

故直線 CI 的斜率為 $\frac{-12}{4} = -3$

8. 老師調查班上 10 位同學每天玩電腦的時間與數學成績的關係，所得到的數據為 (x_i, y_i) ， $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ，其中變數 X 表示同學每天玩電腦的時間（單位：小時）， Y 表示同學的數學成績（單位：分），經統計並計算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 30$ ，

$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 250$ ， $\sum_{i=1}^{10} y_i = 450$ ， $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 20610$ ， $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 1140$ ，請選出正確的選項：

(1) X 的算術平均數為 3 (2) Y 的標準差為 5 (3) X 與 Y 的相關係數為 $-\frac{7}{8}$

(4) Y 對 X 的迴歸直線之斜率為 $-\frac{7}{8}$

(5) 將兩數據標準化，令 $X' = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ ， $Y' = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$ ，其中 μ_X 、 μ_Y 分別為 X 與 Y

的算術平均數， σ_X 、 σ_Y 分別為 X 與 Y 的標準差，則 Y' 對 X' 的迴歸直線之斜率為

$-\frac{7}{8}$ 。

【106 北區模(2)】

答：(1)(3)(5)

解： $\bar{X} = 3$ 、 $\bar{Y} = 45$ 、 $\sigma_X = \sqrt{25 - 3^2} = 4$ 、 $\sigma_Y = \sqrt{2061 - 45^2} = 6$

$r_{XY} = \frac{1140 - 10 \times 3 \times 45}{10 \times 4 \times 6} = -\frac{7}{8}$ 、 $m_{XY} = \frac{1140 - 10 \times 3 \times 45}{10 \times 4 \times 4} = -\frac{21}{16}$

標準化後 $m_{X'Y'} = r_{X'Y'} = r_{XY} = -\frac{7}{8}$

三、選填題

A. 設 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均是首項為1且收斂的無窮等比級數，若 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{9}{4}$ ，

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{9}{10}$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \frac{\quad}{\quad}$ 。(化為最簡分數) 【106 北區模(2)】

答： $\frac{81}{20}$

解： $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-s} = \frac{9}{4}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{1-rs} = \frac{9}{10}$

$$\Rightarrow 4(1-s+1-r) = 9(1-r-s+rs) \text{ 且 } 10 = 9(1-rs) \Rightarrow r = \frac{1}{3}, s = -\frac{1}{3}$$

$$\text{所求} = \frac{1}{1-r^2} + 2 \times \frac{1}{1-rs} + \frac{1}{1-s^2} = \frac{9}{8} + \frac{9}{5} + \frac{9}{8} = \frac{81}{20}$$

B. 一箱裝有編號為1到9號的卡片各一張，設每張卡片被抽出的機率均相同。從箱中隨機抽出3張，令隨機變數 X 代表最大的編號，則隨機變數 X 的期望值為 $\frac{\quad}{\quad}$ 。(化為最簡分數) 【106 北區模(2)】

答： $\frac{15}{2}$

解：

X	3	4	5	……	9
P	$\frac{C_2^2}{C_3^3}$	$\frac{C_2^3}{C_3^3}$	$\frac{C_2^4}{C_3^3}$		$\frac{C_2^8}{C_3^3}$

$$E(X) = \frac{1}{C_3^9} [3C_2^2 + 4C_2^3 + 5C_2^4 + \dots + 9C_2^8]$$

$$= \frac{3}{C_3^9} [C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + \dots + C_3^9] = \frac{3}{C_3^9} [C_4^{10}] = \frac{15}{2}$$

C. 坐標平面上，圓 C 的方程式為 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$ 。 P 為平面上一定點，從圓 C 上一點 A 測得 $\overrightarrow{AP} = (2, -10)$ ，再從圓 C 上另一點 B 測得 $\overrightarrow{BP} = (10, -4)$ ，則 P 點的坐標為 $\frac{\quad}{\quad}$ 。 【106 北區模(2)】

答： $(4, -3)$

解： 令 $P(a, b)$ ，則 $A(a-2, b+10)$ ， $B(a-10, b+4)$

$$A, B \in C \Rightarrow \begin{cases} a^2 + (b+6)^2 = 25 \\ (a-8)^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$$

第貳部分：非選擇題

1. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

- (1) 試計算 $A^2 - 3A + 2I$ 。
 (2) 試求多項式 x^n 除以 $x^2 - 3x + 2$ 的餘式。(n 為正整數)
 (3) 試計算 A^n 。(n 為正整數)

【106 北區模(2)】

答：(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $(2^n - 1)x + (2 - 2^n)$ (3) $\begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{bmatrix}$

解：(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - 3A + 2I = 0$

$$(2) x^n = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \begin{cases} 1 = a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}$$

$$(3) A^n = (A^2 - 3A + 2I)B + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{bmatrix}$$

2. 一個 36 人的旅行團欲前往某國家公園裡的高山處觀賞日出。由於山區道路狹窄，必須由大型遊覽車轉乘小型車（乘客在 7 人以下），今決定向某汽車出租公司租借小型車以便上山。已知汽車出租公司有 9 名司機及可載客 4 人的轎車 6 輛、可載客 7 人的房車 6 輛。假設租借轎車 x 輛、房車 y 輛。

- (1) 除了 x 、 y 為整數的條件，試列出 x 、 y 必須滿足的聯立不等式。
 (2) 請問可行解中的格子點共有幾個？（須列舉出坐標或圖示）
 （註：坐標平面上，滿足 x 、 y 都是整數的點 (x, y) 稱為格子點）
 (3) 若每輛轎車的租金是 2400 元，每輛房車的租金是 3500 元。

試問這兩種小型車應各租借幾輛才可使總租金最節省？其總租金為多少元？

【106 北區模(2)】

答：(1) 如詳解 (2) 16 個 (3) 租借 4 人轎車 2 輛，7 人房車 4 輛，最節省總租金 18800 元

解：限制範圍 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 6 \\ x + y \leq 9 \\ 4x + 7y \geq 36 \end{cases}$ ，共 16 個格子點

目標函數 $2400x + 3500y$

(x, y)	$(1, 5)$	$(2, 4)$	$(4, 3)$
$100(24x + 35y)$	$100(199)$	$100(188)$	$100(201)$

租借 4 人轎車 2 輛，7 人房車 4 輛，最節省總租金 18800 元

