中區高中 107 年(106 學年度)高三下
第四次指考模擬考數學(社會組)(106-4)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 若數列a_1、a_2、a_3、……、a_{2018}中每一項皆爲0、1、-1、2、-2的其中一個數，則$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots\cdots \times a_{2018}$之值有幾種可能？
(1)5^{2018}　(2)$1+4^{2018}$　(3)$3+2^{2018}$　(4)4039　(5)2019。　【107 中區模④】

答：(4)

解：2^{2018}～2^0，0，-2^0～2^{2018}共4039個

2. 已知A、B、C三個事件，A、B爲獨立事件，且$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{4}{9}$，又$P(C|A\cap B)=P(A\cap B|C)$，則$P(C)=$
(1)$\frac{1}{18}$　(2)$\frac{1}{9}$　(3)$\frac{1}{6}$　(4)$\frac{2}{9}$　(5)$\frac{5}{18}$。　【107 中區模④】

答：(1)

解：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\xrightarrow{P(A)=\frac{1}{3},P(A\cup B)=\frac{4}{9}}P(B)=\frac{1}{6}$

$P(C|A\cap B)=\dfrac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}=P(A\cap B|C)=\dfrac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}\Rightarrow P(C)=\frac{1}{18}$

3. 函數$f(x)=b\cdot a^x-1$，其中a、b爲實數，$b\neq 0$，$0<a<1$，則$y=f(x)$的圖形必定經過哪一個象限？
(1)第一象限　(2)第二象限　(3)第三象限　(4)第四象限　(5)不一定，由b值決定。
【107 中區模④】

答：(4)

解：當$b>1$，$f(x)=b\cdot a^x-1$過Ⅱ、Ⅰ、Ⅳ象限

當$b=1$，$f(x)=b\cdot a^x-1$過Ⅱ、Ⅳ象限

當$0<b<1$，$f(x)=b\cdot a^x-1$過Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限

當$b<0$，$f(x)=b\cdot a^x-1$過Ⅲ、Ⅳ象限

二、多選題

4. 設多項式函數 $f(x)=x^6+3x^2-6$，請選出正確的選項：
(1)多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 -2　(2)多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $x-2$
(3)方程式 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間必定至少存在一實根
(4)若 $g(x)=f(x)-x^7$，則方程式 $g(x)=0$ 必定至少存在一實根
(5)已知方程式 $x^6+3x^2-6=2^x+2^{-x}$ 有兩個相異實根，則此兩個相異實根之和恰為 0。
【107 中區模④】

答：(1)(3)(4)(5)

解：(1) $f(x)=(x-1)Q_1(x)+r \Rightarrow f(1)=r=-2$

(2) $f(x)=\left(x^2-1\right)Q_2(x)+a(x-1)-2 \Rightarrow f(-1)=-2a-2 \Rightarrow a=0$

(3) $f(2)=70 \xrightarrow{f(1)f(2)<0}$ 由勘根定理得知，$f(x)=0$ 在區間 $(1,2)$ 內至少一實根

(4) $\deg g(x)=dg\left[f(x)-x^7\right]=7$，且為實係數，至少一實根

(5) $h(x)=x^6+3x^2-6-\left(2^x+2^{-x}\right)$ 為偶函數，關於 y 軸成對稱

5. 坐標平面上，$A(1,1)$、$B(5,3)$，試問下列選項何者正確？
(1)若 P 點滿足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=6$，則 P 點所成圖形為一直線
(2)若 P 點滿足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$，則 P 點所成圖形為無圖形
(3)若 P 點滿足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，則 P 點所成圖形為一圓
(4)若 P 點滿足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=6$，則 P 點所成圖形為一圓
(5)若 P 點滿足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-6$，則 P 點所成圖形為無圖形。　【107 中區模④】

答：(1)(3)(4)(5)

解：$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-1,y-1)\cdot(x-5,y-3)=x^2+y^2-6x-4y+8$

$=(x-3)^2+(y-2)^2-5$，故(3)(4)(5)正確

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(x-1,y-1)\cdot(4,2)=4x+2y-6$，故(1)正確

6. 坐標平面上，指數函數 $y=2^x$ 與直線 $y=3$ 相交於 P 點，與直線 $y=12$ 相交於 Q 點，則下列選項何者是正確的？
(1) $\overline{PQ}>10$　(2)直線 PQ 的斜率 $=\dfrac{9}{2}$　(3) P、Q 二點在直線 $y=4x-8$ 的同側
(4) $\overrightarrow{PQ}$ 在直線 $y=x+5$ 上的正射影為 $(6,6)$
(5) R 點坐標 $(4,21)$，則 ΔPQR 的面積大於 $\dfrac{27}{4}$。　【107 中區模④】

答：(2)(3)(5)

解：$P(\log_2 3,3)$、$Q(\log_2 12,12)$，$\overline{PQ}=\sqrt{\left(\log_2\dfrac{12}{3}\right)^2+9^2}=\sqrt{85}$

(2)斜率 $=\dfrac{12-3}{\log_2 12-\log_2 3}=\dfrac{9}{2}$

(3) $\left[4\cdot\log_2 12-12-8\right]\left[4\log_2 3-3-8\right]>0$，表 P、Q 在 $y=4x-8$ 同側

(4) $\overrightarrow{PQ}=(2,9)$，$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{85}$，$x-y+5=0$ 之方向向量 $(1,1)$

所求正射影 $=\sqrt{85}\cdot\dfrac{2+9}{\sqrt{85}\sqrt{2}}\cdot\dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{11}{2},\dfrac{11}{2}\right)$

(5) $\overleftrightarrow{PQ}=9x-2y-9\log_2 3+6=0$，$d\left(R,\overleftrightarrow{PQ}\right)=\dfrac{9\log_2 3}{\sqrt{85}}$

$\Delta PQR=\sqrt{85}\times\dfrac{9\log_2 3}{\sqrt{85}}\times\dfrac{1}{2}\fallingdotseq\dfrac{9}{2}\times\dfrac{0.4771}{0.3010}\fallingdotseq 7.13\cdots\cdots>\dfrac{27}{4}$

7. 小貓與他的5位同學玩一個躲貓貓的遊戲，遊戲規則如下：『前方有4扇門，由小貓當「鬼」，其他5個人隨機選擇前方4扇門進入門後的房間。已知每扇門後面的房間最多可以容納3個人，當所有人都進入門後，將門關起，讓「鬼」猜測沒有人之房間的數量。』門後之房間沒有人的情況下稱為空房，則在這個遊戲中，下列敘述哪些正確？

(1)空房數量可能為0、1、2、3　(2)出現一間空房的機率為 $\dfrac{5}{8}$

(3)沒有空房的機率為 $\dfrac{5}{16}$　(4)空房數量的期望值為 $\dfrac{7}{8}$　(5)空房數量的變異數為 $\dfrac{3}{8}$。

【107 中區模④】

答：(2)(4)

解：(1)只能0、1、2

(2)(3) $(3,2,0,0)\Rightarrow C^5_3 C^2_2\times\dfrac{4!}{2!}=120$

$(3,1,1,0)\Rightarrow C^5_3 C^2_1 C^1_1\times\dfrac{4!}{2!}=240$

$(2,2,1,0)\Rightarrow C^5_2 C^3_2 C^1_1\times\dfrac{4!}{2!}=360$

$(2,1,1,1)\Rightarrow C^5_2 C^3_1 C^2_1 C^1_1\times\dfrac{4!}{3!}=240$

A	0空房	1空房	2空房
P	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
$	0	1	2
$^2	0	1	4

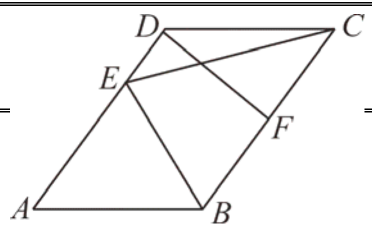
(4)(5) $E(X)=\dfrac{1}{8}\left[0\times2+1\times5+2\times1\right]=\dfrac{7}{8}$

$E\left(X^2\right)=\dfrac{1}{8}\left[0^2\times2+1^2\times5+2^2\times1\right]=\dfrac{9}{8}$

$Var(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\dfrac{9}{8}-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2=\dfrac{23}{64}$

三、選填題

A. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，E 在 $\overline{AD}$ 上，且 $\overline{AE}:\overline{ED}=2:1$，$F$ 是 $\overline{BC}$ 中點，



若$\overrightarrow{DF}=x\,\overrightarrow{EB}+y\,\overrightarrow{EC}$，求$x+2y=$________。

【107 中區模④】

答：$\dfrac{7}{6}$

解：$\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$

$$x\,\overrightarrow{EB}+y\,\overrightarrow{EC}=x\left[\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right]+y\left[-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right]$$

$\therefore \dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{2}$且$x+y=1\Rightarrow x=\dfrac{5}{6}$，$y=\dfrac{1}{6}$

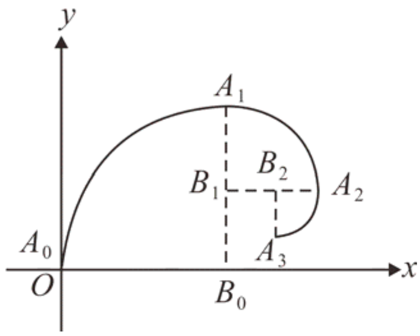
B. 從91、93、92、94、95五個數中任選3個相異數求其標準差，則標準差之中的最大值爲________。【107 中區模④】

答：$\sqrt{\dfrac{26}{9}}$

解：等同於在1，2，3，4，5中取三數，離散程度最大爲1，2，5（或1，4，5）

$S=\sqrt{\dfrac{26}{9}}$ 爲最大

C. 在坐標平面上有一台迷你玩具車在原點A_0的位置上，其行走的路徑如右圖中曲線（實數）。其中$\overline{A_0B_0}=2$，$\widehat{A_0A_1}$是以B_0爲圓心，$\overline{A_0B_0}$爲半徑的四分之一圓，B_1是$\overline{A_1B_0}$的中點，$\widehat{A_1A_2}$是以B_1爲圓心，$\overline{A_1B_1}$爲半徑的四分之一圓。B_2是$\overline{A_2B_1}$的中點……，以此類推，而迷你玩具車在n秒時的位置爲$A_n\left(x_n,y_n\right)$，則$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=$________。【107 中區模④】



答：$\dfrac{4}{5}$

解：所求$=2-1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}+\cdots\cdots$

$$=\left(2-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}+\cdots\cdots\right)+\left(-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}+\frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}$$

第貳部分：非選擇題

1. 大熊和胖虎玩「大老二」的遊戲，現在每個人手中有13張牌，大雄不小心說出「大老二（黑桃2）在我手上」，於是胖虎要求大雄把大老二（黑桃2）給他，但是大雄又不想把大老二（黑桃2）直接給他。
於是大雄對胖虎說：「這樣好了，你先從我手上取走3張牌，我再從你手中取回3張牌

（這樣稱爲換牌一次）；同樣的，如果今天大老二（黑桃2）在你手裡，我依然可以要求換牌一次，順序一樣是你先從我手上取走3張牌，我再從你手中取回3張牌。」

(1)請問經過一次換牌，大老二（黑桃2）依然在大雄手裡的機率爲？

(2)如果我們將大老二（黑桃2）在大雄手裡的情形稱爲狀態一，大老二（黑桃2）在胖虎手裡的情形稱爲狀態二，試求其轉移矩陣。

(3)若經過n次的換牌，大老二（黑桃2）在大雄手裡的機率爲a_n，求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$？

【107 中區模④】

答：(1)$\frac{13}{16}$　(2)$\begin{bmatrix}\frac{13}{16} & \frac{3}{16}\\ \frac{3}{16} & \frac{13}{16}\end{bmatrix}$　(3)$\frac{1}{2}$

解：

大雄（○）$\xrightarrow{○}$ 胖虎（○）$\xrightarrow{○}$ 大雄（○）$\Rightarrow P=\frac{C^{12}_2}{C^{13}_3}\times\frac{C^{15}_2}{C^{16}_3}=\frac{9}{208}$

大雄（○）$\xrightarrow{○}$ 胖虎（○）$\xrightarrow{\times}$ 大雄（×）

大雄（○）$\xrightarrow{\times}$ 胖虎（×）$\xrightarrow{\times}$ 大雄（○）$\Rightarrow P=\frac{C^{13}_3}{C^{13}_3}\times\frac{C^{16}_3}{C^{16}_3}=\frac{10}{13}$

大雄（×）$\xrightarrow{\times}$ 胖虎（○）$\xrightarrow{○}$ 大雄（○）$\Rightarrow P=\frac{C^{13}_3}{C^{13}_3}\times\frac{C^{15}_2}{C^{16}_3}=\frac{3}{16}$

大雄（×）$\xrightarrow{\times}$ 胖虎（○）$\xrightarrow{\times}$ 大雄（×）

(1)$\frac{9}{208}+\frac{10}{13}=\frac{13}{16}$

(3)$\begin{bmatrix}\frac{13}{16} & \frac{3}{16}\\ \frac{3}{16} & \frac{13}{16}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ x+y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$

2. 某加工廠生產甲、乙兩款玩具，甲玩具需使用塑膠片3個、鐵片2個、螺絲1個；乙玩具需使用塑膠片4個、鐵片2個、螺絲3個。但庫存只有60個塑膠片、30個鐵片、20個螺絲。已知甲玩具的售價爲150元，乙玩具的售價爲200元，若甲、乙各生產x、y個，則：

(1)列出符合條件之不等式，並畫出線性規劃圖形。

(2)當售價最高時，請問甲、乙兩種玩具各生產幾個？

(3)承(2)，若已知甲玩具成本90元、乙玩具成本120元，若要有最高利潤，則甲、乙兩玩具的生產數量是否需要調整，請說明理由，若需要調整請寫出調整後甲、乙兩種玩具的個數。

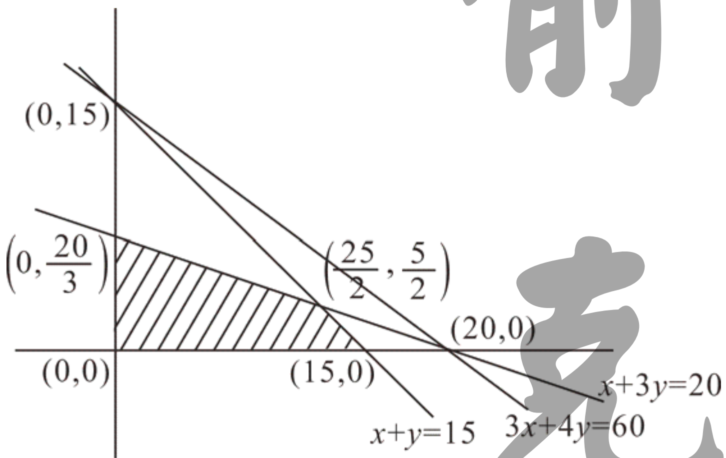
【107 中區模④】

答：(1)見詳解　(2)甲13個，乙2個

$\boxed{解}$：

	塑	鐵	螺	利潤
甲	3	2	1	150
乙	4	2	3	200
限制	≤ 60	≤ 30	≤ 20	Max

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+4y\le 60 \\ 2x+2y\le 30 \\ x+3y\le 20 \\ x,y\in N\cup\{0\} \end{cases}$$



	$50(3x+4y)$
$(12,2)$	$50(44)$
$(13,2)$	$50(47)$
$(14,1)$	$50(46)$

目標函數 $150x+200y$ 在 $x=13$，$y=2$ 處有 $Max=2350$