

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(5)	(4)	(3)	(3)(4)(5)	(3)(5)	(1)(2)(3)	(1)(2)		

第壹部分：選擇題

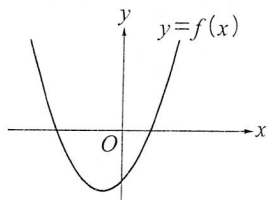
一、單選題

1. (5)

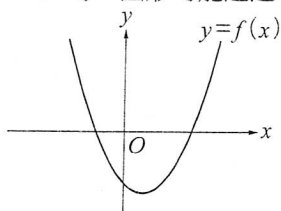
出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：評量考生是否具備二次函數圖形的基本認知能力

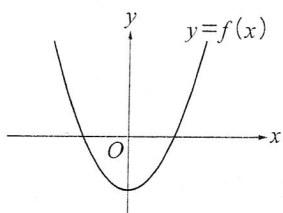
解析：(1) \times ： $a > 0$ 時，圖形可能通過四個象限，如下圖



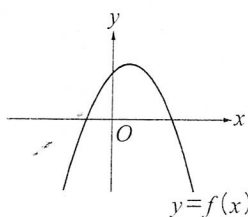
(2) \times ： $b < 0$ 時，圖形可能通過四個象限，如下圖



(3) \times ： $b = 0$ 時，圖形可能通過四個象限，如下圖



(4) \times ： $c > 0$ 時，圖形可能通過四個象限，如下圖



(5) \circ ：若 $b^2 = 4ac$ ，則 $b^2 - 4ac = 0$

即 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相切，因此不可能通過四個象限
故選(5)。

2. (4)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：評量考生是否具備對數運算的基本能力，並能求出直線方程式

解析：由點斜式可得 $L: y - 4 = \frac{5-4}{\log_2 10 - 0}(x-0) \Rightarrow L: y = (\log_2 10)x + 4$

(1) \times ： $y = (\log_2 10) \times 1 + 4 = 4 + \log_2 10 = \log_2(2 \times 10^4) \neq \log_2 32$

(2) \times ： $y = (\log_2 10) \times 2 + 4 = 4 + 2 \log_2 10 \neq 6$

(3) \times ： $y = \log_2 10 \times \log_2 10 + 4 = 4 + (\log_2 10)^2 \neq 6$

(4) \circ ： $y = \log_2 10 \times \log_4 \sqrt{10} + 4 = \frac{1}{4} \log_2 10 \times \log_2 10 + 4 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$

(5) \times ： $y = \log_2 10 \times \log_8 10 + 4 = \frac{1}{3} \log_2 10 \times \log_2 10 + 4 = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3} \neq \frac{4}{3}$

故選(4)。

3. (3)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：評量考生是否具備解含絕對值的一次不等式的能力

解析： $|ax-b| < 5 \Rightarrow -5 < ax-b < 5 \Rightarrow -5+b < ax < 5+b \Rightarrow \frac{-5+b}{a} < x < \frac{5+b}{a} \Rightarrow \frac{5+b}{a} - \frac{-5+b}{a} = \frac{10}{a}$

(1) \times ： $\because \frac{5+b}{a} > 0 \therefore \frac{5+b}{a} \neq -3$

(2) \times ： $1 - (-4) = 5 = \frac{10}{a} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \frac{5+b}{2} = 1 \Rightarrow b = -3$ (不合)

(3) \circ ： $4 - (-1) = 5 = \frac{10}{a} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \frac{5+b}{2} = 4 \Rightarrow b = 3$

(4) \times ： $5 - 1 = 4 = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$ (不合)

(5) \times ： $10 - 2 = 8 = \frac{10}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{4}$ (不合)

故選(3)。

二、多選題

4. (3)(4)(5)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：評量考生能否讀懂題意，並計算出古典機率與條件機率

解析：(1) \times ： $P(\text{辣味}) = \frac{7}{16}$ ， $P(\text{非辣味}) = \frac{9}{16}$ ，所以兩者機率不相等

(2) \times ： $P(\text{泡菜}) = \frac{3}{16}$ ， $P(\text{玉米}) = \frac{3}{16}$ ，所以兩者機率相等

(3) \circ ：所求機率為 $\frac{C_2^7}{C_2^{16}} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$

(4) \circ ：所求機率為 $\frac{C_2^4}{C_2^7} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

(5) \circ ：所求機率為 $\frac{C_1^4 C_1^3}{C_2^7} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

故選(3)(4)(5)。

5. (3)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

目標：評量考生對於指數函數圖形與極限的基本認知能力

解析：作圖如右

(1) \times ：由圖形可知 $m_1 < 0$

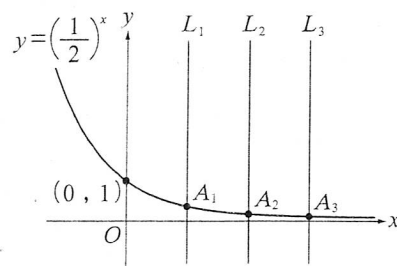
(2) \times ：由圖形可知 $m_1 > -1$

(3) \circ

(4) \times ：由圖形可知 $\overline{A_1 A_2} > \overline{A_2 A_3}$

(5) \circ ： $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n A_{n+1}} = d(L_1, L_2) = \sqrt{3}$

故選(3)(5)。



6. (1)(2)(3)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：評量考生是否能讀懂題意求出轉移矩陣及其行列式之值

解析：設 $p = \frac{x}{100}$ 且 $0 \leq p \leq 1$ ，依題意可得

今天吃葷食 今天吃素食

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & p \\ 0.3 & 1-p \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{明天吃葷食} \\ \text{明天吃素食} \end{matrix} \Rightarrow |\det A| = |0.7(1-p) - 0.3p| = |0.7-p|$$

因為 $-0.3 \leq 0.7-p \leq 0.7$ ，所以 $0 \leq |\det A| \leq 0.7$

故選(1)(2)(3)。

7. (1)(2)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：評量考生是否能利用除法原理與勘根定理來解題

解析：由除法原理可知

$$f(x) = (x-3)g(x) + 1 = (x-3)((x-3)(x-1) + r) + 1 = (x-3)^2(x-1) + rx + (1-3r)$$

因為 $f(x)$ 除以 $(x-3)^2$ 的餘式為 $ax+b$

$$\text{所以 } \begin{cases} a=r \\ b=1-3r \end{cases}, \text{ 又 } a+b=11$$

$$\text{因此可得 } r+(1-3r)=11 \Rightarrow r=-5 \Rightarrow f(x)=(x-3)^2(x-1)-5x+16$$

$$(1) \bigcirc : f(3) = (3-3)g(3) + 1 = 1$$

$$(2) \bigcirc : \text{因為 } g(x) = (x-3)(x-1) - 5$$

所以 $y=g(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線

$$(3) \times : g(3) = -5$$

$$(4) \times : f(4) = (4-3)^2(4-1) - 5 \times 4 + 16 = 3 - 20 + 16 = -1 < f(3)$$

$$(5) \times : \text{因為 } f(3) > 0, f(4) < 0$$

所以由勘根定理可知方程式 $f(x)=0$ 在 3 與 4 之間至少有一實根
故選(1)(2)。

三、選填題

A. 15

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：評量考生能否讀懂題意，依照題述先作分類討論，再求出其組合數

解析：分類如下：

(i) 恰有兩位老師拿到的 2 杯咖啡為同甜度：

$$\begin{array}{ccccccc} \text{方法數} = & C_1^3 & \times & C_1^2 & \times & C_1^1 & = 6 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \text{選一位老師} & & \text{再選另一位老師} & & \text{剩下一位老師則拿到} & \\ & \text{拿到 2 杯半糖} & & \text{拿到 2 杯全糖} & & \text{1 杯無糖、1 杯全糖} & \end{array}$$

(ii) 恰有一位老師拿到的 2 杯咖啡為同甜度：

$$\begin{array}{ccccccc} \text{方法數} = & C_1^3 & \times & 2! & & & = 6 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & \text{選一位老師} & & \text{再將 1 杯無糖 1 杯半糖} & & & \\ & \text{拿到 2 杯全糖} & & \text{及 1 杯全糖 1 杯半糖分} & & & \\ & & & \text{給剩下兩位老師} & & & \end{array}$$

(iii) 沒有老師拿到的 2 杯咖啡為同甜度：

$$\begin{array}{ccccccc} \text{方法數} = & C_1^3 & \times & 1 & & & = 3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & \text{選一位老師拿到} & & \text{剩下兩位老師皆拿到} & & & \\ & \text{1 杯無糖 1 杯全糖} & & \text{1 杯半糖 1 杯全糖} & & & \end{array}$$

故共有 $6+6+3=15$ 種不同的分法。

B. $\frac{4}{5}$

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉、選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

目標：評量考生是否能讀懂題意，並利用無窮等比級數和來求出重複試驗的機率

$$\text{解析：} P(\text{郁怡獲勝}) = p + (1-p)^2 p + (1-p)^4 p + \dots = \frac{p}{1-(1-p)^2}$$

$$P(\text{謙賀獲勝}) = (1-p)p + (1-p)^3 p + (1-p)^5 p + \dots = \frac{(1-p)p}{1-(1-p)^2}$$

$$\text{因為 } P(\text{郁怡獲勝}) = 5P(\text{謙賀獲勝})$$

$$\text{所以 } \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{5(1-p)p}{1-(1-p)^2} \Rightarrow 5(1-p) = 1 \Rightarrow p = \frac{4}{5}$$

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：評量考生是否能讀懂題意，並利用題目所給的資訊及數據來處理此生活題

解析：設消費總金額為 x 元，需付 $f(x)$ 元，其中 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 300 \\ 0.9x, & 300 \leq x < 800 \\ 0.8x, & x \geq 800 \end{cases}$

因為 $300 \times 0.9 = 270 > 260$ ， $800 \times 0.8 = 640 > 630$

所以百賀第一次消費總金額為 260 元，

第二次消費總金額為 $\frac{630}{0.9} = 700$ 元

因此若一次買齊，需付的金額為 $(260 + 700) \times 0.8 = 960 \times 0.8 = 768$ 元

故可省下 $(260 + 630) - 768 = 122$ 元。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 3x + 4y \leq 96 \\ x + 2y \leq 40 \end{cases}$ ，其中 x 和 y 為非負整數；目標函數為 $f(x, y) = \frac{2}{3}x + y$ ；(2) $(0, 0)$ ， $(20, 0)$ ， $(20, 9)$ ， $(16, 12)$ ，

$(10, 15)$ ， $(0, 15)$ ；(3) $\frac{68}{3}$ 分

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

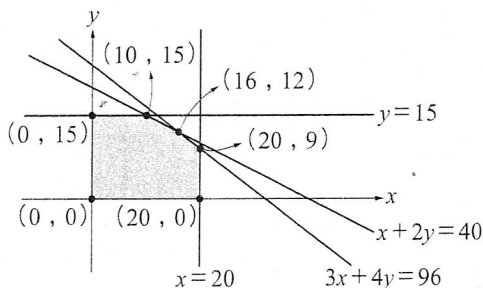
目標：評量考生是否能依題目所述條件表示為線性規劃問題中的聯立不等式，再利用線性規劃原理解題

解析：(1) 不等式為 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 3x + 4y \leq 96 \\ x + 2y \leq 40 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 3x + 4y \leq 96 \\ 0.1x + 0.2y \leq 4 \end{cases}$ ，其中 x 和 y 為非負整數

目標函數為 $f(x, y) = x \times \frac{1}{3} \times 2 + y \times \frac{1}{4} \times 4$
 $= \frac{2}{3}x + y$ 。

(2) 可行解區域如下圖

(x, y 為灰色區域(含邊界)中的格子點)



其中可行解區域的所有頂點的坐標分別為

$(0, 0)$ ， $(20, 0)$ ， $(20, 9)$ ， $(16, 12)$ ， $(10, 15)$ ， $(0, 15)$ 。

(3) 將所有頂點代入目標函數可得下表

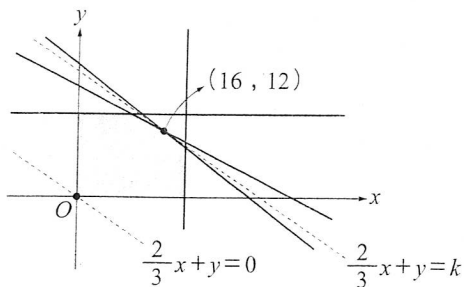
(x, y)	$(0, 0)$	$(20, 0)$	$(20, 9)$	$(16, 12)$	$(10, 15)$	$(0, 15)$
$f(x, y) = \frac{2}{3}x + y$	0	$\frac{40}{3}$	$\frac{67}{3}$	$\frac{68}{3}$	$\frac{65}{3}$	15

所以由頂點法可知，

當 $x = 16$ ， $y = 12$ 時，測驗分數的期望值有最大值 $\frac{68}{3}$ 分。

〈另解〉

設 $\frac{2}{3}x+y=k$ ，作圖如下



由平行線法可知將直線 $\frac{2}{3}x+y=k$ 往右上方平移時， k 值會變大

所以當 $x=16$ ， $y=12$ 時， k 有最大值 $f(16, 12) = \frac{2}{3} \times 16 + 12 = \frac{68}{3}$

即測驗分數的期望值有最大值 $\frac{68}{3}$ 分。

二、(1) $a=1, b=2, c=1, d=-1$; (2) $\frac{18}{5}$; (3) $\frac{9}{5}$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量考生能否利用向量分解與向量內積來解題

解析：(1) $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AD} + 2\vec{AM}$

$$\vec{MD} = \vec{AD} - \vec{AM}$$

故 $a=1, b=2, c=1, d=-1$ 。

$$(2) \vec{AC} \cdot \vec{MD} = (\vec{AD} + 2\vec{AM}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AM})$$

$$= |\vec{AD}|^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AM} - 2|\vec{AM}|^2$$

$$= 9 + \vec{AD} \cdot \vec{AM} - 2 \times 2^2 = \frac{23}{5}$$

$$\Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{AM} = \frac{18}{5}$$

$$(3) \vec{AD} \text{ 在 } \vec{AM} \text{ 上的正射影長為 } \frac{|\vec{AD} \cdot \vec{AM}|}{|\vec{AM}|} = \frac{18}{2} = \frac{9}{5}$$

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 3x+4y \leq 96 \\ x+2y \leq 40 \end{cases}$ ，其中 x 和 y 為非負整數；目標函數為 $f(x, y) = \frac{2}{3}x + y$ ；(2) $(0, 0), (20, 0), (20, 9), (16, 12), (10, 15), (0, 15)$ ；(3) $\frac{68}{3}$ 分

(10, 15), (0, 15); (3) $\frac{68}{3}$ 分

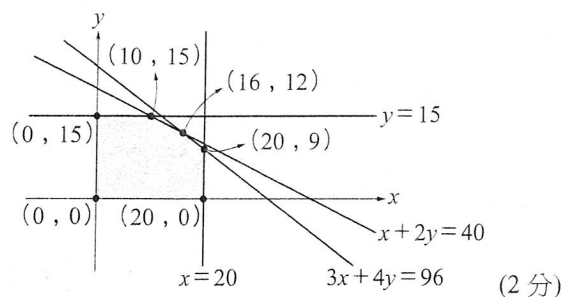
出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：評量考生是否能依題目所述條件表示為線性規劃問題中的聯立不等式，再利用線性規劃原理解題

解析：(1) 不等式為 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 3x+4y \leq 96 \\ x+2y \leq 40 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 3x+4y \leq 96 \\ 0.1x+0.2y \leq 4 \end{cases}$ ，其中 x 和 y 為非負整數 (2分)

目標函數為 $f(x, y) = x \times \frac{1}{3} \times 2 + y \times \frac{1}{4} \times 4 = \frac{2}{3}x + y$ 。(2分)

(2) 可行解區域如下圖 (x, y 為灰色區域(含邊界)中的格子點)



其中可行解區域的所有頂點的坐標分別為

$(0, 0), (20, 0), (20, 9), (16, 12), (10, 15), (0, 15)$ 。(2分)

(3) 將所有頂點代入目標函數可得下表

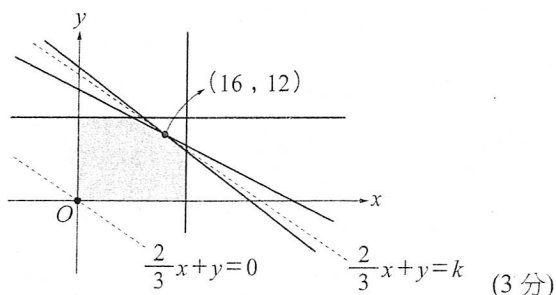
(x, y)	$(0, 0)$	$(20, 0)$	$(20, 9)$	$(16, 12)$	$(10, 15)$	$(0, 15)$
$f(x, y) = \frac{2}{3}x + y$	0	$\frac{40}{3}$	$\frac{67}{3}$	$\frac{68}{3}$	$\frac{65}{3}$	15

(4分)

所以由頂點法可知，當 $x=16, y=12$ 時，測驗分數的期望值有最大值 $\frac{68}{3}$ 分。(1分)

〈另解〉

設 $\frac{2}{3}x + y = k$ ，作圖如下



由平行線法可知將直線 $\frac{2}{3}x + y = k$ 往右上方平移時， k 值會變大

所以當 $x=16, y=12$ 時， k 有最大值 $f(16, 12) = \frac{2}{3} \times 16 + 12 = \frac{68}{3}$

即測驗分數的期望值有最大值 $\frac{68}{3}$ 分。(2分)

二、(1) $a=1, b=2, c=1, d=-1$; (2) $\frac{18}{5}$; (3) $\frac{9}{5}$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量考生能否利用向量分解與向量內積來解題

解析：(1) $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AD} + 2\vec{AM}$ (2分)

$\vec{MD} = \vec{AD} - \vec{AM}$ (2分)

故 $a=1, b=2, c=1, d=-1$ 。

(2) $\vec{AC} \cdot \vec{MD} = (\vec{AD} + 2\vec{AM}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AM})$ (2分)

$= |\vec{AD}|^2 + \vec{AD} \cdot \vec{AM} - 2|\vec{AM}|^2$ (2分)

$= 9 + \vec{AD} \cdot \vec{AM} - 2 \times 2^2 = \frac{23}{5}$ (1分)

$\Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{AM} = \frac{18}{5}$ 。(1分)

(3) \vec{AD} 在 \vec{AM} 上的正射影長為 $\frac{|\vec{AD} \cdot \vec{AM}|}{|\vec{AM}|}$ (1分)

$= \frac{18}{2} = \frac{9}{5}$ 。(2分)