

107 學年度全國高級中學指定科目第四次模擬考數學乙

第壹部分：選擇題



一、單選題：(12 分)

1. 關於不等式的推論過程，下列選項何者正確？

(1) $x \geq \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 \geq 1$ (2) $|x-2| \geq 3 \Rightarrow x-2 \geq 3$ 或 $2-x \geq 3$

(3) $\log_a b \leq 1 \Rightarrow \log_b a \geq 1$ (a, b 為不等於 1 的正實數)

(4) $10^{x^2} \leq 100^{x-2} \Rightarrow x+2 \leq 2$ (5) $(x-2)^2(x-3)^3 \geq 0 \Rightarrow x-3 \geq 0$

2. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ ， $\langle c_n \rangle$ ， $\langle d_n \rangle$ ， $\langle e_n \rangle$ ， $\langle f_n \rangle$ ， $\langle g_n \rangle$ 皆為無窮數列，各數列的定義如下：

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}, \quad c_n = (-1)^{a_n}, \quad d_n = c_{2n}, \quad e_n = (-1)^{b_n}, \quad f_n = e_{2n-1},$$

$g_n = e_{2n}$ ，其中 n 為正整數，則下列選項中哪一個數列為收斂的等比數列？

(1) $\langle c_n \rangle$ (2) $\langle d_n \rangle$ (3) $\langle e_n \rangle$ (4) $\langle f_n \rangle$ (5) $\langle g_n \rangle$

二、多選題：(32 分)

3. 有一個顯示兩位數字坐標 (x, y) 的手機 APP 遊戲，每次遊戲坐標都從 $(0, 0)$ 開始，每玩一次遊戲，需搖動手機虛擬公正骰子 6 次。當搖出的點數為 1, 2, 3, 4 時，只有 x 坐標會增加 1；當搖出的點數為 5, 6 時，只有 y 坐標會增加 1，最後會得到一個坐標 (x, y) ，每次搖出的點數結果互相獨立且每次遊戲的結果也互相獨立。設隨機變數 X 代表遊戲最後的 x 坐標值，隨機變數 Y 代表遊戲最後的 y 坐標值，則下列哪些選項是正確的？

(1) 最後坐標總和 $x+y$ 一定是 6 (2) 最後坐標是 $(2, 4)$ 與 $(4, 2)$ 的機率相等

(3) 最後兩坐標相等 $(x=y)$ 的機率為 $C_3^6 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3$ (4) 隨機變數 X 的期望值為 4

(5) 隨機變數 X 的標準差不等於隨機變數 Y 的標準差

4. 已知函數 $y = 2^x$ 和 $y = x+27$ 的圖形恰有兩相異交點，所以方程式 $2^x = x+27$ 恰有兩相異實根 α ， β 且 $\alpha > \beta$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1) 兩實根皆為整數 (2) 5 為最大實根 (3) $-28 < \beta < -27$ (4) $-27 < \beta < -26$

(5) 2^α ， 2^β 為方程式 $\log_2 x = x-27$ 的兩相異實根

5. 已知三次實係數多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 與 x^2-4 的餘式分別為 $r_1(x)$ 與 $r_2(x)$ ，若多項式 $g(x) = f(x) - f(-x)$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1) $\deg(g(x)) = 3$ (2) $g(-x) = g(x)$ (3) 若 $r_1(x)$ 為常數，則 $g(-x) = 0$

(4) 可能 $g(1) = g(2) = 0$ (5) 可能 $r_1(x) = r_2(x)$

6. 平面上 O 為原點，且平面上有兩質點 A, B 做等速率直線移動， A 點在直線 $L: 4x+3y=24$ 上，由點 $(6, 0)$ 移動到點 $(0, 8)$ ，同時 B 點在直線 $M: 4x+3y=12$ 上，由點 $(0, 4)$ 移動到點 $(3, 0)$ ，兩質點各用了 1 秒的時間移動，則下列哪些選項是正確的？

(1) A 點和 B 點移動速率相同 (2) 在 0.5 秒的時候， O, A, B 三點共線

(3) 在 0.5 秒的時候， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 有最大值

(4) 在 0.5 秒的時候， A, B 兩點之間的距離最近

(5) A, B 兩點之間最近的距離等於兩平行直線 L, M 之間的距離

三、選填題：(35 分)

A. 已知 $3 + \log 2 = x + \log 15 = y + \log 18 = z + \log 24$ ，則 $x - y + z =$ _____。

B. 已知三階方陣 $A = [a_{ij}]$ ， $B = [b_{ij}]$ ，若 $a_{ij} = i - j$ ， $b_{ij} = \frac{i}{2} + j$ ，其中 $1 \leq i, j \leq 3$ ，則矩陣 AB 的最大元和最小元之差為_____。

C. 若一個五位正整數同時滿足下列兩個條件：

(1) 相鄰的兩個數字不同(萬位與千位、千位與百位、百位與十位、十位與個位)。

(2) 不是迴文數(迴文數是指一個像 16861 這樣對稱的數，將這個數的數字按相反的順序重新排列後，所得到的數和原來的數一樣)。

同時符合這兩個條件的五位正整數有 $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ 個(例如：12315，12312，70809 符合，但 12321，12399，01236 不符合)，則整數序組 $(x, y, z) =$ _____。

D. 平面上梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{CD} = 7$ ， $\overline{DA} = 9$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。若 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$ ，且終點 P 在梯形內部(不包含邊界)，則 $0 < t <$ _____。(化為最簡分數)

E. 已知平面上 $\triangle ABC$ 的三個內角中 $\angle A = x^\circ$ ， $\angle B = y^\circ$ ， $\angle C = z^\circ$ ，且三個內角滿足不等式

$x \geq z \geq y \geq \frac{2}{5}x$ 。若(目標函數) $x + y$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，

則數對 $(M, m) =$ _____。

第貳部分：非選擇題(21 分)

一、有五位學生甲，乙，丙，丁，戊兩次數學模擬考的成績如下：

	甲	乙	丙	丁	戊
第一次(X)	11	8	11	13	12
第二次(Y)	10	a	b	15	12

已知 Y 對 X 的迴歸直線(最適合直線)方程式為 $y = \frac{3x+135}{14}$ ，試求：

- (1) X, Y 的平均值 (μ_x, μ_y) 。(4 分)
- (2) a, b 的值。(5 分)
- (3) X, Y 的相關係數 r 。(2 分)

二、陳老師因下週請假參加校外會議，請求同事林老師幫忙照顧辦公桌的小盆栽。已知小盆栽在有澆水的情況下，枯萎的機率是 10%；沒有澆水的話枯萎的機率是 80%。根據過去經驗，陳老師確定林老師只有 60%的機率會幫忙澆水。若林老師在陳老師回來前發現小盆栽枯萎了，會買一盆完全相同的小盆栽偷偷放回辦公桌的機率是 50%，則：

- (1) 當陳老師回來時，發現桌上小盆栽已經枯萎了，在此條件下，試求林老師記得澆水的機率。(5 分)
- (2) 當陳老師回來時，發現桌上小盆栽沒有枯萎，試求這小盆栽不是陳老師原來那盆盆栽的機率。(5 分)

RB666 107 學年度全國高級中學指定科目第四次模擬考數學乙

選擇題：1. (2) 2. (5) 3. (1)(3)(4) 4. (2)(4)(5) 5. (1)(3) 6. (2)(3)(5)

選填題：A. 2 B. 24 C. (4, 6, 1) D. $\frac{3}{4}$ E. (140, 105)

非選擇題：一、(1) (11, 12) (2) $a=13, b=10$ (3) $\frac{\sqrt{7}}{14}$

二、(1) $\frac{3}{19}$ (2) $\frac{19}{81}$