

# 107 學年度全國高級中學指定科目第四次模擬考數學乙

## 第壹部分：選擇題



### 一、單選題：(12 分)

1. 關於不等式的推論過程，下列選項何者正確？

(1)  $x \geq \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 \geq 1$     (2)  $|x-2| \geq 3 \Rightarrow x-2 \geq 3$  或  $2-x \geq 3$

(3)  $\log_a b \leq 1 \Rightarrow \log_b a \geq 1$  ( $a, b$  為不等於 1 的正實數)

(4)  $10^{x^2} \leq 100^{x-2} \Rightarrow x+2 \leq 2$     (5)  $(x-2)^2(x-3)^3 \geq 0 \Rightarrow x-3 \geq 0$

2. 已知數列  $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ ， $\langle c_n \rangle$ ， $\langle d_n \rangle$ ， $\langle e_n \rangle$ ， $\langle f_n \rangle$ ， $\langle g_n \rangle$  皆為無窮數列，各數列的定義如下：

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}, \quad c_n = (-1)^{a_n}, \quad d_n = c_{2n}, \quad e_n = (-1)^{b_n}, \quad f_n = e_{2n-1},$$

$g_n = e_{2n}$ ，其中  $n$  為正整數，則下列選項中哪一個數列為收斂的等比數列？

(1)  $\langle c_n \rangle$     (2)  $\langle d_n \rangle$     (3)  $\langle e_n \rangle$     (4)  $\langle f_n \rangle$     (5)  $\langle g_n \rangle$

### 二、多選題：(32 分)

3. 有一個顯示兩位數字坐標  $(x, y)$  的手機 APP 遊戲，每次遊戲坐標都從  $(0, 0)$  開始，每玩一次遊戲，需搖動手機虛擬公正骰子 6 次。當搖出的點數為 1, 2, 3, 4 時，只有  $x$  坐標會增加 1；當搖出的點數為 5, 6 時，只有  $y$  坐標會增加 1，最後會得到一個坐標  $(x, y)$ ，每次搖出的點數結果互相獨立且每次遊戲的結果也互相獨立。設隨機變數  $X$  代表遊戲最後的  $x$  坐標值，隨機變數  $Y$  代表遊戲最後的  $y$  坐標值，則下列哪些選項是正確的？

(1) 最後坐標總和  $x+y$  一定是 6    (2) 最後坐標是  $(2, 4)$  與  $(4, 2)$  的機率相等

(3) 最後兩坐標相等  $(x=y)$  的機率為  $C_3^6 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3$     (4) 隨機變數  $X$  的期望值為 4

(5) 隨機變數  $X$  的標準差不等於隨機變數  $Y$  的標準差

4. 已知函數  $y = 2^x$  和  $y = x+27$  的圖形恰有兩相異交點，所以方程式  $2^x = x+27$  恰有兩相異實根  $\alpha$ ， $\beta$  且  $\alpha > \beta$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1) 兩實根皆為整數    (2) 5 為最大實根    (3)  $-28 < \beta < -27$     (4)  $-27 < \beta < -26$

(5)  $2^\alpha, 2^\beta$  為方程式  $\log_2 x = x-27$  的兩相異實根

5. 已知三次實係數多項式  $f(x)$  除以  $x^2-1$  與  $x^2-4$  的餘式分別為  $r_1(x)$  與  $r_2(x)$ ，若多項式  $g(x) = f(x) - f(-x)$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1)  $\deg(g(x)) = 3$     (2)  $g(-x) = g(x)$     (3) 若  $r_1(x)$  為常數，則  $g(-x) = 0$

(4) 可能  $g(1) = g(2) = 0$     (5) 可能  $r_1(x) = r_2(x)$

6. 平面上  $O$  為原點，且平面上有兩質點  $A, B$  做等速率直線移動， $A$  點在直線  $L: 4x+3y=24$  上，由點  $(6, 0)$  移動到點  $(0, 8)$ ，同時  $B$  點在直線  $M: 4x+3y=12$  上，由點  $(0, 4)$  移動到點  $(3, 0)$ ，兩質點各用了 1 秒的時間移動，則下列哪些選項是正確的？

(1)  $A$  點和  $B$  點移動速率相同    (2) 在 0.5 秒的時候， $O, A, B$  三點共線

(3) 在 0.5 秒的時候， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  有最大值

(4) 在 0.5 秒的時候， $A, B$  兩點之間的距離最近

(5)  $A, B$  兩點之間最近的距離等於兩平行直線  $L, M$  之間的距離

### 三、選填題：(35 分)

A. 已知  $3 + \log 2 = x + \log 15 = y + \log 18 = z + \log 24$ ，則  $x - y + z =$  \_\_\_\_\_。

B. 已知三階方陣  $A = [a_{ij}]$ ， $B = [b_{ij}]$ ，若  $a_{ij} = i - j$ ， $b_{ij} = \frac{i}{2} + j$ ，其中  $1 \leq i, j \leq 3$ ，則矩陣  $AB$  的最大元和最小元之差為\_\_\_\_\_。

C. 若一個五位正整數同時滿足下列兩個條件：

(1) 相鄰的兩個數字不同(萬位與千位、千位與百位、百位與十位、十位與個位)。

(2) 不是迴文數(迴文數是指一個像 16861 這樣對稱的數，將這個數的數字按相反的順序重新排列後，所得到的數和原來的數一樣)。

同時符合這兩個條件的五位正整數有  $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$  個(例如：12315，12312，70809 符合，但 12321，12399，01236 不符合)，則整數序組  $(x, y, z) =$ \_\_\_\_\_。

D. 平面上一梯形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{CD} = 7$ ， $\overline{DA} = 9$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。若  $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$ ，且終點  $P$  在梯形內部(不包含邊界)，則  $0 < t < \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

E. 已知平面上  $\triangle ABC$  的三個內角中  $\angle A = x^\circ$ ， $\angle B = y^\circ$ ， $\angle C = z^\circ$ ，且三個內角滿足不等式

$x \geq z \geq y \geq \frac{2}{5}x$ 。若(目標函數)  $x + y$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ ，

則數對  $(M, m) =$ \_\_\_\_\_。

第貳部分：非選擇題(21 分)

一、有五位學生甲，乙，丙，丁，戊兩次數學模擬考的成績如下：

	甲	乙	丙	丁	戊
第一次(X)	11	8	11	13	12
第二次(Y)	10	$a$	$b$	15	12

已知  $Y$  對  $X$  的迴歸直線(最適合直線)方程式為  $y = \frac{3x+135}{14}$ ，試求：

- (1)  $X, Y$  的平均值  $(\mu_x, \mu_y)$ 。(4 分)
- (2)  $a, b$  的值。(5 分)
- (3)  $X, Y$  的相關係數  $r$ 。(2 分)

二、陳老師因下週請假參加校外會議，請求同事林老師幫忙照顧辦公桌的小盆栽。已知小盆栽在有澆水的情況下，枯萎的機率是 10%；沒有澆水的話枯萎的機率是 80%。根據過去經驗，陳老師確定林老師只有 60%的機率會幫忙澆水。若林老師在陳老師回來前發現小盆栽枯萎了，會買一盆完全相同的小盆栽偷偷放回辦公桌的機率是 50%，則：

- (1) 當陳老師回來時，發現桌上小盆栽已經枯萎了，在此條件下，試求林老師記得澆水的機率。(5 分)
- (2) 當陳老師回來時，發現桌上小盆栽沒有枯萎，試求這小盆栽不是陳老師原來那盆盆栽的機率。(5 分)

RB666 107 學年度全國高級中學指定科目第四次模擬考數學乙

選擇題：1. (2) 2. (5) 3. (1)(3)(4) 4. (2)(4)(5) 5. (1)(3) 6. (2)(3)(5)

選填題：A. 2 B. 24 C. (4, 6, 1) D.  $\frac{3}{4}$  E. (140, 105)

非選擇題：一、(1) (11, 12) (2)  $a=13, b=10$  (3)  $\frac{\sqrt{7}}{14}$

二、(1)  $\frac{3}{19}$  (2)  $\frac{19}{81}$