數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.			
答案	(2)	(5)	(1)(3)(4)	(2)(4)(5)	(1)(3)	(2)(3)(5)			

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：不等式化簡觀念釐清(多項式、分式、絕對值、指數、對數)

解析：(1)╳：當 $x=-\frac{1}{2}$ 時，$-\frac{1}{2}\geq -2$，但 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2<1$，不合

(2)○：$x-2\geq 3$ 或 $2-x\geq 3$ 相當於 $x-2\geq 3$ 或 $x-2\leq -3$

(3)╳：若 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$，則 $\log_a b=\log_b a=-1$，不合

(4)╳：當 $x=2$ 時，$10^0\leq 100^0$，但 $2+2=4>2$，不合

(5)╳：當 $x=2$ 時，$(2-2)^2(2-3)^2=0$，但 $2-3=-1<0$，不合

故選(2)。

2. (5)

出處：選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

目標：無窮等比數列的收斂判斷

解析：將數列〈a_n〉，〈b_n〉分類討論

$$a_n=\begin{cases}\text{奇數}，n=4k+1\\ \text{奇數}，n=4k+2\\ \text{偶數}，n=4k+3\\ \text{偶數}，n=4k+4\end{cases}，b_n=\begin{cases}\text{奇數}，n=4k+1\\ \text{偶數}，n=4k+2\\ \text{偶數}，n=4k+3\\ \text{偶數}，n=4k+4\end{cases}，\text{其中整數 } k\geq 0$$

因此可得：

〈c_n〉＝〈-1，-1，1，1，-1，-1，1，1，……〉

〈d_n〉＝〈-1，1，-1，1，-1，1，-1，1，……〉

〈e_n〉＝〈-1，1，1，1，-1，1，1，1，……〉

〈f_n〉＝〈-1，1，-1，1，-1，1，-1，1，……〉

〈g_n〉＝〈1，1，1，1，1，1，1，1，……〉

(1)╳：不是等比數列

(2)╳：公比為 -1 的等比數列，不收斂

(3)╳：不是等比數列

(4)╳：公比為 -1 的等比數列，不收斂

(5)○：公比為 1 的等比數列，收斂到 1

故選(5)。

二、多選題

3. (1)(3)(4)

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：二項分布

解析：(1)○：每搖動一次虛擬骰子，x 坐標或 y 坐標必定會有一個增加 1，每次遊戲總共增加 6 次，故 $x+y=6$

(2)╳：因為 x 坐標增加的機率較大 $\left(\frac{2}{3}>\frac{1}{3}\right)$，所以最後坐標為 $(4, 2)$ 的機率大於 $(2, 4)$ 的機率

(3)○：最後坐標相等代表 x，y 坐標各增加 3 次，故機率為 $C^6_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3$

(4)○：隨機變數 X 的期望值為 $np=6\times\frac{2}{3}=4$

(5)╳：隨機變數 X 的標準差為 $\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{6\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{6\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)}$ 為隨機變數 Y 的標準差

故選(1)(3)(4)。

4. (2)(4)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數性質、勘根定理

解析：(1) ╳：明顯當 $x=5$ 時，$2^5=32=5+27$ 符合方程式，因此 $x=5$ 為方程式的一個實根

又因為 $2^{-27}>0=(-27)+27$ 且 $2^{-26}<2^0=1=(-26)+27$，由勘根定理可知另一實根為負數，且不為整數

(2) ○：承(1)，$\alpha=5$，$-27<\beta<-26$

(3) ╳：由(2)可知

(4) ○：由(2)可知

(5) ○：令 $u=2^x$，則 $2^x-x=u-\log_2 u$，故 2^α，2^β 為方程式 $\log_2 x=x-27$ 的兩相異實根

故選(2)(4)(5)。

5. (1)(3)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的除法原理

解析：(1) ○：若 $f(x)$ 的三次(最高次)項為 ax^3 $(a\neq 0)$，則 $g(x)$ 的三次(最高次)項為 $2ax^3$，故 $\deg(g(x))=3$

(2) ╳：$g(x)=f(x)-f(-x)=-(f(-x)-f(x))=-g(-x)$

若對所有實數 x，$g(-x)=g(x)$ 皆成立，則 $g(x)=0$，與 $\deg(g(x))=3$ 矛盾

(3) ○：若 $r_1(x)$ 為常數，則 $f(1)=r_1(1)=r_1(-1)=f(-1)$，因此 $g(-1)=f(-1)-f(1)=0$

(4) ╳：若 $g(1)=g(2)=0$，則 $g(-1)=g(-2)=0$

因此 $g(x)$ 有 $x\pm 1$ 和 $x\pm 2$ 四個相異的一次因式，與 $\deg(g(x))=3$ 矛盾

(5) ╳：若 $r_1(x)=r_2(x)$，則 $f(1)-r_1(1)=f(-1)-r_1(-1)=f(2)-r_1(2)=f(-2)-r_1(-2)=0$

則 $f(x)-r_1(x)$ 有 $x\pm 1$ 和 $x\pm 2$ 四個相異的一次因式，與 $\deg(f(x))=3$ 矛盾

故選(1)(3)。

6. (2)(3)(5)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：配方法、參數坐標點、平行、垂直、內積等運算

解析：假設 t 為時間，$0\leq t\leq 1$

(1) ╳：1 秒的時間，A 點移動的距離為 10，B 點移動的距離為 5，所以 A 點的移動速率是 B 點的 2 倍

(2) ○：承(1)，假設 $\overrightarrow{OA}=(6,0)+t(-6,8)=(-6t+6,8t)$，$\overrightarrow{OB}=(0,4)+t(3,-4)=(3t,-4t+4)$

當 O，A，B 三點共線，$\overrightarrow{OA}\,/\!/\,\overrightarrow{OB}\Rightarrow(-6t+6,8t)\,/\!/\,(3t,-4t+4)$，明顯 t 不等於 0 或 1

所以 $\dfrac{-6t+6}{3t}=\dfrac{8t}{-4t+4}\Rightarrow 24t^2=24t^2-48t+24\Rightarrow 48t=24\Rightarrow t=0.5$

〈另解〉

當 $t=0.5$ 時，$\overrightarrow{OA}=(3,4)$，$\overrightarrow{OB}=\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ 為兩平行向量，

故 O，A，B 三點共線

(3) ○：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(-6t+6,8t)\cdot(3t,-4t+4)=-50t^2+50t=-50(t-0.5)^2+\dfrac{25}{2}$

故當 $t=0.5$ 時，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 有最大值 $\dfrac{25}{2}$

(4) ╳：兩點之間的距離最近發生於 $\overrightarrow{AB}=(9t-6,-12t+4)$ 與直線方向向量 $(3,-4)$ 垂直，所以

$(9t-6,-12t+4)\perp(3,-4)\Rightarrow(9t-6,-12t+4)\cdot(3,-4)=0\Rightarrow 27t-18+48t-16=0\Rightarrow t=\dfrac{34}{75}$

〈另解〉

直接計算向量長度 $|\overrightarrow{AB}|^2=(9t-6)^2+(-12t+4)^2=225t^2-204t+52$

$$=225\left(t-\frac{34}{75}\right)^2+\left(52-225\times\frac{34^2}{75^2}\right)=225\left(t-\frac{34}{75}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

故當 $t=\dfrac{34}{75}$ 時，A，B 兩點之間的距離有最小值

(5) ○：承(4)，A，B 兩點之間最近的距離為 $d(L,M)=\dfrac{|24-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{12}{5}$

故選(2)(3)(5)。

三、選填題

A. 2

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數基本運算

解析：$x-y+z=(3+\log 2-\log 15)-(3+\log 2-\log 18)+(3+\log 2-\log 24)$

$=3+\log 2+\log 18-\log 15-\log 24$

$=3+\log\dfrac{2\times 18}{15\times 24}=3-1=2$。

B. 24

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣乘法

解析：$(AB)_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}=(i-1)\left(\dfrac{1}{2}+j\right)+(i-2)(1+j)+(i-3)\left(\dfrac{3}{2}+j\right)$

$=3ij+3i-6j-7=3(i-2)(j+1)-1$，其中 $1\le i$，$j\le 3$

當 $i=3$，$j=3$ 時，有最大元 $3\times 1\times 4-1=11$；當 $i=1$，$j=3$ 時，有最小元 $3\times(-1)\times 4-1=-13$

故兩者相差 $11-(-13)=24$。

C. $(4,6,1)$

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

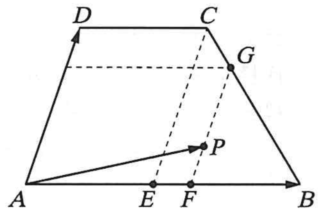
目標：相鄰不同物排列計算

解析：滿足條件(1)的五位正整數有 9^5 個，其中迴文數有 $9^3\cdot 1^2$ 個，

故同時符合兩條件的數共有 $9^5-9^3=9^3(9^2-1)=9^3\cdot 80=2^4\cdot 3^6\cdot 5^1$ 個。

故序組 $(x,y,z)=(4,6,1)$。

D. $\dfrac{3}{4}$



出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量平行(線段)概念

解析：過 C 點作直線平行 $\overline{AD}$，交 $\overline{AB}$ 於 E 點，且 $\overline{AE}=\overline{CD}=7$

接著在 $\overline{AB}$ 取一點 F，使得 $\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$，則 $\overline{AF}=15\times\dfrac{3}{5}=9>7$，

所以 F 點在 E，B 兩點之間

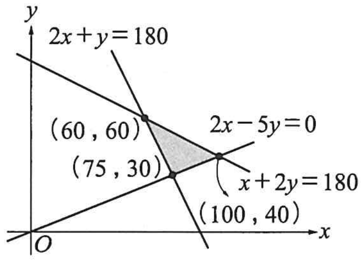
最後過 F 點作直線平行 $\overline{AD}$，交 $\overline{BC}$ 於 G 點，則 $\overline{FG}\,/\!/\,\overline{AD}\,/\!/\,\overline{CE}$，如右圖

由題目可知 P 點在 $\overline{FG}$ 上(不包括端點)，且 $\overrightarrow{FP}=t\overrightarrow{AD}$

因 $\overline{BF}=15\times\left(1-\dfrac{3}{5}\right)=15\times\dfrac{2}{5}=6$

得 $\overline{FG}:\overline{EC}=\overline{BF}:\overline{BE}=6:8=3:4\Rightarrow\overrightarrow{FG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{EC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，故 $0<t<\dfrac{3}{4}$。

E. $(140,105)$



出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：因為三角形的內角和為 180°，則 $x+y+z=180\Rightarrow z=180-x-y$

由不等式 $x\ge z\ge y\ge\dfrac{2}{5}x\Rightarrow 180>x\ge 180-x-y\ge y\ge\dfrac{2}{5}x>0$

可得 $\begin{cases}0<x，y<180\\2x+y\ge 180\\x+2y\le 180\\2x-5y\le 0\end{cases}$，畫出可行解區域如右圖所示

目標函數為 $P=x+y$，

由右圖可知可行解區域的頂點為 $(60,60)$，$(75,30)$，$(100,40)$

利用頂點法求出對應的目標函數值，如下表格

(x,y)	$(60,60)$	$(75,30)$	$(100,40)$
$P=x+y$	120	105	140

可知最大值為 140，最小值為 105，故數對 $(M,m)=(140,105)$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $(11, 12)$；(2) $a=13$，$b=10$；(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：迴歸直線反推其他統計數值

解析：(1)五位同學兩次模擬考成績的平均為 $\mu_X=\dfrac{11+8+11+13+12}{5}=11$，

將 $\mu_X=11$ 代入迴歸直線 $y=\dfrac{3x+135}{14}$，得 $\mu_Y=\dfrac{3\times11+135}{14}=12$。

故 $(\mu_X, \mu_Y)=(11, 12)$。

(2)計算各值：

	X	Y	$X-\mu_X$	$Y-\mu_Y$	$(X-\mu_X)^2$	$(Y-\mu_Y)^2$	$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$
甲	11	10	0	-2	0	4	0
乙	8	a	-3	$a-12$	9	$(a-12)^2$	$-3(a-12)$
丙	11	b	0	$b-12$	0	$(b-12)^2$	0
丁	13	15	2	3	4	9	6
戊	12	12	1	0	1	0	0

因 $\mu_Y=\dfrac{10+a+b+15+12}{5}=\dfrac{a+b+37}{5}=12 \Rightarrow a+b=23$

再從迴歸直線斜率 $\dfrac{3}{14}=\dfrac{-3(a-12)+6}{9+4+1} \Rightarrow a-12=1 \Rightarrow a=13$，$b=10$。

(3)相關係數 $r=\dfrac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{4+1+4+9}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$。

二、(1) $\dfrac{3}{19}$；(2) $\dfrac{19}{81}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率與貝氏定理

解析：將情況整理成樹狀圖如下

- 記得澆水的機率為 0.6
  - 綠意盎然的機率 $0.6\times0.9=0.54$
  - 枯萎的機率 $0.6\times0.1=0.06$
- 不記得澆水的機率為 0.4
  - 綠意盎然的機率 $0.4\times0.2=0.08$
  - 枯萎的機率 $0.4\times0.8=0.32$

(1)根據貝氏定理，林老師記得澆水的機率為 $\dfrac{0.06}{0.06+0.32}=\dfrac{3}{19}$。

(2)根據貝氏定理，小盆栽不是陳老師原來那盆的機率為 $\dfrac{(0.06+0.32)\times0.5}{(0.06+0.32)\times0.5+(0.54+0.08)}=\dfrac{19}{81}$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $(11, 12)$；(2) $a=13$，$b=10$；(3) $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：迴歸直線反推其他統計數值

解析：(1)五位同學兩次模擬考成績的平均為 $\mu_X=\dfrac{11+8+11+13+12}{5}=11$，　(2 分)

將 $\mu_X=11$ 代入迴歸直線 $y=\dfrac{3x+135}{14}$，得 $\mu_Y=\dfrac{3\times11+135}{14}=12$。　(2 分)

故 $(\mu_X, \mu_Y)=(11, 12)$。

⑵計算各值：

	X	Y	$X-\mu_X$	$Y-\mu_Y$	$(X-\mu_X)^2$	$(Y-\mu_Y)^2$	$(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$
甲	11	10	0	-2	0	4	0
乙	8	a	-3	$a-12$	9	$(a-12)^2$	$-3(a-12)$
丙	11	b	0	$b-12$	0	$(b-12)^2$	0
丁	13	15	2	3	4	9	6
戊	12	12	1	0	1	0	0

(2 分)

因 $\mu_Y=\dfrac{10+a+b+15+12}{5}=\dfrac{a+b+37}{5}=12 \Rightarrow a+b=23$　(1 分)

再從迴歸直線斜率 $\dfrac{3}{14}=\dfrac{-3(a-12)+6}{9+4+1} \Rightarrow a-12=1 \Rightarrow a=13$，$b=10$。　(2 分)

⑶相關係數 $r=\dfrac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{4+1+4+9}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$。　(2 分)

二、⑴$\dfrac{3}{19}$；⑵$\dfrac{19}{81}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率與貝氏定理

解析：將情況整理成樹狀圖如下

- 記得澆水的機率為 0.6
  - 綠意盎然的機率 $0.6\times0.9=0.54$
  - 枯萎的機率 $0.6\times0.1=0.06$
- 不記得澆水的機率為 0.4
  - 綠意盎然的機率 $0.4\times0.2=0.08$
  - 枯萎的機率 $0.4\times0.8=0.32$

(3 分)

⑴根據貝氏定理，林老師記得澆水的機率為 $\dfrac{0.06}{0.06+0.32}=\dfrac{3}{19}$。　(2 分)

⑵根據貝氏定理，小盆栽不是陳老師原來那盆的機率為 $\dfrac{(0.06+0.32)\times0.5}{(0.06+0.32)\times0.5+(0.54+0.08)}=\dfrac{19}{81}$。　(5 分)