

台北區高中 108 年(107 學年度)高三下

第二次指考模擬考數學(社會組)(107-B4)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題 (占 78 分)

一、單選題 (占 18 分)

1. 某生做一實驗重複 10 次得到 10 個長度數據，下列選項何者正確？

- (1) 若改用不同的長度單位，則標準差還是不變
- (2) 若改用不同的長度單位，則算術平均數還是不變
- (3) 若測得的數據有不同，其標準差必為正數
- (4) 若實驗次數增加，則變異數必定愈來愈小
- (5) 若實驗次數增加，則標準差必定與次數成反比。

【108 北區指考模②】

答：(3)

解：(1) 伸縮會影響標準差 (2) 伸縮會影響算術平均 (4)(5) 無此推論

2. 已知一無窮等比級數，首項為 a ，公比為 r 且 $a, r \neq 0$ 並為收斂級數，若級數和為 S ，則下列選項何者正確？

- (1) $0 < |r| < 1$ (2) $a \leq S$ (3) $r = \frac{a}{1-S}$ (4) 級數和 S 可能是 0 (5) 級數和 S 可能是 a 。

【108 北區指考模②】

答：(1)

解：(2) 反例：首項為 $a=1$ ，公比為 $r=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=1 > S=\frac{2}{3}$ (3) 應為 $r=1-\frac{a}{S}$

(4) 若級數和 S 是 0，則 $a=0$ ，矛盾 (5) 若級數和 S 是 a ，則 $r=0$ ，矛盾

3. 在坐標平面上有一點 $P(h, k)$ ，其中 $k > h > 0$ ，已知可找到 n 條符合

$|x \text{ 截距}| = |y \text{ 截距}| \neq 0$ 的直線通過 P 點，且這 n 條直線分別與兩坐標軸圍成 n 個三角形，令其面積總和為 A ，則下列選項何者正確？

- (1) $A = h^2$ (2) $A = k^2$ (3) $A = (h-k)^2$ (4) $A = h^2 + k^2$ (5) $A = (h+k)^2$ 。

【108 北區指考模②】

答：(4)

解：直線為 $\frac{x}{t} + \frac{y}{t} = 1$ ，過 $P(h, k) \Rightarrow \frac{h}{t} + \frac{k}{t} = 1$ ， $t = h+k$ ，面積 $\frac{t^2}{2} = \frac{(h+k)^2}{2}$

直線為 $\frac{x}{-t} + \frac{y}{t} = 1$ ，過 $P(h, k) \Rightarrow \frac{h}{-t} + \frac{k}{t} = 1$ ， $t = -h+k$ ，面積 $\frac{t^2}{2} = \frac{(-h+k)^2}{2}$

$$\text{故 } A = \frac{(h+k)^2}{2} + \frac{(-h+k)^2}{2} = h^2 + k^2$$

二、多選題 (占 28 分)

4. 下列有關指數與對數函數的選項，哪些是正確的？

- (1) 對所有實數 t ，指數方程式 $10^x = t$ 恆有解
- (2) 對所有實數 s ，對數方程式 $\log x = s$ 恆有解
- (3) 底數 $a > 1$ 的指數函數 $y = a^x$ 與對數函數 $y = \log_a x$ 圖形一定相交
- (4) 指數 $10^{9.5}$ 與 $10^{10.5}$ 的算術平均數是 10^{10}
- (5) 對數 $\log 2$ 與 $\log 50$ 的算術平均數是 1。

【108 北區指考模②】

答：(2)(5)

解：(1) $t > 0$ 才有解 (2) 當 $a \geq 2$ ，必不相交 (4) 應為幾何平均

5. 已知三次實係數多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，滿足 $f(3) = 1$ ， $f(2) = 2$ ， $f(1) = 3$ ，則下列選項哪些可能成立？

- (1) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式是 $-x+4$
- (2) $f(x) = a(x-1)^3 + 3$
- (3) $f(x)$ 分別除以 $x-2$ ， $(x-2)^2$ ， $(x-2)^3$ 的餘式皆為 2
- (4) 若 a 為非零整數，則 $d \neq 0$
- (5) 若 a 為非零整數，則方程式 $f(x) = 0$ 的實根必為整數根。

【108 北區指考模②】

答：(1)(3)(4)

解：(1) 牛頓插值法 $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) - (x-1) + 3$

(2) 若 $f(x) = a(x-1)^3 + 3$ ，則 $\begin{cases} f(3) = 8a + 3 = 1 \\ f(2) = a + 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0.25 \\ a = -1 \end{cases}$ ，矛盾

(3) 若 $f(x) = a(x-2)^3 + 2$ ，則 $\begin{cases} f(3) = a + 2 = 1 \\ f(1) = -a + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -1$ ，成立

(4) 若 a 為非零整數，則 $d = -6a + 4 \neq 0$

(5) 承(3)： $f(x) = -(x-2)^3 + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{2}$ 即為反例

6. 四位整數中，要求百位數字是四位數字中唯一的最大值（例如：1988，5603，6866 符合，但 2019，6868，0937 不符合）。則下列關於滿足條件的整數之敘述，哪些是正確的？（參考公式： $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ， $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ）

- (1) 最大數是 8988 (2) 最小數是 1211 (3) 千位數字為 8 的佔最多
- (4) 偶數與奇數各佔一半 (5) 共有 1740 個。

【108 北區指考模②】

答：(1)(5)

解：(1)正確

(2)最小數是1200

(3)千位數字為 k 時，符合題意的數有 $9^2 + 8^2 + \cdots + (k+1)^2$ 個。

故千位數字為1的佔最多

(4)當百位數字為奇數時，個位數字偶數較多

當百位數字為偶數時，個位數字偶數、奇數相等

(5)共有 $9^2 \times 8 + 8^2 \times 7 + \cdots + 2^2 \times 1 = \sum_{k=1}^8 [k(k+1)^2] = 1740$ 個

7. 『已知袋中有 m 顆紅球， n 顆藍球，逐一取出。在過程中，取出之紅球總個數恆大於取出之藍球總個數的方法數有 $C_{m-1}^{m+n-1} - C_m^{m+n-1}$ 。』請使用此性質解下列問題：

小明玩一遊戲機，每玩一次需投入一枚遊戲幣（每次輸贏皆為獨立事件），若贏的話可得兩枚遊戲幣（相當於多一枚遊戲幣），若輸的話遊戲幣不退回（相當於少一枚遊戲幣）；且贏的機率為 $\frac{1}{3}$ ，輸的機率為 $\frac{2}{3}$ 。假設小明一開始有一枚遊戲幣，在遊戲進行到第9次時，恰好所有遊戲幣都輸光而停止遊戲（例如：連贏4次後再連輸5次），則下列敘述何者正確？

(1)前兩次一定都贏 (2)後兩次一定都輸 (3)共贏4次，輸5次

(4)所有可能輸贏順序有 $C_3^8 - C_4^8$ 種可能

(5)發生這種情形（恰玩9次）的機率為 $\frac{7 \times 2^6}{3^9}$ 。

【108 北區指考模②】

答：(2)(3)(5)

解：可視為：由1開始，每次贏則加1、輸則減1，9次後為0（過程中不出現0與負數）

(1) 前兩次可以 $1 \xrightarrow{\text{贏}} 2 \xrightarrow{\text{贏}} 3$ ，或 $1 \xrightarrow{\text{贏}} 2 \xrightarrow{\text{輸}} 1$

(2) 由最後回推 $0 \xleftarrow{\text{輸}} 1 \xleftarrow{\text{輸}} 2$ （合理），但 $0 \xleftarrow{\text{輸}} 1 \xleftarrow{\text{贏}} 0$ （不合理）

(3) 因為由1開始，最後為0，故輸比贏多一次

(4) 可視為由最後回推，而累積「輸的總次數」恆大於「贏的總次數」

方法數有 $C_{5-1}^{5+4-1} - C_5^{5+4-1} = C_4^8 - C_5^8 = 70 - 56 = 14$

(5) 承(4)，所求機率 $= 14 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{7 \times 2^6}{3^9}$

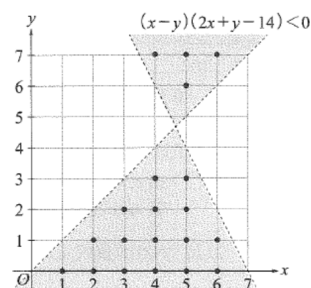
三、選填題（占32分）

A. 甲、乙兩人各有一個箱子，箱中皆有7顆相同的白球，甲、乙分別從自己的箱中取出 x 、 y 個球（ $0 \leq x, y \leq 7$ ），剩下的 $(14 - x - y)$ 顆，再全部給丙。若 x 、 y 、 $(14 - x - y)$ 三數相異且 x 是此三個數的中位數，則滿足條件的整數數對 (x, y) 有_____個。

答：20

解： $0 \leq y < x < 14 - x - y \leq 14 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x > y \\ 2x + y < 14 \\ x + y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ，得出：下方格子點

$0 \leq 14 - x - y < x < y \leq 7 \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 14 \\ 2x + y > 14 \\ x < y \\ y \leq 7 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ，得出：上方格子點



B. 坐標平面上向量 $\vec{OA} = (5, 12)$ ， $\vec{OB} = (-4, 3)$ ， $\vec{OP} = r\vec{OA} + 2\vec{OB}$ ，若射線 $\vec{OP}$ 平分銳角 $\angle AOB$ ，則實數 $r = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

【108 北區指考模②】

答： $\frac{10}{13}$

解： $|\vec{OA}| = 13$ ， $|\vec{OB}| = 5$ ， $\vec{OP} \parallel 5\vec{OA} + 13\vec{OB} = \frac{13}{2} \left(\frac{10}{13}\vec{OA} + 2\vec{OB} \right)$

C. 平面上有 $A(2, -5)$ 、 $B(4, 31)$ 、 $C(5, 28)$ 、 $D(10, 91)$ 四點，已知直線 L 與線段 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 皆相交，則直線 L 斜率 m 的最大範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【108 北區指考模②】

答： $-3 \leq m \leq 12$

解：斜率 $\underbrace{11}_{m_{AC}} \leq m \leq \underbrace{12}_{m_{AD}}$ 、 $\underbrace{-3}_{m_{BC}} \leq m \leq \underbrace{10}_{m_{BD}} \Rightarrow -3 \leq m \leq 13$

D. 爺爺準備四個紅包袋，其中兩袋中有 1000 元，另外兩袋中有 100 元，但是從外觀無法知道袋中是裝多少錢，只有爺爺知道每個紅包袋中有多少錢。若每個紅包袋被選取的機會均等，現在小琪從四個紅包袋中任選一個紅包後，爺爺打開一個裝有 100 元的紅包袋。若小琪決定要從剩下的兩個紅包袋中任選一個，跟自己原本選的紅包袋交換，則她拿到的壓歲錢的期望值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元。

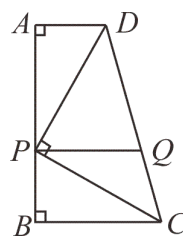
【108 北區指考模②】

答： 775

$$\begin{aligned} \text{解：} & \left\{ \begin{array}{l} 1000 \left(\text{機率} = \frac{2}{4} \right) \left\{ \begin{array}{l} 1000 \left(\text{機率} = \frac{1}{2} \right) \\ 100 \left(\text{機率} = \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. \\ 100 \left(\text{機率} = \frac{2}{4} \right) \left\{ \begin{array}{l} 1000 \left(\text{機率} = \frac{2}{2} \right) \\ 100 \left(\text{機率} = \frac{0}{2} \right) \end{array} \right. \end{array} \right. \cdot \text{期望值} \\ & = 1000 \times \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{2} \right) + 100 \times \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \times \frac{0}{2} \right) = 775 \end{aligned}$$

第貳部分：非選擇題 (占 22 分)

1. 梯形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ，點 P 、 Q 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 邊上，且 $\angle CPD = 90^\circ$ ， $\overline{PQ} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{PA} = 7$ ， $\overline{PB} = 4n$ ， $\overline{PC} = n \overline{PD}$ (其中 n 為正整數)，如右圖：



- (1) 求 $\overline{AD}$ 長度。
 (2) 當 $n=1$ 時，求 $\overline{PQ}$ 長度。
 (3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{PQ}$ 。

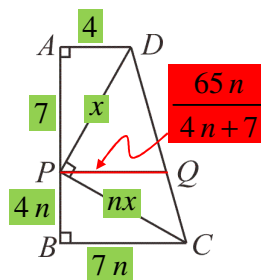
【108 北區指考模②】

答：(1) 4 (2) $\frac{65}{11}$ (3) $\frac{65}{4}$

解： $\triangle DAP \sim \triangle PBC \Rightarrow \frac{\overline{DP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{\overline{DA}}{4n} = \frac{7}{\overline{BC}}$

故 $\overline{DA} = 4$ 、 $\overline{BC} = 7n$

$\overline{PQ} = \frac{7 \times (7n) + 4n \times (4)}{4n + 7} = \frac{65n}{4n + 7}$ ，故 $\begin{cases} n=1 \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{65}{11} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{PQ} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{65n}{4n + 7} = \frac{65}{4} \end{cases}$



2. 甲、乙對戰圍棋 (沒有和局)，各有兩個不同策略，

根據過去經驗，不同策略組合情況下，

甲贏的機率如右表。

甲贏的機率	甲 ₁	甲 ₂
乙 ₁	0.6	0.1
乙 ₂	0.2	0.7

已知甲、乙事先決定好選擇個人策略的機率為：

甲採取甲₁策略的機率為 p ($0 \leq p \leq 1$)，甲採取甲₂策略的機率為 $1-p$ ，

乙採取乙₁策略的機率為 q ($0 \leq q \leq 1$)，乙採取乙₂策略的機率為 $1-q$ 。

- (1) 若甲是由投擲均勻硬幣決定，也就是 $p=1-p=0.5$ ，則乙如何選擇策略機率 (q 值)，來取得最大獲勝的機率？
 (2) 甲是否可以選擇某個固定 p 值，使得不論乙如何選擇 q 值，甲獲勝的機率都不會改變？
 (3) 若甲事先知道乙的 q 值是多少，甲如何因應選擇 p 值，讓甲獲勝的機率最大？

【108 北區指考模②】

答：(1) $q=1$ 時，有最大的獲勝機率 (2) 可以，當 $p=0.6$ 時，甲贏的機率 $=0.4$ 為定值
(3) 略

$$\text{解：甲贏機率} = \begin{cases} pq \times 0.6 \\ + p(1-q) \times 0.2 \\ + (1-p)q \times 0.1 \\ + (1-p)(1-q) \times 0.7 \end{cases} = pq - 0.5p - 0.6q + 0.7 = (p-0.6)(q-0.5) + 0.4$$

(1) 當 $p=0.5 \Rightarrow$ 甲贏機率 $= -0.1q + 0.45 \Rightarrow$ 乙贏機率 $= 0.1q + 0.55$

故 $q=1$ 時，乙有最大的獲勝機率

(2) 當 $p=0.6$ 時，甲贏的機率 $= 0 \times (q-0.5) + 0.4 = 0.4$ 為定值 (亦即與 q 無關)

(3) 當 $\begin{cases} 0 \leq q < 0.5 \xrightarrow{(p-0.6) \times (\text{負}) + 0.4} \text{取 } p=0, \text{ 會使甲贏機率最大} \\ q = 0.5 \xrightarrow{(p-0.6) \times (0) + 0.4} p \text{ 為任意值, 均使甲贏機率為 } 0.4 \\ 0.5 < q \leq 1 \xrightarrow{(p-0.6) \times (\text{正}) + 0.4} \text{取 } p=1, \text{ 會使甲贏機率最大} \end{cases}$