數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(3)	(1)	(4)	(2)(5)	(1)(3)(4)	(1)(5)	(2)(3)(5)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

　難易度：易

　出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

　目標：算術平均數、標準差與變異數基本概念

　解析：(1) ╳：$\sigma_{(aX+b)}=|a|\sigma_X$，例如公尺改成公分，標準差會變成 100 倍

　(2) ╳：$\mu_{(aX+b)}=a\mu_X+b$，例如公尺改成公分，算術平均數會變成 100 倍

　(3) ○：$\sigma=0 \Leftrightarrow$ 所有數據皆相等

　(4) ╳：數據多寡與變異數無關

　(5) ╳：數據多寡與標準差無關

　故選(3)。

2. (1)

　難易度：中

　出處：選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

　目標：無窮等比級數的收斂公式範圍與可能數值判斷

　解析：(1) ○：當 $0<|r|<1$ 時，無窮等比級數為收斂級數，級數和收斂至 $S=\dfrac{a}{1-r}$

　(2) ╳：當 $a=1$，$r=-\dfrac{1}{2}$ 時，$S=\dfrac{2}{3}<a$

　(3) ╳：設 $a=1$，$r=\dfrac{1}{2}$，則 $S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \Rightarrow \dfrac{a}{1-S}=-1\neq r$

　(4) ╳：$S=0 \Rightarrow a=0$ (不合)

　(5) ╳：$S=a \Rightarrow \dfrac{a}{1-r}=a \Rightarrow 1-r=1 \Rightarrow r=0$ (不合)

　故選(1)。

3. (4)

　難易度：中

　出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

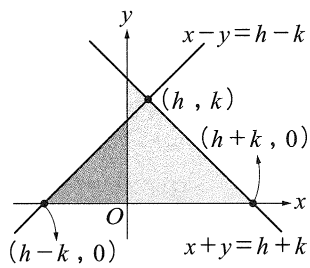
　目標：直線截距式圖形與面積計算

　解析：設此直線 L 方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，$|a|=|b|\neq 0$

　若 $a=b$ 時，$a=b=h+k$；

　若 $a+b=0$ 時，$a=h-k$ $(h\neq k)$ 符合的直線為 $x+y=h+k$，$x-y=h-k$

　面積和 $=\dfrac{(h+k)^2}{2}+\dfrac{(h-k)^2}{2}=h^2+k^2$，圖形如右



　故選(4)。

二、多選題

4. (2)(5)

　難易度：中

　出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

　目標：基本的指數與對數性質

　解析：(1) ╳：$t>0$ 才有解

　(2) ○：對數函數與任一條水平線都恰有一交點

　(3) ╳：$a=2$ 時，兩函數不相交

(4) ╳：根據算幾不等式且 $10^{9.5}\neq 10^{10.5}$，$\dfrac{10^{9.5}+10^{10.5}}{2}>\sqrt{10^{9.5+10.5}}=\sqrt{10^{20}}=10^{10}$

(5) ○：$\dfrac{\log 2+\log 50}{2}=\dfrac{\log 100}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

故選(2)(5)。

5. (1)(3)(4)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：因式、餘式定理與三次函數圖形判斷

解析：可令 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+r(x)$，其中 $a\neq 0$，餘式 $r(x)$ 至多 2 次

(1) ○：由 $r(3)=1=4-3$，$r(2)=2=4-2$，$r(1)=3=4-1$，可得方程式 $r(x)=4-x$ 有三個相異根 1、2、3，但 $r(x)$ 次數至多為 2，所以 $r(x)=-x+4$

(2) ╳：$f(x)$ 直接代入 $x=2$，3 可得 $\begin{cases}a+3=2\\8a+3=1\end{cases}\Rightarrow a$ 無解，無法滿足 $f(2)=2$ 和 $f(3)=1$

(3) ○：$f(x)$ 滿足此選項條件為 $f(x)=a(x-2)^3+2$，將 $f(1)=3$，$f(3)=1$ 代入可得唯一解 $a=-1$

(4) ○：$d=f(0)=-6a+4\neq 0$

(5) ╳：$a=-1$ 時，$-(x-2)^3+2=0$ 的實根為 $2+\sqrt[3]{2}$ 不是整數

故選(1)(3)(4)。

6. (1)(5)

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：基本數字排列數計算

解析：(1) ○：正確

(2) ╳：最小數字是 1200

(3) ╳：千位數字為 1 的佔最多，有 $2^2+3^2+\cdots\cdots+9^2=284$ 個，但千位數字為 8 的只有 $9^2=81$ 個

(4) ╳：當百位是偶數時，個位奇偶各一半；當百位是奇數時，個位奇數小於偶數個數。

$\left(\text{例如：}*3**\text{，個位數是 }0,1,2\text{ 偶數佔 }\dfrac{2}{3}\right)$

(5) ○：固定百位數討論，符合條件共有 $\sum\limits_{k=1}^{9}(k^3-k^2)=1740$ 個數

故選(1)(5)。

7. (2)(3)(5)

難易度：難

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：透過遊戲是否能持續進行討論排列的可能情形(可引用一路領先結論或列舉所有情況)，並計算機率

解析：(1) ╳：可以第一次贏，第二次輸(例如：贏輸贏輸贏輸贏輸輸，每次玩完剩下遊戲幣數量分別為 2，1，2，1，2，1，2，1，0)

(2) ○：最後一次一定是輸(把遊戲幣輸光)，倒數第二次若為贏，小明至少會有 2 枚遊戲幣，不可能最後一次全部輸光

(3) ○：因為一開始有一枚，所以輸的次數比贏多一次

(4) ╳：最後一次一定是輸，一開始有一枚，相當於贏一次；假設先贏一次且不考慮最後一次輸，所以這 9 次中，贏 5 次，輸 4 次，過程中其累積總和至少要有一枚遊戲幣才能繼續遊戲，所以令 $m=5$，$n=4$，所有可能方法有 $C_4^8-C_5^8=14$ 種

〈另解〉或者從後面往前回溯，累積輸的次數必大於贏的次數，同樣是 $m=5$，$n=4$ 的情況

(5) ○：實際上贏 4 次，輸 5 次，機率為 $14\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{7\times 2^6}{3^9}$

故選(2)(3)(5)。

三、選填題

A. 20

難易度：中

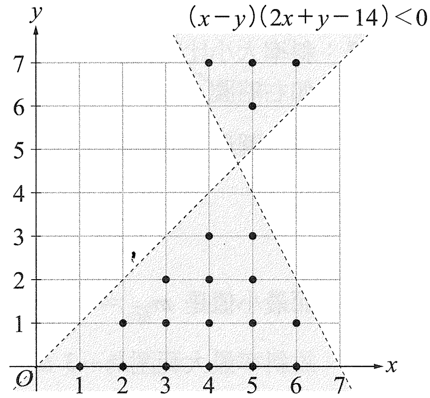
出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：可行解區域格子點計算

解析：可行解區域為 $y<x<14-x-y$ 與 $y>x>14-x-y$，

相當於 $(x-y)(2x+y-14)<0$ 且 $0 \leq x$，$y \leq 7$

區域如右：



也可討論求出：

y	0	1	2	3	6	7
x	1～6	2～6	3，4，5	4，5	5	4，5，6

故共有 $6+5+3+2+1+3=20$ 個整數數對 (x, y)。

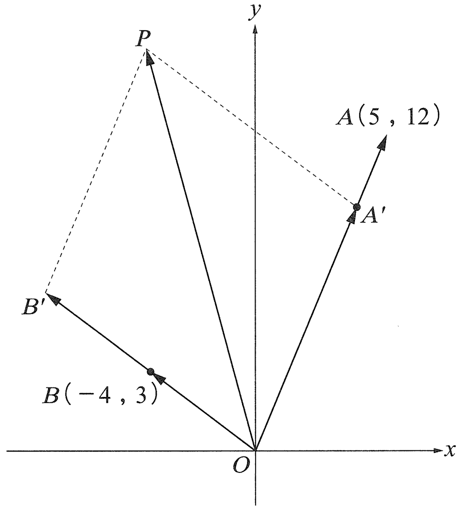
B. $\frac{10}{13}$

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量加法、內積與平行計算

解析：



利用菱形對角線平分內角與向量平行：

參考上圖，由 P 點做平行射線 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}$ 的兩直線，分別交兩射線 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 於點 A'，B'

且 $\overrightarrow{OA'}=r\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$，因為對角線 $\overline{OP}$ 平分 $\angle AOB$

所以平行四邊形 $OB'PA'$ 為菱形 $\Rightarrow \overline{OA'}=10 \Rightarrow r=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{10}{13}$。

〈另解〉

向量內積求餘弦值

由題意可得 $\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=(5r-8, 12r+6)$

$\because \cos\angle AOP=\cos\angle BOP$

$\therefore \frac{(5,12)\cdot(5r-8,12r+6)}{|(5,12)|\,|\overrightarrow{OP}|}=\frac{(-4,3)\cdot(5r-8,12r+6)}{|(-4,3)|\,|\overrightarrow{OP}|}$

化簡後得 $\frac{169r+32}{13}=\frac{16r+50}{5} \Rightarrow r=\frac{10}{13}$。

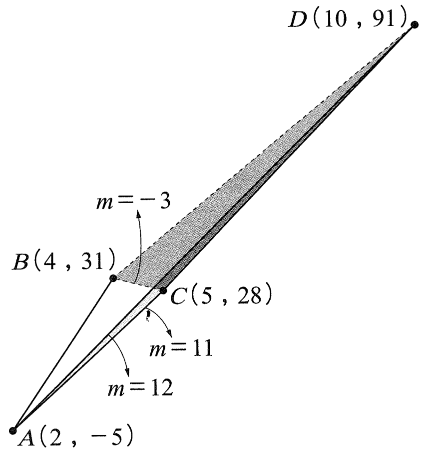
C. $-3 \le m \le 12$

難易度：易

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：斜率大小比較與計算

解析：如右略圖



根據圖形 m 的最大值是 $m_{\overline{AD}}=\dfrac{91-(-5)}{10-2}=12$

$>m_{\overline{AC}}=\dfrac{28-(-5)}{5-2}=11$，

而最小值是 $m_{\overline{BC}}=\dfrac{28-31}{5-4}=-3$

故斜率最大範圍為 $-3 \le m \le 12$。

D. 775

難易度：中偏易

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：條件機率、期望值計算

解析：先討論最後換到 100 的情況：

一開始選到 1000 與 100 的機率都是 $\frac{1}{2}$，換到 100 的機率分別是 $\frac{1}{2}$ 與 0，

所以最後換到 100 的機率是 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{4}$

故拿到壓歲錢的期望值為 $100\times\frac{1}{4}+1000\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=775$ (元)。

第貳部分：非選擇題

一、(1) 4；(2) $\frac{65}{11}$；(3) $\frac{65}{4}$

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、選修數學乙(下) 第一章〈極限與函數〉

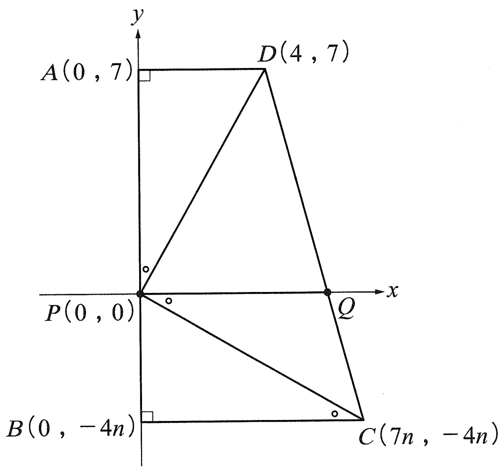
目標：相似形(坐標、垂直向量、分點公式)與數列極限

解析：(1)將圖形坐標化

令 $P(0,0)$，$A(0,7)$，$B(0,-4n)$，$C(7n,-4n)$，$D(4,7)$

因為 $\triangle PAD\sim\triangle CBP$ ($\because \angle A=\angle B$，$\angle APD=\angle PCB$)，

可得 $\overline{AD}=4$，$\overline{BC}=7n$。



(2)由(1)可得 $D(4,7)$，$C(7n,-4n)$，故向量 $\overrightarrow{PD}=(4,7)$，

$\overrightarrow{PC}=(7n,-4n)$

$\because \overline{QD}:\overline{QC}=\overline{PA}:\overline{PB}=7:4n$

$\therefore$ 由分點公式 $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{4n}{4n+7}(4,7)+\dfrac{7}{4n+7}(7n,-4n)$

$=\left(\dfrac{65n}{4n+7},0\right)$

$\left(\text{或由 } \overleftrightarrow{CD}:(4n+7)x+(7n-4)y=65n\text{，求得 } Q\left(\dfrac{65n}{4n+7},0\right)\right)$

$\Rightarrow \overline{PQ}=\dfrac{65n}{4n+7}$，當 $n=1$ 時，$\overline{PQ}=\dfrac{65}{4+7}=\dfrac{65}{11}$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{PQ}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{65n}{4n+7}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{65}{4+\frac{7}{n}}=\dfrac{65}{4}$。

二、(1) $q=1$ 時，有最大的獲勝機率；(2)可以，當 $p=0.6$ 時，甲贏的機率 $=0.4$ 為定值；(3)詳細數值參閱解析

難易度：難

出處：第四冊第三章〈矩陣〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：矩陣、(條件)機率計算

解析：計算甲贏的機率：$[q \quad 1-q]\begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\0.2 & 0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}=pq-0.5p-0.6q+0.7=(p-0.6)(q-0.5)+0.4$

(1)當 $p=0.5$ 時，乙贏的機率 $=1-(-0.1q+0.45)=0.1q+0.55 \leq 0.65$，當 $q=1$ 時有最大值 0.65。
所以乙固定選擇乙$_1$ 策略 $(q=1)$ 時，獲勝機率有最大值 0.65。

(2)當 $p=0.6$ 時，甲贏的機率 $=0.4$ 為定值，其他情況皆為 q 的函數：$(p-0.6)q-0.5p+0.7$ 不是常數。

(3)甲可以選擇 p 的方法如下表：

q 值	$q-0.5$ 的正負	甲贏的機率	最佳的 p 值	甲獲勝機率最大值
$0 \leq q < 0.5$	$-$	$(p-0.6)(q-0.5)+0.4$	0	$0.7-0.6q>0.7-0.6\times0.5=0.4$
0.5	0	$(p-0.6)(q-0.5)+0.4$	任意值	0.4
$0.5<q \leq 1$	$+$	$(p-0.6)(q-0.5)+0.4$	1	$0.2+0.4q>0.2+0.4\times0.5=0.4$

非選擇題批改原則

一、(1) 4；(2) $\frac{65}{11}$；(3) $\frac{65}{4}$

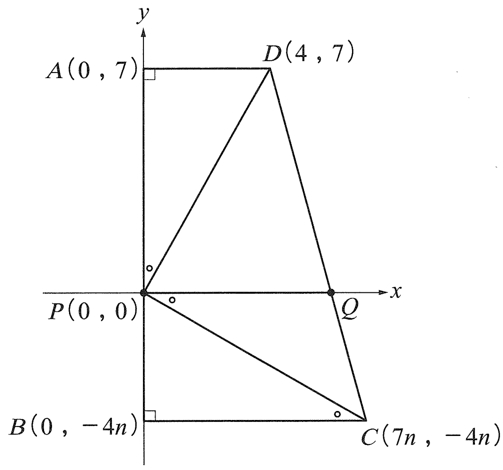
難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、選修數學乙(下)　第一章〈極限與函數〉

目標：相似形(坐標、垂直向量、分點公式)與數列極限

解析：(1)將圖形坐標化

令 $P(0,0)$，$A(0,7)$，$B(0,-4n)$，$C(7n,-4n)$，$D(4,7)$
因為 $\triangle PAD \sim \triangle CBP$ ($\because \angle A=\angle B$，$\angle APD=\angle PCB$)，　(1 分)
可得 $\overline{AD}=4$，$\overline{BC}=7n$。　(2 分)



(2)由(1)可得 $D(4,7)$，$C(7n,-4n)$，故向量 $\overrightarrow{PD}=(4,7)$，
$\overrightarrow{PC}=(7n,-4n)$　(1 分)
$\because \overline{QD}:\overline{QC}=\overline{PA}:\overline{PB}=7:4n$
$\therefore$ 由分點公式 $\overrightarrow{PQ}=\frac{4n}{4n+7}(4,7)+\frac{7}{4n+7}(7n,-4n)$
$=\left(\frac{65n}{4n+7},0\right)$　(1 分)

$\left(\text{或由 } \overleftrightarrow{CD}:(4n+7)x+(7n-4)y=65n\text{，求得 } Q\left(\frac{65n}{4n+7},0\right)\right)$

$\Rightarrow \overline{PQ}=\frac{65n}{4n+7}$，當 $n=1$ 時，$\overline{PQ}=\frac{65}{4+7}=\frac{65}{11}$。　(1 分)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{PQ}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{65n}{4n+7}$ (2 分) $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{65}{4+\frac{7}{n}}=\frac{65}{4}$。　(2 分)

二、(1) $q=1$ 時，有最大的獲勝機率；(2)可以，當 $p=0.6$ 時，甲贏的機率 $=0.4$ 為定值；(3)詳細數值參閱解析

難易度：難

出處：第四冊第三章〈矩陣〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：矩陣、(條件)機率計算

解析：計算甲贏的機率：$[q \quad 1-q]\begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\0.2 & 0.7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\1-p\end{bmatrix}=pq-0.5p-0.6q+0.7=(p-0.6)(q-0.5)+0.4$　(2 分)

(1)當 $p=0.5$ 時，乙贏的機率 $=1-(-0.1q+0.45)=0.1q+0.55 \leq 0.65$，當 $q=1$ 時有最大值 0.65。
所以乙固定選擇乙$_1$ 策略 $(q=1)$ 時，獲勝機率有最大值 0.65　(2 分)

(2)當 $p=0.6$ 時，甲贏的機率 $=0.4$ 為定值(3 分)
其他情況皆為 q 的函數：$(p-0.6)q-0.5p+0.7$ 不是常數。　(1 分)

(3)甲可以選擇 p 的方法如下表：

q 值	$q-0.5$ 的正負	甲贏的機率	最佳的 p 值	甲獲勝機率最大值	
$0 \leq q < 0.5$	$-$	$(p-0.6)(q-0.5)+0.4$	0	$0.7-0.6q>0.7-0.6\times0.5=0.4$	(1.5 分)
0.5	0	$(p-0.6)(q-0.5)+0.4$	任意值	0.4	(1 分)
$0.5<q \leq 1$	$+$	$(p-0.6)(q-0.5)+0.4$	1	$0.2+0.4q>0.2+0.4\times0.5=0.4$	(1.5 分)