

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(1)	(3)	(2)	(1)(5)	(2)(5)	(1)(3)	(1)(3)(4)(5)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (1)

比較 x^3 的係數，得 $a=1$

又 $g(-1)=-3=-c+1 \Rightarrow c=4$

$g(-2)=3=b \times (-2) \times (-1) + 4 \times (-2) + 1 \Rightarrow b=5$

$\therefore f(x)=x^2+5x+4$

$f(x)$ 與 x 軸的交點，可令 $f(x)=0 \Rightarrow x^2+5x+4=0 \Rightarrow (x+1)(x+4)=0 \Rightarrow x=-1$ 或 -4 則兩

交點為 $A(-1, 0)$ 、 $B(-4, 0)$ $\therefore AB=|(-1)-(-4)|=3$

故選(1)。

2. (3)

所求為 $\frac{6!}{2!}=360$ (種)

故選(3)。

3. (2)

解析：設經過 n 年，土壤才會到達安全標準

依題意 $3072 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{70}} \leq 48 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{70}} \leq \frac{48}{3072} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{70}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$\therefore 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{n}{70} \geq 6 \Rightarrow n \geq 420$

故選(2)。

二、多選題

4. (1)(5)

解析：(1) $\circ$ ： $\mu_x = \frac{40}{10} = 4$ ， $\mu_y = \frac{30}{10} = 3$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10 \mu_x \mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \mu_x^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10 \mu_y^2}} = \frac{170 - 10 \times 4 \times 3}{\sqrt{185 - 10 \times 4^2} \sqrt{190 - 10 \times 3^2}} = \frac{50}{50} = 1$$

$$(2) \times : \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10 \mu_y^2}{10}} = \sqrt{\frac{190 - 90}{10}} = \sqrt{10}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \mu_x^2}{10}} = \sqrt{\frac{185 - 160}{10}} = \sqrt{\frac{25}{10}}$$

$\therefore \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 2$ ，則迴歸直線的斜率為 $r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 1 \times 2 = 2$

(3) $\times$ ：令迴歸直線 $L: y=2x+\alpha$

$\therefore L$ 必過 $(\mu_x, \mu_y) \Rightarrow 3=2 \times 4 + \alpha \Rightarrow \alpha = -5$

$\therefore L: y=2x-5$ ，將 $(2, 2)$ 代入 $y=2x-5 \Rightarrow 2 \neq 2 \times 2 - 5$

故 $(2, 2)$ 不在迴歸直線上

(4) $\times$ ： $\because \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 2 \therefore \sigma_y > \sigma_x$

(5) $\circ$ ： $\sum_{i=1}^{10} (x-x_i)^2 = (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \cdots + (x-x_{10})^2$

當 $x = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 4$ 時， $\sum_{i=1}^{10} (x-x_i)^2$ 有最小值

故選(1)(5)。

5. (2)(5)

解析：(1)×：通過三點的多項式函數有無限多個

(2)○：∵三點不共線

∴所以可設通過此三點的最低次多項式為

$$f(x) = A(x-0)(x+1) + B(x+1)(x+2) + C(x-0)(x+2)$$

$$\text{由 } f(0) = 2B = 0 \Rightarrow B = 0, f(-1) = -C = 0 \Rightarrow C = 0, f(-2) = 2A = 4 \Rightarrow A = 2$$

$$\text{因此 } f(x) = 2(x-0)(x+1) = 2x^2 + 2x$$

(3)×： $f(x)$ 除以 $x(x+1)(x+2)$ 之餘式最多為二次式

$$\text{可令 } f(x) = x(x+1)(x+2)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$\text{由 } f(0) = c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f(-1) = a - b = 0, f(-2) = 4a - 2b = 4 \Rightarrow 2a - b = 2, \text{ 得 } a = 2, b = 2$$

故餘式為 $2x^2 + 2x$ 是二次式

(4)×： $f(1)$ 不一定是 4

(5)○：若 $f(x)$ 為實係數二次多項式，則 $f(x) = 2x^2 + 2x$ ∴ $f(2) = 12$

故選(2)(5)。

6. (1)(3)

$$\text{解析： } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2} = 19$$

$$(1) \bigcirc : \overrightarrow{AI} = \frac{7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{5+6+7} = \frac{7}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{18}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{7}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{18}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{7}{18}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{7}{18} \times 25 + \frac{5}{18} \times 19 = 15$$

$$(2) \times : \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \times 25 + \frac{1}{3} \times 19 = \frac{44}{3}$$

$$(3) \bigcirc : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{25}{2}$$

$$(4) \times : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{44}{3} - 15 = -\frac{1}{3}$$

$$(5) \times : \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{44}{3} - \frac{25}{2} = \frac{13}{6}$$

故選(1)(3)。

7. (1)(3)(4)(5)

$$\text{解析：依題意 } A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \\ 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(1) \bigcirc : (APA^{-1})^{49} = \underbrace{(APA^{-1})(APA^{-1}) \cdots (APA^{-1})(APA^{-1})}_{49 \text{ 個連乘}} = AP^{49}A^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{49} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{49} = A^{-1}(AP^{49}A^{-1})A = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -\frac{13}{5} & \frac{12}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

$$(2) \times : (APA^{-1})^{50} = \underbrace{(APA^{-1})(APA^{-1}) \cdots (APA^{-1})(APA^{-1})}_{50 \text{ 個連乘}} = AP^{50}A^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{50} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{50} = A^{-1}(AP^{50}A^{-1})A = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \bigcirc : MA = I \Rightarrow M = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(4) $\bigcirc : M$ 滿足轉移矩陣定義，故 M 為轉移矩陣

$$(5) \bigcirc : \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{3}{5}p + \frac{2}{5}(1-p) = p \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{4}{5}p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \quad \therefore X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

故選(1)(3)(4)(5)。

三、選填題

A. $\frac{5}{21}$

解析：依人數 2 人、2 人、3 人分成三組的方法有 $\frac{C_2^7 C_2^5 C_3^3}{2!} = \frac{21 \times 10 \times 1}{2} = 105$ (種)

2 位女生被安排在同一組的方法

① (女, 女), (男, 男), (男, 男, 男): $C_2^2 C_2^5 C_3^3 = 1 \times 10 \times 1 = 10$ (種)

② (男, 男), (男, 男), (女, 女, 男): $\frac{C_2^5 C_2^3 C_1^1 C_2^2}{2!} = \frac{10 \times 3 \times 1 \times 1}{2} = 15$ (種)

由①、②可知 2 位女生被安排在同一組的機率為 $\frac{10+15}{105} = \frac{25}{105} = \frac{5}{21}$ 。

B. 36

解析：在 95 % 信心水準下，信賴區間為 $\left[\hat{p} - 2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}}, \hat{p} + 2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} \right]$

①若 $\hat{p} = 0.34$ ，則 $0.34 + 0.0947 = 0.4347 < 0.45$ (不合)

②若 $\hat{p} = 0.35$ ，則 $0.35 + 0.0954 = 0.4454 < 0.45$ (不合)

③若 $\hat{p} = 0.36$ ，則 $0.36 + 0.096 = 0.456 > 0.45$ (合)

$\therefore \hat{p} = 0.36$ ，表示 100 位電訪民眾中，有 $100 \times 0.36 = 36$ 位支持執政黨，即可使 95 % 信心水準下的信賴區間能包含 45 %。

C. $\frac{19}{24}$

解析：
$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1, 4) \dots\dots\dots ① \\ 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (6, -3) \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

由②-①得 $\vec{a} - 2\vec{b} = (5, -7)$

$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = 5^2 + (-7)^2 = 74$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 74$

$\Rightarrow 25 - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + 4 \times 36 = 74$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{95}{4 \times 5 \times 6} = \frac{19}{24}$ 。

第貳部分：非選擇題

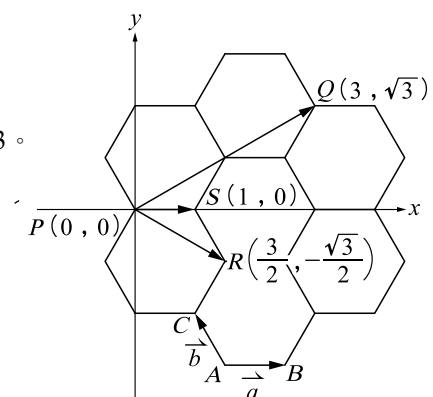
一、(1) 3 ; (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; (3) $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$; (4) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

解析：(1) 將圖形坐標化，令 $P(0, 0)$, $S(1, 0)$, $Q(3, \sqrt{3})$, $R\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

則 $\vec{PQ} = (3, \sqrt{3})$, $\vec{PR} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{PR} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$ 。

(2) $\triangle PQR$ 的面積為 $\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

(3) $\vec{PS} = \alpha \vec{PQ} + \beta \vec{PR} \Rightarrow (1, 0) = \alpha(3, \sqrt{3}) + \beta\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$



$$\begin{cases} 3\alpha + \frac{3}{2}\beta = 1 \\ \sqrt{3}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{3} \therefore \text{數對 } (\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)。$$

$$(4) \vec{a} = (1, 0), \vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \vec{PR} \text{ 在 } \vec{PQ} \text{ 上的正射影為 } \frac{\vec{PR} \cdot \vec{PQ}}{|\vec{PQ}|^2} \cdot \vec{PQ} = \frac{3}{12}(3, \sqrt{3}) = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{又 } \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = m(1, 0) + n\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow m = 1, n = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{數對 } (m, n) = \left(1, \frac{1}{2}\right)。$$

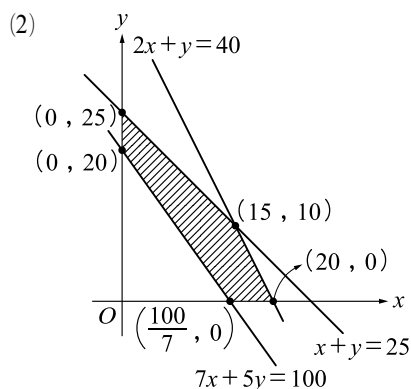
$$\text{二、(1) } \begin{cases} x+y \leq 25 \\ 7x+5y \geq 100 \\ 2x+y \leq 40 \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in Z \end{cases}, \text{目標函數 } f(x, y) = 4750 - 70x - 60y; (2) \text{圖略}; (3) \text{蘋果 13 箱, 水蜜桃 2 箱, 櫻桃}$$

10 箱, 最大淨利潤 3720 元

解析：(1) 假設錢老闆購買蘋果 x 箱, 水蜜桃 y 箱, 櫻桃 $(25-x-y)$ 箱

$$\text{則 } \begin{cases} x+y \leq 25 \\ 450x+550y+800(25-x-y) \leq 15000 \\ 30x+20y+10(25-x-y) \leq 650 \\ x \geq 0, y \geq 0, \text{且 } x, y \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \leq 25 \\ 7x+5y \geq 100 \\ 2x+y \leq 40 \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in Z \end{cases}$$

$$\text{目標函數 } f(x, y) = (600-450-30)x + (700-550-20)y + (1000-800-10)(25-x-y) \\ = 4750 - 70x - 60y。$$



可行解區域的頂點坐標為 $(0, 25), (0, 20), \left(\frac{100}{7}, 0\right), (20, 0), (15, 10)$, 但 x, y 需為整數解, 故

$\left(\frac{100}{7}, 0\right)$ 附近以 $(13, 2), (14, 1), (15, 0)$ 代入求最佳解

(3)	(x, y)	$(0, 25)$	$(0, 20)$	$(20, 0)$	$(15, 10)$	$(15, 0)$	$(14, 1)$	$(13, 2)$
	$f(x, y)$	3250	3550	3350	3100	3700	3710	3720

當 $x=13, y=2$ 時目標函數有最大值 3720

所以購買蘋果 13 箱, 水蜜桃 2 箱, 櫻桃 10 箱, 會有最大淨利潤 3720 元。