數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(2)	(1)	(4)	(1)(3)(4)	(2)(3)(5)	(1)(5)	(2)(3)(4)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值不等式

解析：$\because |x-a|\le b$ 的解為 $a-b\le x\le a+b$，且在範圍內的整數解有 7 個，而 a，b 皆為整數

$\therefore a+b=a+3 \Rightarrow b=3$，同理 $a=1$

$\therefore a+b=4$，故選(2)。

2. (1)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：相異物之組合

解析：小奇先選，有 4 人可和其對戰，接著小傑再選，有 4 人可和其對戰，然後是小酷，只剩 3 人可和其對戰，最後剩下 2 人直接對戰，所以共有 $4\times4\times3=48$ 種對戰組合，故選(1)。

3. (4)

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：期望值

解析：因猜拳、抽籤皆為公平的，因此以對稱性來看，兩人所得獎金的期望值應相同

又進行一次遊戲所得獎金的總期望值為

$$\frac{1}{9}\times100\times3+\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times(200+300+400+\cdots\cdots+900)\times2$$

$$+\frac{1}{9}\times200\times3+\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times(100+300+400+\cdots\cdots+900)\times2$$

$$+\frac{1}{9}\times300\times3+\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times(100+200+400+\cdots\cdots+900)\times2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{9}\times900\times3+\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times(100+200+300+\cdots\cdots+800)\times2$$

$$=\frac{1}{9}\times(100+200+300+\cdots\cdots+900)\times3+\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times[(100+200+300+\cdots\cdots+900)\times8]\times2$$

$$=1500+1000=2500$$

故甲所得獎金之期望值為 $2500\times\frac{1}{2}=1250$ 元

故選(4)。

二、多選題

4. (1)(3)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：餘式定理、因式定理、勘根定理、整係數一次因式檢驗法

解析：(1) ○：$\because 1^2 f(1)=3 \Rightarrow f(1)=3$　$\therefore f(x)$ 除以 $(x-1)$ 亦餘 3

(2) ╳：$\because f(x)=(x-2019)(x-2020)(x-2021)+1$　$\therefore f(2022)=7\neq1$

(3) ○：$\because f(x)$ 領導係數為 1 (正數)　$\therefore$存在一正數 t，使得 $f(t)>0$，又 $c<0 \Rightarrow f(0)=c<0$

$\therefore$由勘根定理得知：必存在一正實數 k 使得 $f(k)=0$

(4) ○：$\because f(x)=0$ 有兩正實根和一負實根，令 $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma<0 \Rightarrow f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\therefore f(x^2)=0$ 得 $x^2=\alpha$，β，$\gamma \Rightarrow x$ 有兩正實根，兩負實根和兩虛根

$\therefore$有四個實根

(5) ╳：反例：$a=-\frac{1}{4}$，$b=0$，$c=-7 \Rightarrow f(2)=0$，但 c 不是 2 的倍數

故選(1)(3)(4)。

5. (2)(3)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數律、對數律、首尾數

解析：(1) ╳：$\because ab=10^{0.5}=\sqrt{10}\approx 3.3<5$

(2) ○：$\because \sqrt{\dfrac{1}{10}\times\sqrt[3]{a^8}\times b}=\sqrt{10^{-1}\times 10^{0.8}\times 10^{0.2}}=1$

(3) ○：$\because \log_a b=\dfrac{0.2}{0.3}=\dfrac{2}{3}$，而 $\log_b a=\dfrac{0.3}{0.2}=\dfrac{3}{2}$ $\quad\therefore \log_a b<\log_b a$

(4) ╳：$\because a^{100}=10^{30}$ 為 31 位數

(5) ○：$\because a^{110}+b^{100}=10^{33}+10^{20}=10\cdots\cdots010\cdots\cdots0$，其中 2 個 1 各在第 21 位數與第 34 位數(奇數位和偶數位各有一個 1)，其他皆為 0

$\therefore a^{110}+b^{100}$ 為 11 的倍數

故選(2)(3)(5)。

6. (1)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：一維、二維數據分析

解析：(1) ○：因調整後的分數大於或等於原來的分數，且一定有一些同學的分數增加，故調整後的平均成績一定大於原來的平均成績

(2) ╳：不一定，若調整後的分數其增加量不多，則平均仍可能在 60 分以下。例如：原分數為 49 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、59 分，其平均在 59 和 60 分之間，調整後的分數為 50 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分、60 分，其平均仍不到 60 分

(3)(4) ╳：反例：有 2 個原分數為 31 分、80 分，則調整之後的分數為 40 分、80 分，其全距與標準差都比原來小

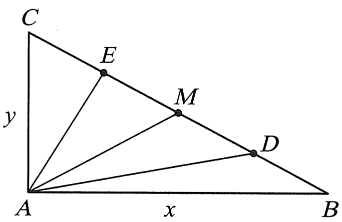
(5) ○：當 x 值增加時，對應的 y 值大致上也會增加，因此最適合直線的斜率必為正數

故選(1)(5)。

7. (2)(3)(4)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量分解、內積、柯西不等式



解析：(1) ╳：由分點公式知 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，

且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

故 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\dfrac{3}{16}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{10}{16}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{16}|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\dfrac{3}{16}x^2+\dfrac{3}{16}y^2=24\Rightarrow x^2+y^2=128$

(2) ○：因為 x、y 為正數，由算幾不等式得 $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\sqrt{x^2y^2}=xy\Rightarrow xy\leq 64$

故△ABC 的面積為 $\dfrac{1}{2}xy\leq\dfrac{1}{2}\times 64=32$，其面積最大值為 32，且等號成立於 $x=y=8$ 時

(3) ○：$\overline{BC}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$，所以 $\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=4\sqrt{2}$ 為定值

(4) ○：$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2-\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2=\dfrac{1}{4}(y^2-x^2)$

因 $x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=128$

故 $y^2-x^2>0-128=-128\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}>-32$

(5) ╳：因為 $x^2+y^2=128$，故由柯西不等式得

$(x^2+y^2)(1^2+1^2)\geq(x+y)^2\Rightarrow(x+y)^2\leq 256\Rightarrow x+y\leq 16$

又 $\overline{BC}$ 之值固定為 $8\sqrt{2}$，故周長的最大值為 $16+8\sqrt{2}$，且等號成立於 $x=y=8$ 時

故選(2)(3)(4)。

三、選填題

A. 0

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項不等式

解析：$\because f(1)=f(-3)=6$　$\therefore$此二次函數的圖形對稱軸為 $x=-1$

又 $f(x)\leq 0$ 的解為 $-2\leq x\leq k$

$\therefore k-(-1)=-1-(-2)\Rightarrow k=0$。

B. $\dfrac{5}{32}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：古典機率

解析：一週六天任意選擇路線的方式有 $2^6=64$ 種，而恰好只有兩天搭同一路線公車的方式有：

第 1、2 天，第 2、3 天，……，第 5、6 天這 5 種，且可以任選路線，故所求機率為 $\dfrac{5\times C_1^2}{64}=\dfrac{5}{32}$。

C. 37

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：兩平行線間的距離

解析：設 P 與這四條直線的距離都為 d，且 $L_1 // L_2$，$L_3 // L_4$

所以 L_1、L_2 的距離和 L_3、L_4 的距離都為 $2d\Rightarrow\dfrac{|13-(-19)|}{\sqrt{6^2+7^2}}=\dfrac{|5-k|}{\sqrt{9^2+(-2)^2}}\Rightarrow k=-27$ (不合)或 37。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $A=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\left(\text{或 } A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\right)$；(2)合理，說明略

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：轉移矩陣

解析：(1)設低所得轉為高所得的比率為 a，則高所得轉為低所得的比率為 $\frac{1}{3}a$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{3}a & a\\ \frac{1}{3}a & 1-a\end{bmatrix}\text{ 或 } A=\begin{bmatrix}1-a & \frac{1}{3}a\\ a & 1-\frac{1}{3}a\end{bmatrix}$$

$\because A^{-1}$ 不存在

$\therefore \det(A)=0\Rightarrow\left(1-\frac{1}{3}a\right)(1-a)-\frac{1}{3}a^2=0\Rightarrow a=\frac{3}{4}$

代入得 $A=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ 或 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$。

(2)設剛開始市民高所得比率為 x，則低所得比率為 $1-x$，即 $X_0=\begin{bmatrix}x\\ 1-x\end{bmatrix}$

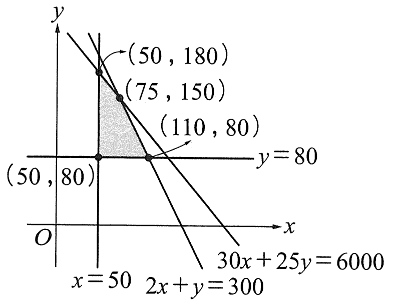
一年後所得 $X_1=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 1-x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$\therefore$不論剛開始條件為何，經過長時間後高所得比率皆為低所得比率的 3 倍，即人口數也是 3 倍，故合理。當 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$ 時同理。

二、(1) $\begin{cases} 30x+25y\le 6000 \\ x\ge 50，y\ge 80 \\ 2x+y\le 300 \\ x，y \text{ 為正整數} \end{cases}$，圖略；(2) $(x , y)=(75 , 150)$ 時，可得最大獲利 3750 元

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃



解析：(1) $\begin{cases} 30x+25y\le 6000 \\ x\ge 50，y\ge 80 \\ 2x+y\le 300 \\ x，y \text{ 為正整數} \end{cases}$，圖形如右。

(2)每賣出一份 A 套餐，可獲利 20 元

每賣出一份 B 套餐，可獲利 15 元

所以獲利的目標函數 $f(x , y)=20x+15y$，將圖中各頂點代入得

$f(50 , 80)=2200$，$f(110 , 80)=3400$，

$f(50 , 180)=3700$，$f(75 , 150)=3750$，

可知 $(x , y)=(75 , 150)$ 時，可得最大獲利 3750 元。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $A=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\left(\text{或 } A=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\right)$；(2)合理，說明略

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：轉移矩陣

解析：(1)設低所得轉為高所得的比率為 a，則高所得轉為低所得的比率為 $\frac{1}{3}a$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{3}a & a \\ \frac{1}{3}a & 1-a \end{bmatrix} \text{ 或 } A=\begin{bmatrix} 1-a & \frac{1}{3}a \\ a & 1-\frac{1}{3}a \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\because A^{-1} \text{ 不存在} \quad \therefore \det(A)=0 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{3}a\right)(1-a)-\frac{1}{3}a^2=0 \Rightarrow a=\frac{3}{4} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{代入得 } A=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ 或 } A=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}。 \quad (2 \text{ 分})$$

(2)設剛開始市民高所得比率為 x，則低所得比率為 $1-x$，即 $X_0=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$ (2 分)

$$\text{一年後所得 } X_1=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

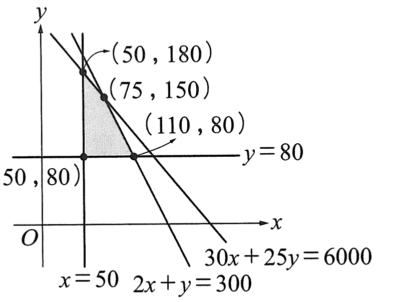
∴不論剛開始條件為何，經過長時間後高所得比率皆為低所得比率的 3 倍，即人口數也是 3 倍，故合理。當 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ 時同理。 (2 分)

二、(1) $\begin{cases} 30x+25y\le 6000 \\ x\ge 50，y\ge 80 \\ 2x+y\le 300 \\ x，y \text{ 為正整數} \end{cases}$，圖略；(2) $(x , y)=(75 , 150)$ 時，可得最大獲利 3750 元

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：(1) $\begin{cases} 30x+25y\le 6000 \ \ (1分) \\ x\ge 50 \ \ (1分)，y\ge 80 \ \ (1分) \\ 2x+y\le 300 \ \ (1分) \\ x，y 為正整數 \ \ (1分) \end{cases}$，圖形如右。



(3 分)

(2)每賣出一份 A 套餐，可獲利 20 元

每賣出一份 B 套餐，可獲利 15 元

所以獲利的目標函數 $f(x , y)=20x+15y$，將圖中各頂點代入得

$f(50 , 80)=2200$ (1 分)，$f(110 , 80)=3400$， (1 分)

$f(50 , 180)=3700$ (1 分)，$f(75 , 150)=3750$， (1 分)

可知$(x , y)=(75 , 150)$時，可得最大獲利 3750 元。 (2 分)