# 臺北區高中 108 學年度第二學期指定科目
# 第二次模擬考數學乙

RB673

**第壹部分：選擇題（占 74 分）**

**一、單選題（占 18 分）**

1. 設 $x$ 為正實數，已知 $2^{x-5}=5^{2-x}$，則 $x$ 的值最接近下列哪一個選項？（ $\log 2\approx 0.3010$ ）
   (1)1　(2)2　(3)3　(4)4　(5)5 。

2. 平面上兩向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ ，其長度皆為 2 且其內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-3$ 。
   若存在實數 $m$ 、 $n$ （ $n\neq 0$ ）使得 $(m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$ ，
   則 $\dfrac{m}{n}$ 的值是下列哪一個選項？(1) $-\dfrac{3}{4}$　(2) $-\dfrac{3}{2}$　(3) 0　(4) $\dfrac{3}{2}$　(5) $\dfrac{3}{4}$ 。

3. 某遊戲共有三關，第 $n$ 關（ $n=1$ ， 2 ， 3 ）的規則為玩家同時擲 $n+1$ 枚均勻硬幣一次，
   若擲出的所有硬幣皆為正面或皆為反面，則莊家付給玩家獎金 $5\times 4^{n}$ 元，
   否則玩家要付出 80 元給莊家。
   試問玩家玩這個遊戲一次（三關皆玩）贏錢的期望值為下列哪一個選項？
   (1) $-100$ 元　(2) $-30$ 元　(3) 60 元　(4) 70 元　(5) 180 元。

**二、多選題（占 32 分）**

4. 若實數 $x$ 的不等式 $(2x-1)\left(2x^{2}+ax+2\right)\geq 0$ 的解為 $x\geq\dfrac{1}{2}$ ，
   則實數 $a$ 的值可能為下列哪些選項？(1) $-5$　(2) $-4$　(3) 0　(4) 4　(5) 5 。

5. 設實係數多項式 $f(x)$
   除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式為 $r_1(x)$ ；除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $r_2(x)$ 。
   已知 $\deg f(x)\geq 3$ 且 $r_1(x)\neq r_2(x)$ ，試選出正確的選項。
   (1) $r_1(3)=r_2(3)$　(2) $r_1(2)=r_2(2)$
   (3) $r_1(1)=r_2(1)$　(4) $\deg\left(r_1(x)-r_2(x)\right)=1$
   (5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式可能是 0 。

6. 有一筆資料，共有 $n$ 個數據，已知這些數據都是四位整數且每個數據的千位數字、
   百位數字、十位數字與個位數字恰為各出現兩次的相異數字 $A$ 、 $B$ ，
   其中 $A$ 、 $B$ 為 1 到 8 的相異正整數（例如資料中有 1881 、 2233 、 5858 ，
   但沒有 1001 、 5599 、 6668 、 7777 ），下列關於此資料的描述，試選出正確的選項。
   (1) $n=192$　(2)全距為 7755　(3) 5 的倍數個數 $\leq\dfrac{n}{5}$
   (4) 11 的倍數個數 $\leq\dfrac{n}{11}$　(5) 121 的倍數個數 $\leq\dfrac{n}{121}$ 。

7. 方程式$x+2^{-x}=2$恰有兩實根$\alpha_1<\alpha_2$，
而方程式$x+\log_{\frac{1}{2}}x=2$也恰有兩實根$\beta_1<\beta_2$，
試選出正確的選項。
(1)$\alpha_1+\beta_1=2$　(2)$\alpha_1+\beta_2=2$　(3)$\alpha_2+\beta_1=2$
(4)$\alpha_2+\beta_2=2$　(5)$\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2=4$。

**三、選填題（占 24 分）**

A. 數學教師從所有學生中隨機選出40名男學生及60名女學生做新教材的測驗，
每一位學生都要應考，且成績只有「及格」或「不及格」，結果有14名男學生不及格。
假設學生的「性別」與「成績」為獨立事件，則女學生有________人及格。

B. 某實驗室發明一種試劑用以檢測人是否感染某種病毒。
已知感染此病毒的人經此試劑檢測後，有85%顯示已被感染，但15%顯示未被感染；
而未感染此病毒的人經此試劑檢測後，有95%顯示未被感染，但5%顯示已被感染。
此實驗檢測後發現全體受測者的誤判率（即偵測錯誤的比率）為6.25%，
則受測者中，實際感染此病毒的比率為________。（化成最簡分數）

C. 平面上$\Delta ABC$中，頂點坐標為$A(3,0)$，$B(-1,-2)$，$C(x,y)$。
若三角形重心$G$為直線$L$上的動點，且$L$平行$\overleftrightarrow{AB}$並通過點$(9,0)$，
則頂點$C$軌跡為直線：$\begin{cases} x=5+ht \\ y=k+4t \end{cases}$，$t$為實數，則常數數對$(h,k)=$________。

**第貳部分：非選擇題（占 26 分）**

1. 已知一線性規劃作業中，符合限制條件的可行解區域，為下列坐標平面上6點：
$A(0,2)$，$B(1,0)$，$C(3,1)$，$D(s,t)$，$E(3,5)$，$F(1,4)$
所圍成的凸六邊形及其內部。

若點$Q(x,y)$在可行解區域內，令$\overrightarrow{OQ}=h\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$（$O$為原點），
且線性規劃問題的目標函數為$P=h+k$。試求：

(1)將目標函數寫成$P=ax+by+c$的形式。（其中$a$、$b$、$c$為常數）

(2)小明利用頂點法求(1)小題的目標函數的最大值時，
只計算了$A$、$B$、$C$、$E$、$F$五個頂點坐標，
若五個數值中最大數值恰等於$P$在可行解區域內的最大值，
則小明求得的最大值發生在這5個頂點的哪一個？最大值為何？

(3)後來小明正確的將6個頂點坐標帶入第(1)小題的目標函數計算，
發現在第(2)小題求出的頂點和頂點$D$有相同的最大值。
若$D$點在某直線上，則此直線方程式為何？
其中$D$點$x$坐標（變數$s$）的範圍為何？

2. 數學老師使用圓球和不透明球袋做機率實驗。
球只有黑白兩色，袋中裝有3顆球。對這袋球做如下操作：
自袋中隨機移走2球後（每顆球被移出的機率相等），再移入2顆跟移出相反的球：
也就是若移出2白球，則移入2黑球；
若移出1白1黑球，則移入1黑1白球；
若移出2黑球，則移入2白球。
今老師準備了3顆白球和3顆黑球，並將其中1白2黑共3顆球放入袋中，並開始操作。
試問：

(1)經過第1次操作後，袋中還是1顆白球2顆黑球的機率是多少？

(2)每次操作後袋中的球可能會出現哪些狀態？
試寫出描述此操作的轉移矩陣，並求出穩定狀態之機率。

(3)設第$n$次操作時，移出的2球顏色相同的機率為$p_n$，
求出$p_1$、$p_2$之值與計算$\lim\limits_{n\to\infty} p_n$之極限值。

**RB673** 臺北區高中 108 學年度第二學期指定科目第二次模擬考數學乙
參考答案

第壹部分：1.(3) 2.(5) 3.(1) 4.(2)(3) 5.(1)(4) 6.(2)(3) 7.(2)(3)(5)

A. 39 B. $\frac{1}{8}$ C. $(8,-8)$

第貳部分：一、(1) $P=x+\frac{y}{2}$ (2) $E$ 點有最大值 $\frac{11}{2}$ (3) $2x+y=11$，$3<s<\frac{23}{5}$

二、(1) $\frac{2}{3}$ (2)「1 白 2 黑」和「3 白」，$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$，穩定狀態 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(3) $p_1=\frac{1}{3}$，$p_2=\frac{5}{9}$，$\lim\limits_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{2}$