台北區高中 109 年 (108 學年度) 高三下第二次指考模擬考數學 (社會組) (108-B4) 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 設 x 為正實數，已知 $2^{x-5}=5^{2-x}$，則 x 的值最接近下列哪一個選項？（ $\log 2\approx 0.3010$ ）
(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5 。

答：(3)

解： $\log 2^{x-5}=\log 5^{2-x}\Rightarrow (x-5)\log 2=(2-x)\log 5$
$\Rightarrow (\log 2+\log 5)x=2\log 5+5\log 2\Rightarrow x=\log 800\fallingdotseq 3$

2. 平面上兩向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$，其長度皆為 2 且其內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-3$。
若存在實數 m、n（ $n\neq 0$ ）使得 $\left(m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}\right)\perp\overrightarrow{a}$，
則 $\dfrac{m}{n}$ 的值是下列哪一個選項？
(1) $-\dfrac{3}{4}$　(2) $-\dfrac{3}{2}$　(3) 0　(4) $\dfrac{3}{2}$　(5) $\dfrac{3}{4}$ 。

答：(5)

解： $\left(m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{a}=2^2\,m-3n=0\Rightarrow\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{4}$

3. 某遊戲共有三關，第 n 關（ $n=1$，2，3 ）的規則為玩家同時擲 $n+1$ 枚均勻硬幣一次，
若擲出的所有硬幣皆為正面或皆為反面，則莊家付給玩家獎金 5×4^n 元，
否則玩家要付出 80 元給莊家。
試問玩家玩這個遊戲一次（三關皆玩）贏錢的期望值為下列哪一個選項？
(1) -100 元　(2) -30 元　(3) 60 元　(4) 70 元　(5) 180 元。

答：(1)

解：第 n 關贏（同面）之機率 $\dfrac{2}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2^n}$，輸之機率 $1-\dfrac{1}{2^n}$

A	① 贏	① 輸	A	② 贏	② 輸	A	③ 贏	③ 輸
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	P	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
\$	20	-80	\$	80	-80	\$	320	-80

$E(X_{①})=-30$，$E(X_{②})=-40$，$E(X_{③})=-30$，
$E(X)=E(X_{①}+X_{②}+X_{③})=(-30)+(-40)+(-30)=-100$

二、多選題（占 32 分）

4. 若實數x的不等式$(2x-1)\left(2x^2+ax+2\right)\ge 0$的解為$x\ge\frac{1}{2}$，
則實數a的值可能為下列哪些選項？
(1)-5　(2)-4　(3)0　(4)4　(5)5。

答：(2)(3)

解：將選項代入可得

(1) ×：$(2x-1)\left(2x^2-5x+2\right)=(2x-1)^2(x-2)\ge 0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$或$x\ge 2$

(2) ○：$(2x-1)\left(2x^2-4x+2\right)=2(2x-1)(x-1)^2\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$

(3) ○：$(2x-1)\left(2x^2+2\right)\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$

(4) ×：$(2x-1)\left(2x^2+4x+2\right)=2(2x-1)(x+1)^2\ge 0\Rightarrow x=-1$或$x\ge\frac{1}{2}$

(5) ×：$(2x-1)\left(2x^2+5x+2\right)=(2x-1)(2x+1)(x+2)\ge 0\Rightarrow -2\le x\le -\frac{1}{2}$，$x\ge\frac{1}{2}$

5. 設實係數多項式$f(x)$
除以$(x-1)(x-3)$的餘式為$r_1(x)$；除以$(x-2)(x-3)$的餘式為$r_2(x)$。
已知$\deg f(x)\ge 3$且$r_1(x)\ne r_2(x)$，試選出正確的選項。
(1)$r_1(3)=r_2(3)$　(2)$r_1(2)=r_2(2)$
(3)$r_1(1)=r_2(1)$　(4)$\deg\left(r_1(x)-r_2(x)\right)=1$
(5)$f(x)$除以$(x-1)(x-2)(x-3)$的餘式可能是0。

答：(1)(4)

解：$f(x)=(x-1)(x-3)Q_1(x)+r_1(x)$，故$f(x)-(x-1)(x-3)Q_1(x)=r_1(x)$

$f(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+r_2(x)$，故$f(x)-(x-2)(x-3)Q_2(x)=r_2(x)$

令$R(x)=r_1(x)-r_2(x)=-(x-3)\left[(x-1)Q_1(x)-(x-2)Q_2(x)\right]$，

因為$R(x)$可能為一次多項式或常數多項式，且$R(3)=0$，又$r_1(x)\ne r_2(x)$

$\Rightarrow$可確定$R(x)$是一次多項式，所以多項式$R(x)=a(x-3)$，$a\ne 0$

(1) ○：$f(3)=r_1(3)=r_2(3)$

(2) ×：$R(2)=r_1(2)-r_2(2)=-a\ne 0$，故$r_1(2)\ne r_2(2)$

(3) ×：$R(1)=r_1(1)-r_2(1)=-2a\ne 0$，故$r_1(1)\ne r_2(1)$

(4) ○：$\deg R(x)=1$

(5) ×：若$f(x)$除以$(x-1)(x-2)(x-3)$的餘式為0，則$f(1)=f(2)=f(3)=0$

其中$f(1)=f(3)=0\Rightarrow r_1(1)=r_1(3)=0\Rightarrow r_1(x)=0$

（因$r_1(x)$是一次或常數多項式）

同理$f(2)=f(3)=0\Rightarrow r_2(2)=r_2(3)=0\Rightarrow r_2(x)=0$

（因$r_2(x)$是一次或常數多項式）

與題目給的條件$r_1(x)\neq r_2(x)$矛盾，因此餘式不可能是0

6. 有一筆資料，共有n個數據，已知這些數據都是四位整數且每個數據的千位數字、百位數字、十位數字與個位數字恰為各出現兩次的相異數字A、B，其中A、B為1到8的相異正整數（例如資料中有1881、2233、5858，但沒有1001、5599、6668、7777），下列關於此資料的描述，試選出正確的選項。
(1)$n=192$　(2)全距為7755　(3)5的倍數個數$\leq\frac{n}{5}$　(4)11的倍數個數$\leq\frac{n}{11}$
(5)121的倍數個數$\leq\frac{n}{121}$。

答：(2)(3)

解：四位整數可分為三類（$A=1\sim8$，$B=1\sim8$，$A\neq B$）：

① $AABB=11(100A+B)$，為11的倍數
② $ABAB=101(10A+B)$，不是11的倍數
③ $ABBA=1001A+110B=11(91A+10B)$，為11的倍數

若$100A+B$是11的倍數$(A+B=11)$，則
$(A,B)=(3,8)$，$(4,7)$，$(5,6)$，$(6,5)$，$(7,4)$，$(8,3)$
若$91A+10B$是11的倍數，相當於$3A-B$是11的倍數，則
$(A,B)=(1,3)$，$(2,6)$，$(4,1)$，$(5,4)$，$(6,7)$，$(8,2)$
整理表格如下：

類別	$AABB$	$ABAB$	$ABBA$	合計
個數	8×7	8×7	8×7	168
5的倍數	$7\times1(B=5)$	$7\times1(B=5)$	$1\times7(A=5)$	21
11的倍數	56	0	56	112
121的倍數	6	0	6	12

(1) ×：共有$8\times7\times3=168$
(2) ○：全距為$8877-1122=7755$
(3) ○：5的倍數有$21<\frac{168}{5}$
(4) ×：11的倍數有$112>\frac{168}{11}$
(5) ×：121的倍數有$12>\frac{168}{121}$

7. 方程式$x+2^{-x}=2$恰有兩實根$\alpha_1<\alpha_2$，
而方程式$x+\log_{\frac{1}{2}}x=2$也恰有兩實根$\beta_1<\beta_2$，
試選出正確的選項。
(1)$\alpha_1+\beta_1=2$　(2)$\alpha_1+\beta_2=2$　(3)$\alpha_2+\beta_1=2$　(4)$\alpha_2+\beta_2=2$
(5)$\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2=4$。

答：(2)(3)(5)

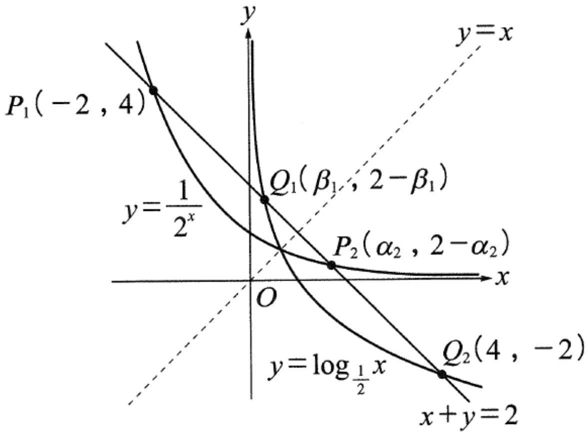
解：$y=2^{-x}$ 與 $y=-x+2$ 交於 $\left(\alpha_1,-\alpha_1+2\right)=\left(-2,4\right)$、$\left(\alpha_2,-\alpha_2+2\right)$

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 與 $y=-x+2$ 交於 $\left(\beta_1,-\beta_1+2\right)$、$\left(\beta_2,-\beta_2+2\right)=\left(4,-2\right)$

$y=2^{-x}$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 互為反函數，

$y=x$ 與 $y=-x+2$ 交於 $\left(1,1\right)$

故 $\dfrac{\alpha_1+\beta_2}{2}=\dfrac{\alpha_2+\beta_1}{2}=1$



三、選填題（占24分）

A. 數學教師從所有學生中隨機選出40名男學生及60名女學生做新教材的測驗，
每一位學生都要應考，且成績只有「及格」或「不及格」，結果有14名男學生不及格。
假設學生的「性別」與「成績」為獨立事件，則女學生有________人及格。

答：39

解：

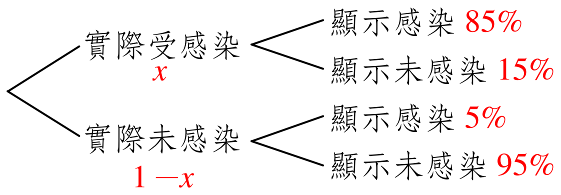
	及格	不及格
男	26	14
女	x	$60-x$

$\xrightarrow{\text{獨立}}\dfrac{26}{x}=\dfrac{14}{60-x}\Rightarrow x=39$

B. 某實驗室發明一種試劑用以檢測人是否感染某種病毒。
已知感染此病毒的人經此試劑檢測後，有85%顯示已被感染，但15%顯示未被感染；
而未感染此病毒的人經此試劑檢測後，有95%顯示未被感染，但5%顯示已被感染。
此實驗檢測後發現全體受測者的誤判率（即偵測錯誤的比率）為6.25%，
則受測者中，實際感染此病毒的比率為________。（化成最簡分數）

答：$\dfrac{1}{8}$

解：



誤判率：$x\times15\%+\left(1-x\right)\times5\%=6.25\%\Rightarrow x=0.125=\dfrac{1}{8}$

C. 平面上 ΔABC 中，頂點坐標為 $A\left(3,0\right)$，$B\left(-1,-2\right)$，$C\left(x,y\right)$。
若三角形重心 G 為直線 L 上的動點，且 L 平行 $\overleftrightarrow{AB}$ 並通過點 $\left(9,0\right)$，

則頂點C軌跡為直線：$\begin{cases} x=5+ht \\ y=k+4t \end{cases}$，$t$為實數，則常數數對$(h,k)=$________。

答：$(8,-8)$

解：$G\in L$：$\begin{cases} x=9+2s \\ y=0+s \end{cases}$，$s\in R$，而$A(3,0)$，$B(-1,-2)$

故$C\begin{cases} x=25+6s=5+ht \\ y=2+3s=k+4t \end{cases}\Rightarrow h=8$，$k=-8$

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

1. 已知一線性規劃作業中，符合限制條件的可行解區域，為下列坐標平面上6點：
$A(0,2)$，$B(1,0)$，$C(3,1)$，$D(s,t)$，$E(3,5)$，$F(1,4)$
所圍成的凸六邊形及其內部。
若點$Q(x,y)$在可行解區域內，令$\overrightarrow{OQ}=h\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$（$O$為原點），
且線性規劃問題的目標函數為$P=h+k$。試求：
(1)將目標函數寫成$P=ax+by+c$的形式。（其中a、b、c為常數）
(2)小明利用頂點法求(1)小題的目標函數的最大值時，
只計算了A、B、C、E、F五個頂點坐標，
若五個數值中最大數值恰等於P在可行解區域內的最大值，
則小明求得的最大值發生在這5個頂點的哪一個？最大值為何？
(3)後來小明正確的將6個頂點坐標帶入第(1)小題的目標函數計算，
發現在第(2)小題求出的頂點和頂點D有相同的最大值。
若D點在某直線上，則此直線方程式為何？
其中D點x坐標（變數s）的範圍為何？

答：(1) $P=x+\dfrac{y}{2}$　(2) E點有最大值$\dfrac{11}{2}$　(3) $2x+y=11$，$3<s<\dfrac{23}{5}$

解：(1) $(x,y)=h(0,2)+k(1,0)=(k,2h)\Rightarrow p=h+k=\dfrac{y}{2}+x$

(2)

	$A(0,2)$	$B(1,0)$	$C(3,1)$	$E(3,5)$	$F(1,4)$
$x+\dfrac{y}{2}$	1	1	$\dfrac{7}{2}$	$\dfrac{11}{2}$ (Max)	3

(3) $f(D)=f(E)=\dfrac{11}{2}\Rightarrow\overleftrightarrow{DE}$：$x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{11}{2}$（即$2x+y=11$）

又$\overleftrightarrow{BC}$：$x-2y=1$，與$\overleftrightarrow{DE}$交於$H\left(\dfrac{23}{5},\dfrac{9}{5}\right)$

因為限制範圍為凸六邊形，故D在$\overline{EH}$上（不含端點）

故$3<s<\dfrac{23}{5}$

2. 數學老師使用圓球和不透明球袋做機率實驗。
球只有黑白兩色，袋中裝有3顆球。對這袋球做如下操作：
自袋中隨機移走2球後（每顆球被移出的機率相等），再移入2顆跟移出相反的球：

也就是若移出2白球，則移入2黑球；

若移出1白1黑球，則移入1黑1白球；

若移出2黑球，則移入2白球。

今老師準備了3顆白球和3顆黑球，並將其中1白2黑共3顆球放入袋中，並開始操作。

試問：

(1)經過第1次操作後，袋中還是1顆白球2顆黑球的機率是多少？

(2)每次操作後袋中的球可能會出現哪些狀態？

試寫出描述此操作的轉移矩陣，並求出穩定狀態之機率。

(3)設第n次操作時，移出的2球顏色相同的機率為p_n，

求出p_1、p_2之值與計算$\lim\limits_{n\to\infty} p_n$之極限值。

答：(1)$\frac{2}{3}$ (2)「1白2黑」和「3白」，$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$，穩定狀態$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

(3) $p_1=\frac{1}{3}$，$p_2=\frac{5}{9}$，$\lim\limits_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{2}$

解：

1白2黑 — 移1白1黑（加1白1黑）— 1白2黑 $P=\frac{C_1^1C_1^2}{C_2^3}=\frac{2}{3}$

1白2黑 — 移2黑（加2白）— 3白 $P=\frac{C_2^2}{C_2^3}=\frac{1}{3}$

3白 — 移2白（加2黑）— 1白2黑 $P=\frac{C_2^3}{C_2^3}=1$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x+y=1 \\ 3y=x \end{cases}\Rightarrow x=\frac{3}{4}\text{，}y=\frac{1}{4}$$

$p_1=\frac{1}{3}$，$p_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{5}{9}$

$$\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{2}$$