

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
答案	(3)	(4)	(3)	(3)(4)(5)	(1)(3)(5)	(1)(4)(5)	(1)(4)(5)	(1)(3)	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數律

$$\text{解析：(1) } \frac{Y'}{Y} = \frac{A(2K)^\alpha L^{1-\alpha}}{AK^\alpha L^{1-\alpha}} = 2^\alpha (\text{倍})$$

$$(2) \frac{Y'}{Y} = \frac{AK^\alpha (2L)^{1-\alpha}}{AK^\alpha L^{1-\alpha}} = 2^{1-\alpha} (\text{倍})$$

$$(3) \frac{Y'}{Y} = \frac{A(2K)^\alpha (2L)^{1-\alpha}}{AK^\alpha L^{1-\alpha}} = 2^\alpha \cdot 2^{1-\alpha} = 2 (\text{倍})$$

$$(4) \frac{Y'}{Y} = \frac{A(2K)^\alpha \left(\frac{L}{2}\right)^{1-\alpha}}{AK^\alpha L^{1-\alpha}} = 2^\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} = 2^{2\alpha-1} (\text{倍})$$

$$(5) \frac{Y'}{Y} = \frac{A(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^{1-\alpha}}{AK^\alpha L^{1-\alpha}} = \lambda^\alpha \cdot \lambda^{1-\alpha} = \lambda (\text{倍})$$

故選(3)。

2. (4)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率、獨立事件

解析：∵“第四次出現么點”與“前三次都出現么點”為獨立事件

$$\therefore P(\text{第四次出現么點} \mid \text{前三次都出現么點}) = P(\text{第四次出現么點}) = \frac{1}{6}$$

故選(4)。

3. (3)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：加法原理、乘法原理

解析：數字 2 緊接數字 1 的右邊：12□□ → 10×10=100 種

□12□ → 10×10=100 種

□□12 → 10×10=100 種

重複計算者：1212 → 1 種

∴數字 2 緊接數字 1 的右邊有 100+100+100-1=299 種

故(數字 2 不能緊接數字 1 的右邊)=(任意)-(數字 2 緊接數字 1 的右邊)

$$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 - 299 = 9701$$

故選(3)。

二、多選題

4. (3)(4)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：轉移矩陣

$$\text{解析：(1) } \times : A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \times : \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} p_4 \\ q_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \dots \therefore A^4 \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_5 \\ q_5 \end{bmatrix}$$

$$(3) \circ : A^5 \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = A^3 \left(A^2 \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \right) = A^3 \begin{bmatrix} p_4 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

(4) ○：設穩定狀態為 $\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{2}{3}p + \frac{1}{2}(1-p) = p \Rightarrow p = \frac{3}{5}$$

$$(5) \text{ ○} : \det(A) = \frac{1}{6} \quad \therefore A^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{6}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

故選(3)(4)(5)。

5. (1)(3)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：迴歸直線

$$\text{解析：(1) ○} : \mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{n} = \frac{6000}{100} = 60$$

$$(2) \times : \mu_y = \frac{\sum_{i=1}^{100} y_i}{n} = \frac{7000}{100} = 70$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i y_i - n \cdot \mu_x \cdot \mu_y}{\sum_{i=1}^{100} x_i^2 - n \cdot \mu_x^2} = \frac{360000 - 100 \cdot 60 \cdot 70}{480000 - 100 \cdot 60^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{迴歸直線為 } y - 70 = -\frac{1}{2}(x - 60) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 100$$

$$(3) \text{ ○} : \text{令 } x = 50 \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2} \cdot 50 + 100 = 75 \text{ (萬輛)}$$

$$(4) \times (5) \text{ ○} : M = xy = x \left(-\frac{1}{2}x + 100 \right) = -\frac{1}{2}x^2 + 100x = -\frac{1}{2}(x - 100)^2 + 5000$$

當 $x = 100$ 時， $M_{\max} = 5000$ (萬萬元) = 5000 (億元)

故選(1)(3)(5)。

6. (1)(4)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：位數與首尾數

解析：(1) ○： $A = F_0 \times F_1 \times F_2 \times F_3 \times F_4 \times F_5$

$$\begin{aligned} &= (2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) \\ &= (2 - 1)(2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) \\ &\quad \vdots \\ &= 2^{64} - 1 \\ &= [2^{(2^6)} + 1] - 2 = F_6 - 2 \end{aligned}$$

$$(2) \times : \log A = \log(2^{64} - 1) \approx \log 2^{64} = 64 \log 2 \approx 64 \times 0.3010 = 19.264 = 19 + 0.264$$
$$\therefore n = 19 + 1 = 20$$

$$(3) \times : \text{承(2)，尾數} = 0.264 = \log 1. \dots \Rightarrow a = 1$$

$$(4) \text{ ○} : \because F_6 = A + 2 \text{ 為 } 20 \text{ 位數且 } F_5 \text{ 遠小於 } F_6, \text{ 可以省略}$$
$$\therefore F_5 + F_6 \text{ 之和為 } 20 \text{ 位數}$$

$$(5) \text{ ○} : \log \frac{F_6}{F_7} = \log \frac{2^{64} + 1}{2^{128} + 1} \approx \log \frac{2^{64}}{2^{128}} = \log 2^{-64} = -64 \log 2 = -19.264 = -20 + 0.736$$

\therefore 小數點後第 20 位始不為零

故選(1)(4)(5)。

7. (1)(4)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：平均數、中位數、標準差及其平移伸縮

解析：(1) ○：A 號：2 次

B 號：4 次

(2) ×：誤差如右表

A、B 號誤差平均值均為 +1

(3) ×：將誤差排序

A：-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4

B：-8, -6, 0, 0, 0, 0, 4, 5, 7, 8

A、B 號誤差中位數分別為 +1、0

(4) ○：∵ A 號公車誤差較 B 號集中

∴ A 號公車標準差較 B 號小

(5) ○：∵ A 號公車新誤差為原誤差減 1

B 號公車新誤差為原誤差減 2

∴ 平移不影響標準差

∴ A 號公車標準差仍較 B 號小

故選(1)(4)(5)。

誤差	A 號公車	B 號公車
第一天	+2	0
第二天	0	-6
第三天	-1	-8
第四天	+3	+5
第五天	+4	+8
第六天	+1	0
第七天	-1	+4
第八天	+1	+7
第九天	0	0
第十天	+1	0

8. (1)(3)

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：常態分布

解析：(1) ○：∵ 95% 的送貨時間與 μ 相差不超過 9.4 分鐘

∴ $2\sigma = 9.4 \Rightarrow \sigma = 4.7$

(2) ×：∵ 16% 的送貨時間超過 24.7 分鐘

∴ $\mu + \sigma = 24.7$ ，又 $\sigma = 4.7 \Rightarrow \mu = 20$

(3) ○：95% ÷ 2 + 68% ÷ 2 = 81.5%

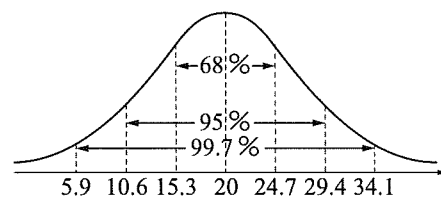
(4) ×：僅能說“有可能”，非“絕不”

(5) ×：若送貨時間超過 k 分鐘占 $\frac{3}{2000} = 0.15\%$ ，則 $k = 34.1$

若折價券不超過 3 張，則 $k \geq 34.1$

故最小整數 k 值為 35

故選(1)(3)。



三、選填題

A. $\frac{22}{9}$

出處：選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

目標：無窮等比級數和

解析：∵ $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}$ ∴ $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} \Rightarrow \langle a_n \rangle$ 為等比數列

$$a_1 = 0.2 = \frac{2}{9}, a_2 = 0.20 = \frac{20}{99},$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{20}{99}}{\frac{2}{9}} = \frac{10}{11}$$

$$\text{故無窮等比級數和 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{10}{11}} = \frac{22}{9}.$$

B. (-6, 42)

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

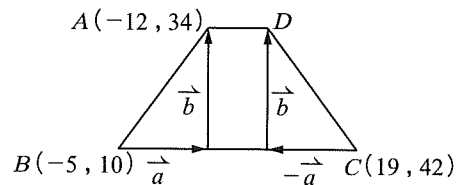
目標：向量的線性組合與分解、正射影

解析： $\vec{BA} = (-7, 24)$, $\vec{BC} = (24, 32) // (3, 4)$

$$\begin{aligned}\vec{BA} \text{ 在 } (3, 4) \text{ 上的正射影 } \vec{a} &= \frac{(-7, 24) \cdot (3, 4)}{3^2 + 4^2} (3, 4) \\ &= \frac{75}{25} (3, 4) = (9, 12)\end{aligned}$$

如右圖， $\vec{b} = \vec{BA} - \vec{a} = (-7, 24) - (9, 12) = (-16, 12)$

$$\begin{aligned}\therefore D &= C + (-\vec{a}) + \vec{b} = (19, 42) + (-9, -12) + (-16, 12) \\ &= (-6, 42) \circ\end{aligned}$$



C. 63

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：期望值、二項分布

解析：甲獲勝情況有三種：二 三 四 五 (圈起來部分要排列)

$$\text{甲 甲} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{甲 乙 甲} \Rightarrow C_1^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$\text{甲 乙 乙 甲} \Rightarrow C_1^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

$$P(\text{甲贏}) = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{4}{27} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore P(\text{乙贏}) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

故甲應付給乙 $81 \times \frac{1}{9} = 9$ 元，乙應付給甲 $81 \times \frac{8}{9} = 72$ 元

兩相抵銷，乙應付給甲 $72 - 9 = 63$ 元。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $a=16, b=0, c=0, d=-2, e=5$; (2) $46\sqrt[3]{3}+5$; (3) $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 0$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：綜合除法、複數、恆正、高次不等式

解析：(1)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 16 & +32 & +24 & +6 & +5 & \\ \hline & -8 & -12 & -6 & +0 & \\ \hline 16 & +24 & +12 & +0 & +5 & \\ \hline & -8 & -8 & -2 & & \\ \hline 16 & +16 & +4 & & -2 & \\ \hline & -8 & -4 & & & \\ \hline 16 & +8 & & & +0 & \\ \hline & -8 & & & & \\ \hline 16 & & & & +0 & \end{array}$$

$$\therefore a=16, b=0, c=0, d=-2, e=5$$

$$(2) \text{ 由(1)得, } f(x) = 16\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 5$$

$$f\left(-\frac{1}{2} + \sqrt[3]{3}\right) = 16(\sqrt[3]{3})^4 - 2(\sqrt[3]{3}) + 5 = 48\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + 5 = 46\sqrt[3]{3} + 5$$

$$(3) f(x) > 5 \Rightarrow 16\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 5 > 5$$

$$\begin{aligned} \text{令 } A = x + \frac{1}{2} \Rightarrow 16A^4 - 2A > 0 &\Rightarrow A(8A^3 - 1) > 0 \\ &\Rightarrow A\{(2A)^3 - 1^3\} > 0 \\ &\Rightarrow A(2A - 1)(4A^2 + 2A + 1) > 0 \end{aligned}$$

$\because 4A^2 + 2A + 1$ 之平方項係數 4 為正，且判別式 $D = 2^2 - 4 \times 4 \times 1 = -12 < 0$ $\therefore 4A^2 + 2A + 1$ 恆正

$$\begin{aligned} \text{兩邊} \div (4A^2 + 2A + 1), \text{得 } A(2A - 1) > 0 &\Rightarrow A < 0 \text{ 或 } A > \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow x + \frac{1}{2} < 0 \text{ 或 } x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{故 } x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 0$$

二、每日組裝 iPhone、Asus 各 30、20 臺時，有最大獲利 9200 元

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：截距式、線性規劃

解析：設每日組裝 iPhone、Asus 各 x 、 y 臺 ($x, y \in N \cup \{0\}$)

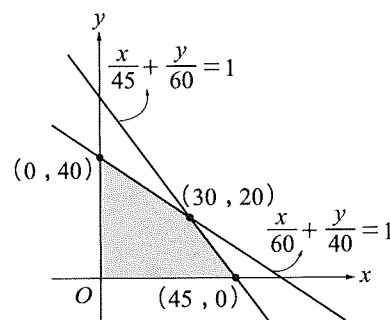
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ \frac{x}{45} + \frac{y}{60} \leq 1 \\ \frac{x}{60} + \frac{y}{40} \leq 1 \end{cases}$$

目標函數：最大化獲利 = $200x + 160y$

可行解區域作圖如右

(x, y)	$(0, 0)$	$(45, 0)$	$(30, 20)$	$(0, 40)$
$200x + 160y$	0	9000	9200	6400

每日組裝 iPhone、Asus 各 30、20 臺時，有最大獲利 9200 元



非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $a=16, b=0, c=0, d=-2, e=5$; (2) $46\sqrt[3]{3} + 5$; (3) $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 0$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：綜合除法、複數、恆正、高次不等式

解析：(1)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 16 & +32 & +24 & +6 & +5 & -\frac{1}{2} \\ & -8 & -12 & -6 & +0 & \\ \hline 16 & +24 & +12 & +0 & +5 & \\ & -8 & -8 & -2 & & \\ \hline 16 & +16 & +4 & -2 & & \\ & -8 & -4 & & & \\ \hline 16 & +8 & +0 & & & \\ & -8 & & & & \\ \hline 16 & +0 & & & & \end{array}$$

(3 分)

$$\therefore a=16, b=0, c=0, d=-2, e=5 \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得, } f(x) = 16\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 5 \quad (1 \text{ 分})$$

$$f\left(-\frac{1}{2} + \sqrt[3]{3}\right) = 16(\sqrt[3]{3})^4 - 2(\sqrt[3]{3}) + 5 = 48\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + 5 = 46\sqrt[3]{3} + 5 \quad (2 \text{ 分})$$

$$(3) f(x) > 5 \Rightarrow 16\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 5 > 5$$

$$\text{令 } A = x + \frac{1}{2} \Rightarrow 16A^4 - 2A > 0 \Rightarrow A(8A^3 - 1) > 0$$

$$\Rightarrow A[(2A)^3 - 1^3] > 0$$

$$\Rightarrow A(2A-1)(4A^2+2A+1) > 0 \quad (1 \text{ 分})$$

$\because 4A^2+2A+1$ 之平方項係數 4 為正，且判別式 $D=2^2-4 \times 4 \times 1 = -12 < 0$ $\therefore 4A^2+2A+1$ 恆正 (1 分)

$$\text{兩邊} \div (4A^2+2A+1), \text{ 得 } A(2A-1) > 0 \Rightarrow A < 0 \text{ 或 } A > \frac{1}{2} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} < 0 \text{ 或 } x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\text{故 } x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 0 \quad (1 \text{ 分})$$

二、每日組裝 iPhone、Asus 各 30、20 臺時，有最大獲利 9200 元

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：截距式、線性規劃

解析：設每日組裝 iPhone、Asus 各 x 、 y 臺 ($x, y \in N \cup \{0\}$) (1 分)

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ \frac{x}{45} + \frac{y}{60} \leq 1 \\ \frac{x}{60} + \frac{y}{40} \leq 1 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

目標函數：最大化獲利 = $200x + 160y$ (1 分)

可行解區域作圖如右

(x, y)	$(0, 0)$	$(45, 0)$	$(30, 20)$	$(0, 40)$
$200x + 160y$	0	9000	9200	6400

(2 分)

每日組裝 iPhone、Asus 各 30、20 臺時，有最大獲利 9200 元 (1 分)

