

全國公私立 109 學年度指定科目第 7 次聯合模擬考試數學乙(南一版)



第壹部分：選擇題（占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 試求無窮數列 $\left\langle \frac{0.2^{2n} + 0.5^{-4n+2}}{2^{4n} + 5^{n+1}} \right\rangle$ 的極限值為下列何者？

- (1) 0 (2) $\frac{1}{20}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{3}{5}$ (5) 1

2. 設 a, b 是已知實數， A 是一個 2×2 階矩陣且 2×1 階矩陣 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ 滿足下列式：

$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ ，若分別用 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$ 代入 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 經上面式子運算後，得到的 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 分別為 $\begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 52 \\ 37 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 72 \\ 57 \end{bmatrix}$ 。則當上式經過運算後得 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ 的值為 $\begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix}$ 時， $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的值為何？

- (1) $\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

3. 有一電影推薦網站將影片內容分別依下列各項類型給予 0~10 的分數，如果影片內容十分符合該項類型的特徵，則給 10 分，如果幾乎無此項類型的特徵，則給 0 分。下表(1)為針對過往影片做出各項類型的特徵值評估：

表(1)

特徵項目 特徵值 影片名稱	愛情友情	世代相處	跨國文化	武器出現	飛車追逐
復仇者同盟	5	6	5	10	4
1977	5	2	7	8	2
雪中奇緣	9	3	2	1	1
神隱特務	4	8	2	7	7
最大的槍	6	4	3	6	3

若我們定義任兩部影片的 D 值為「各項特徵值差平方和的平方根」，例如：「雪中奇緣」與「1977」這兩部影片的 D 值為

$$\sqrt{(9-5)^2 + (3-2)^2 + (2-7)^2 + (1-8)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{92}。$$

若 D 值愈大，則稱這兩影片的相似度愈低；若 D 值愈小，則稱兩影片的相似度愈高。現在有一新上擋的影片「捍衛工作」，其各項類型的特徵值如下表(2)：

下表(2)

影片名稱	愛情友情	世代相處	跨國文化	武器出現	飛車追逐
捍衛工作	3	4	6	8	5

根據上述的評分資料，試問表(1)中的五部影片中，與「捍衛工作」相似度最高的是哪一部？

- (1) 復仇者同盟 (2) 1977 (3) 雪中奇緣 (4) 神隱特務 (5) 最大的槍

二、多選題 (占 32 分)

4. 給定兩向量 $\vec{a} = (4, 7)$ 與 $\vec{b} = (3, 2)$ 。若向量 $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ ，其中 \vec{u} 與 \vec{b} 平行，且 \vec{v} 與 \vec{b} 垂直。試選出正確的選項。
- (1) $\vec{u} = 2\vec{b}$ (2) $\vec{v} = (-2, 3)$ (3) $\vec{u} - \vec{v} = -\vec{a}$
(4) $\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ (5) $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{a}|^2$
5. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數且 $f(x) = 0$ 有兩相異實根。試選出正確的選項。
- (1) $f(x^2) = 0$ 恰有四相異實根 (2) 若 $f(x^2) = 0$ 有重根，則 $f(0) = 0$
(3) 若 $f(x)$ 的圖形為開口向上，則 $f(x) - 1 = 0$ 沒有實根
(4) 若 $f(x) - 1 = 0$ 沒有實根，則 $f(x)$ 的圖形為開口向下
(5) 若 $f(x) - 1 = 0$ 有實根，則 $f(x) + 1 = 0$ 有兩相異實根
6. 設 $a = \log_{0.2} 0.7, b = \log_{0.2} 7, c = \log_{0.3} 0.7, d = \log_{0.3} 7$ ，試選出正確的選項。
- (1) $a > 0$ (2) $b < 0$ (3) $a < b$ (4) $a > c$ (5) $ad > bc$
7. 班上有 8 位同學要分工完成 A, B, C 三個不同主題的專題報告，每個人都會被分配到一個主題，且分到同一個主題的同學要一起完成報告。下列哪些敘述何者是正確？
- (1) 若主題 A, B, C 分別需要 4 人、3 人、1 人完成，則有 280 種分法
(2) 若主題 A, B, C 分別需要 3 人、3 人、2 人完成，則有 280 種分法
(3) 若 8 位同學分成 3 人、3 人、2 人三組，每組各選一個主題，則有 280 種分法
(4) 若 8 位同學分成 3 人、3 人、2 人三組，每組各選一個主題，且其中甲、乙兩位是學霸一定要在不同組，則有 210 種分法
(5) 若學霸甲選主題 A 、學霸乙選主題 B ，其餘 6 位同學平均分配做這三個主題，則有 90 種分法

三、選填題 (占 24 分)

- A. 設 O 為二階零方陣，給兩個非零的二階方陣 A, B ，已知 $A = \begin{bmatrix} 6 & b \\ a & c \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c 是整數。且滿足 $A + B = O$ 與 $AB = O$ 兩個條件，求此時矩陣 A 有_____個。
- B. 若袋中有紅、白、黑三種顏色的球，已知白球、黑球各有 3 顆，且每一顆球被取出的機會均等。若從袋中隨機取出 2 球，取出紅球個數的期望值為 1 顆，則隨機取出的兩球中有取到紅球的機率為_____。(化為最簡分數)
- C. 設指數函數 $f(x) = (3^x)^x$ ，已知實數 a, b 滿足 $f(3a) \times f(2b) = 729$ ，試問直線 $3ax - 2by = 6$ 與兩坐標軸所圍成之三角形面積的最小值為_____。

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

一、有一家公司有兩位業務員，分別是資深業務員和新進業務員，資深業務員外出一天拜訪客戶可以創造 4 萬元業績，新進業務員外出一天拜訪客戶可以創造 2 萬元業績。試問：

- (1) 若每天都恰有一位業務員外出，且公司設定目標想在 20 天時，恰好達到 70 萬元的業績，則資深業務員和新進業務員分別需要外出多少天？（5 分）
- (2) 已知資深業務員的一日外出津貼為 4000 元，新進業務員的一日外出津貼為 1200 元，若每天最多有一位業務員外出，且公司設定要在 100 天內達到至少 350 萬元的業績，則公司最多要付出多少外出津貼給兩位業務員？（8 分）

二、坐標平面上有一隻螞蟻從原點出發，用擲一顆公正骰子決定螞蟻的移動方式：若骰子擲出黑色點數(即 2 或 3 或 5 或 6 點)，螞蟻就向 x 軸正向移動 1 單位，若是擲出紅色點數(即 1 或 4 點)，螞蟻就向 y 軸正向移動 1 單位。試回答下列各問題。

- (1) 今擲 n 次之後，螞蟻移到 $(m, n-m)$ 之機率為 $p_n(m)$ ，其中 $0 \leq m \leq \frac{n}{2}$ ，求

$p_2(1), p_3(1), p_4(2)$ 的值。（9 分）

- (2) 設骰子擲 n 次期間，螞蟻僅在直線 $y = x$ 上或在直線 $y = x$ 左側區域範圍內移動的機率為 P_n ，例如：

P_1 代表擲 1 次的結果為向上走一格 移到點 $(0,1)$ 的機率，所以 $P_1 = \frac{1}{3}$ 。

P_2 代表擲 2 次的結果為向上兩格移到 $(0,2)$ 或先向上一格再向右一格移到 $(1,1)$ 的機率，所以 $P_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 。

試求 P_3 為何？（4 分）

**RB675 全國公私立 109 學年度指定科目第 7 次聯合模擬考試數學乙
(南一版) 參考答案**

選擇題：1. (3) 2. (4) 3. (1) 4. (1)(2)(4)(5) 5. (2)(4) 6. (1)(2) 7. (1)(5)

選填題：A. 18 B. $\frac{17}{22}$ C. 6

非選擇題：一、(1) 資深業務員需外出 15 天，而新進業務員需外出 5 天；
(2) 最多需付出的外出津貼為 400000 元。

二、(1) $p_2(1) = \frac{4}{9}, p_3(1) = \frac{2}{9}, p_4(2) = \frac{8}{27}$ (2) $\frac{5}{27}$