

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	4	1	1245	24	12	15	1	8	1	7	2	2	6

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 將原式化簡得，

$$\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{2^{4n+2}}}{16^n + 5 \times 5^n} = \frac{\frac{1}{25} + 2^{4n-2}}{16^n + 5 \times 5^n} = \frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{4} \times 16^n}{16^n + 5 \times 5^n}$$

$$= \frac{(\frac{1}{400})^n + \frac{1}{4}}{1 + 5 \times (\frac{5}{16})^n},$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{400})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{5}{16})^n = 0,$$

$$\text{因此, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.2^{2n} + 0.5^{-4n+2}}{2^{4n} + 5^{n+1}} = \frac{0 + \frac{1}{4}}{1 + 5 \times 0} = \frac{1}{4},$$

故選(3)。

2. 由題目敘述知，

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix};$$

$$A \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 37 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix};$$

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 57 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

$$\text{因此, } A \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \Rightarrow 20A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{解得 } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \frac{1}{2 \times 2 - 1 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{若 } A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix},$$

$$\text{則 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \left(\begin{bmatrix} 50 \\ 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix},$$

故選(4)。

3. 計算各影片與「捍衛工作」的 D^2 值

影片名稱	愛情 友情	世代 相處	跨國 文化	武器 出現	飛車 追逐	D^2
復仇者同盟	2	2	-1	2	-1	14
1977	2	-2	1	0	-3	18
雪中奇緣	6	-1	-4	-7	-4	118
神隱特務	1	4	-4	-1	2	38
最大的槍	3	0	-3	-2	-2	26

故選(1)。

二、多選題

$$4. (1) \bigcirc: \vec{u} = \vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 上的正射影} = \left(\frac{4 \times 3 + 7 \times 2}{3^2 + 2^2} \right) \vec{b}$$

$$= 2 \vec{b} = (6, 4).$$

$$(2) \bigcirc: \vec{v} = \vec{a} - \vec{u} = (4, 7) - (6, 4) = (-2, 3).$$

$$(3) \times: \vec{u} - \vec{v} = (6, 4) - (-2, 3) = (8, 1).$$

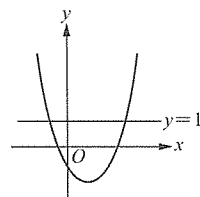
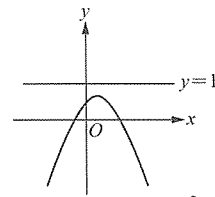
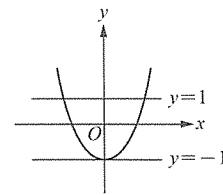
$$(4) \bigcirc: \text{因為 } \vec{u} \parallel \vec{b} \text{ 且 } \vec{v} \perp \vec{b}, \text{ 所以 } \vec{u} \perp \vec{v},$$

$$\text{故得 } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0,$$

$$\text{因此 } \vec{a} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ = 0 + |\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2.$$

$$(5) \bigcirc: |\vec{a}|^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2.$$

故選(1)(2)(4)(5)。

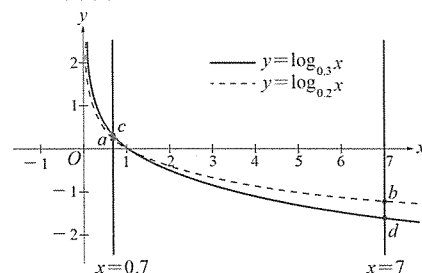
5. (1) \times : 反例: 若 $f(x) = x(x-1)$, 則 $f(x^2) = x^2(x^2-1)$, 此時, $f(x^2) = 0$ 的解為 ± 1 與 0 的二重根。(2) \bigcirc : 若 $f(x^2) = 0$ 有重根, 則 $f(x) = 0$ 的兩實根中必有一根為 0, 所以 $f(0) = 0$ 。(3) \times : 因為 $f(x) = 0$ 有兩相異實根, 表示 $f(x)$ 與 x 軸 ($y=0$) 有兩個交點, 若 $f(x)$ 的圖形為開口向上, 且 $y=1$ 在 $y=0$ 的上方, 則 $f(x)$ 與 $y=1$ 也有兩個交點, 即 $f(x)=1$ 有兩個相異實根, 故 $f(x)-1=0$ 有兩個相異實根。(4) \bigcirc : 因為 $f(x) = 0$ 有兩相異實根且 $f(x)-1=0$ 沒有實根, 表示 $f(x)$ 的圖形與 x 軸 ($y=0$) 有兩個交點且與 $y=1$ 不相交, 因此, $f(x)$ 的圖形為開口向下。(5) \times : 反例: 若 $f(x) = x^2 - 1$, 則 $f(x) - 1 = 0$ 有實根, 但是 $f(x) + 1 = 0$ 有重根。

故選(2)(4)。

6. 分別做 $y = \log_{0.2} x$ 與 $y = \log_{0.3} x$ 的圖形, 觀察兩圖形與鉛直線 $x=0.7$ 及 $x=7$ 的交點 y 坐標, 得到 $c > a > 0 > b > d$ 。

$$\text{又 } ad = \frac{\log 0.7}{\log 0.2} \times \frac{\log 7}{\log 0.3} = \frac{\log 7}{\log 0.2} \times \frac{\log 0.7}{\log 0.3} = bc.$$

故選(1)(2)。



7. (1) $\bigcirc: C_4^8 \times C_3^4 \times C_1^1 = 280$ 。
 (2) $\times: C_3^8 \times C_3^5 \times C_2^2 = 560$ 。
 (3) $\times: \frac{C_3^8 \times C_3^5 \times C_2^2}{2!} \times 3! = 1680$ 。
 (4) \times : 依甲、乙兩人的組別人數分類討論：
 ①兩人都在3人組： $C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 \times 3! = 540$ 。
 ②兩人有一人在2人組： $2 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_3^1 \times 3! = 720$ 。
 由①②知，共有1260種分組方式。
 (5) $\bigcirc: C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 = 90$ 。
 故選(1)(5)。

三、選填題

A. 因為 $A+B=O$ ，所以 $B=-A$ 。

$$\Rightarrow AB = -A^2 = O, \text{ 即 } A^2 = O$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 36+ab & 6b+bc \\ 6a+cc & ab+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{兩矩陣相等，各元素亦同} \begin{cases} 36+ab=0 & \cdots \cdots ① \\ b(6+c)=0 & \cdots \cdots ② \\ a(6+c)=0 & \cdots \cdots ③ \\ ab+c^2=0 & \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

② \times ③得 $ab(6+c)^2=0 \Rightarrow 6+c=0$ ，即 $c=-6$ ，

又 $ab=-36$ 而36的因數有18個，

所以 (a, b) 的解有18組，

故滿足條件的 A 矩陣有18個。

B. 設袋中有紅球 x 顆，則隨機取出兩球的情形有下表三種：

抽中紅球的個數	0	1	2
機率	$\frac{C_2^6}{C_2^{x+6}}$	$\frac{C_1^6 \times C_1^x}{C_2^{x+6}}$	$\frac{C_2^x}{C_2^{x+6}}$

由期望值的定義，知 $1 = 2 \times \frac{C_2^x}{C_2^{x+6}} + 1 \times \frac{C_1^x C_1^6}{C_2^{x+6}}$ ，

即 $x^2 - x - 30 = 0$ ，解得 $x=6$ 或 -5 (不合)，

故兩球中有取到紅球的機率為

$$\frac{C_1^6 \times C_1^6}{C_2^{12}} + \frac{C_2^6}{C_2^{12}} = \frac{36+15}{66} = \frac{17}{22}.$$

C. 因為 $3ax-2by=6$ 的 x 截距為 $\frac{2}{a}$ ， y 截距為 $-\frac{3}{b}$ ，

所以 $3ax-2by=6$ 與兩坐標軸所圍成的三角形面積為

$$\frac{1}{2} \times \left| \frac{2}{a} \times \left(-\frac{3}{b} \right) \right| = \frac{3}{|ab|},$$

$$\text{又 } f(3a) \times f(2b) = (3^{3a})^{3a} \times (3^{2b})^{2b} = 729$$

$$\Rightarrow 3^{9a^2+4b^2} = 729 = 3^6, \text{ 因此, } 9a^2+4b^2=6,$$

$$\text{設面積 } \frac{3}{|ab|} = k \Rightarrow b^2 = \frac{9}{a^2 k^2}, \text{ 代入 } 9a^2+4b^2=6 \text{ 中,}$$

$$\text{得 } 9a^2+4 \times \frac{9}{a^2 k^2} = 6 \Rightarrow 9k^2(a^2)^2 - 6k^2(a^2) + 36 = 0,$$

因為 a 是實數，所以判別式

$$D = (6k^2)^2 - 4 \times 9k^2 \times 36 \geq 0 \Rightarrow k^2(k^2 - 36) \geq 0$$

$$\Rightarrow k^2 \leq 0 \text{ (不合) 或 } k^2 \geq 36$$

$$\Rightarrow k \leq -6 \text{ (不合) 或 } k \geq 6,$$

故三角形的面積有最小值為6。

第貳部分：非選擇題

一、(1) 資深業務員需外出15天，而新進業務員需外出5天；

(2) 最多需付出的外出津貼為400000元。

【詳解】

設資深業務員外出 x 天、新進業務員外出 y 天，

(1) 由題設敘述，可得下列方程式

$$x+y=20 \text{ 與 } 4x+2y=70, \text{ (2分)}$$

$$\text{解得 } x=15, y=5. \text{ (1分)}$$

故想在20天時，恰好達到70萬元的業績，

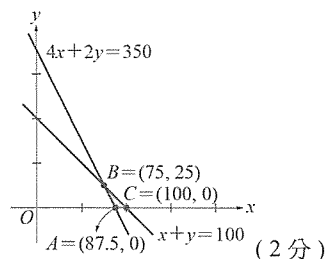
則資深業務員需外出15天，

而新進業務員需要外出5天。(2分)

(2) 由題敘條件，可得下列限制：

$$\begin{cases} 0 \leq x+y \leq 100 \\ 4x+2y \geq 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ (2分)}$$

作圖得可行解區域如下圖。



而目標函數為外出津貼

$$f(x, y) = 4000x + 1200y \text{ 元, (1分)}$$

f 將各頂點代入求值，如下表：

x	75	100	87	88
y	25	0	1	0
$f(x, y)$	330000	400000	349200	352000
		最大值		(2分)

故在達成公司目標時，公司最多需付出的外出津貼為400000元。(給1分)

$$\text{二、(1) } p_2(1) = \frac{4}{9}, p_3(1) = \frac{2}{9}, p_4(2) = \frac{8}{27}; \text{ (2) } \frac{5}{27}.$$

【詳解】

擲一顆公正骰子，出現黑色點數的機率 $\frac{C_1^4}{C_1^6} = \frac{2}{3}$ ，

出現紅色點數的機率為 $\frac{C_1^2}{C_1^6} = \frac{1}{3}$ 。

(1) ① 擲2次的結果是一紅一黑(即(紅,黑)或(黑,紅))，使螞蟻移到(1,1)的機率為

$$p_2(1) = C_1^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}. \text{ (3分)}$$

② 擲3次的結果是二紅一黑時，使螞蟻移到(1,2)的

$$\text{機率為 } p_3(1) = C_2^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}. \text{ (3分)}$$

③ 擲4次的結果是二紅二黑時，使螞蟻移到(2,2)的

$$\text{機率為 } p_4(2) = C_2^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}. \text{ (3分)}$$

(2) 丟擲骰子3次，滿足題目條件的走法只有「上上上」、「上右上」、「上上右」三種。(2分)

$$\text{所以 } P_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{27}. \text{ (2分)}$$