數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.			
答案	(4)	(2)	(3)	(2)(3)	(1)(3)(4)(5)	(2)(3)(5)			

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：相關係數的基本概念

解析：由題圖可知，大部分的日期中，X 增加，Y 也跟著增加，X 減少，Y 也跟著減少

$\therefore X$，Y 為正相關

又 X，Y 不在一直線上 $\Rightarrow r_{X,Y}\neq 1$　$\therefore$ 即 $0<r_{X,Y}<1$

故選(4)。

2. (2)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的定義及運算性質、指數式的大小比較

解析：$2^x=3\Rightarrow x=\log_2 3=\log_{2^6}3^6=\log_{64}729$

$4^y=7\Rightarrow y=\log_4 7=\log_{4^3}7^3=\log_{64}343$

$8^z=19\Rightarrow z=\log_8 19=\log_{8^2}19^2=\log_{64}361$

$\therefore x>z>y$

故選(2)。

〈另解〉

$2^x=3\Rightarrow 2^{6x}=3^6=729$

$2^{2y}=7\Rightarrow 2^{6y}=7^3=343$

$2^{3z}=19\Rightarrow 2^{6z}=19^2=361$

$\because 2^{6x}>2^{6z}>2^{6y}$ 且 $y=2^x$ 為遞增函數

$\therefore x>z>y$

故選(2)。

3. (3)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：除法原理與餘式定理的應用

解析：由除法原理可設

$(1+x)^7=(x^2-1)Q(x)+(ax+b)=(x+1)(x-1)Q(x)+(ax+b)$

令 $x=1$ 代入，得 $2^7=a+b$…………………①

令 $x=-1$ 代入，得 $0=-a+b$ ……………②

由①、②得 $a=b=64$

$\therefore (1+x)^7=(x+1)(x-1)Q(x)+(64x+64)$

令 $x=0$ 代入，得 $1=1\cdot(-1)\cdot Q(0)+64\Rightarrow Q(0)=63$

故選(3)。

二、多選題

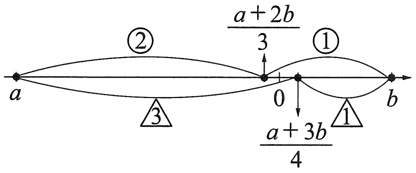
4. (2)(3)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：利用分點公式比較實數大小

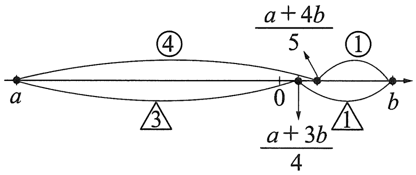
解析：$\because \dfrac{a+3b}{4}>\dfrac{a+2b}{3}$

$\therefore \dfrac{a+3b}{4}-\dfrac{a+2b}{3}>0\Rightarrow \dfrac{3a+9b-4a-8b}{12}>0\Rightarrow b>a$

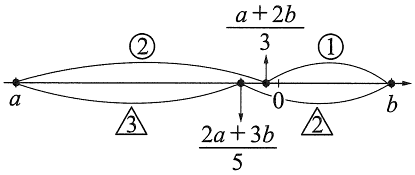


(1) ╳：$a<0$

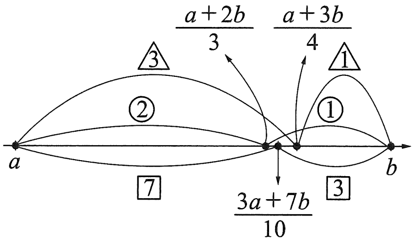
(2) ○：$b>0$

(3) ○：

$\dfrac{a+4b}{5}>\dfrac{a+3b}{4}>0$

(4) ╳：

$\dfrac{2a+3b}{5}<\dfrac{a+2b}{3}<0$

(5) ╳：

$\dfrac{a+2b}{3}<\dfrac{3a+7b}{10}<\dfrac{a+3b}{4}$，無法確定正負

故選(2)(3)。

5. (1)(3)(4)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的乘法運算、反方陣的概念及應用

解析：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$

$\Rightarrow\begin{cases} ae+bg=1 \\ af+bh=0 \\ ce+dg=0 \\ cf+dh=1 \end{cases}$ 且 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

(1) ○：$ae+bg=cf+dh=1$

(2) ╳：$[c \quad d]\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=[ce+dg \quad cf+dh]=[0 \quad 1]$

(3) ○：$\because \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，故 $ae+cf=1$

(4) ○：$\begin{cases} ex+fy=0 \\ gx+hy=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow I\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\Rightarrow x=b$，$y=d$

(5) ○：$\because \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$\therefore \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列運算}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & e & f \\ 0 & 1 & g & h \end{array}\right]$，

即$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

故選(1)(3)(4)(5)。

6. (2)(3)(5)

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：能經由機率的計算求得隨機變數的期望值與變異數

解析：(1) ╳：$P(X=1)=\dfrac{C_1^6\times C_2^5\times C_2^3}{C_3^6\times C_3^6}=\dfrac{6\times10\times3}{20\times20}=\dfrac{180}{400}=\dfrac{9}{20}<\dfrac{1}{2}$

(2) ○：$P(X=2)=\dfrac{C_2^6\times C_1^4\times C_1^3}{C_3^6\times C_3^6}=\dfrac{15\times4\times3}{20\times20}=\dfrac{180}{400}=\dfrac{9}{20}<\dfrac{1}{2}$

(3) ○：$P(X=0)=\dfrac{C_3^6\times C_3^3}{C_3^6\times C_3^6}=\dfrac{20\times1}{20\times20}=\dfrac{20}{400}=\dfrac{1}{20}$

$P(X=3)=\dfrac{C_3^6\times1}{C_3^6\times C_3^6}=\dfrac{20\times1}{20\times20}=\dfrac{20}{400}=\dfrac{1}{20}$

$\therefore P(X=0)=P(X=3)$

(4) ╳：$E(X)=1\times\dfrac{9}{20}+2\times\dfrac{9}{20}+3\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{9+18+3}{20}=\dfrac{30}{20}=\dfrac{3}{2}$

(5) ○：$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$=\left(1^2\times\dfrac{9}{20}+2^2\times\dfrac{9}{20}+3^2\times\dfrac{1}{20}\right)-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$=\dfrac{9+36+9}{20}-\dfrac{9}{4}=\dfrac{54-45}{20}=\dfrac{9}{20}<\dfrac{1}{2}$

故選(2)(3)(5)。

三、選填題

A. $\dfrac{-24}{5}$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線斜率的基本概念

解析：L_1：$mx+4y-2=0\Rightarrow$ 斜率 $m_1=-\dfrac{m}{4}$

L_2：$5x-2y+n=0\Rightarrow$ 斜率 $m_2=-\dfrac{5}{-2}=\dfrac{5}{2}$

$\because L_1\perp L_2\quad\therefore m_1\times m_2=-1\Rightarrow -\dfrac{m}{4}\times\dfrac{5}{2}=-1\Rightarrow m=\dfrac{8}{5}$

$\because(1,p)$ 在直線 L_1：$mx+4y-2=0$ 上

$\therefore\dfrac{8}{5}+4p-2=0\Rightarrow p=\dfrac{1}{10}$

又 $(1,p)=\left(1,\dfrac{1}{10}\right)$在直線 L_2：$5x-2y+n=0$ 上

$\therefore 5-2\times\dfrac{1}{10}+n=0\Rightarrow n=-\dfrac{24}{5}$

故 $n=\dfrac{-24}{5}$。

B. 432

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：排列與組合概念的綜合應用

解析：數字相異的三位數共有 $9\times9\times8=648$ 個

其中數字和為 9 的分為以下兩類計算：

(1) $1+8$，$2+7$，$3+6$，$4+5$：

①含 0：$4\times\overset{百}{2}\times\overset{十}{2}\times\overset{個}{1}=16$ 個

②不含 0：$4\times C_1^7\times\overset{百}{3}\times\overset{十}{2}\times\overset{個}{1}=168$ 個

(2) $9+0$：$C_1^8\times\overset{百}{2}\times\overset{十}{2}\times\overset{個}{1}=32$ 個

故滿足條件的三位數共有 $648-16-168-32=432$ 個。

C. 6

出處：選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

目標：數列極限的意義、無窮等比級數的總和

解析：設 $A_n(a_n\,,\,a_n)$，$B_n(b_n\,,\,2b_n)$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}A_n=(3\,,\,3)$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=1+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^{n-2}}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=1+3=4$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}B_n=(4\,,\,8)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3&3\\4&8\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot12=6$。

D. $-3\le k\le3$，但 $k\ne\frac{9}{5}$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：能利用平行線法判斷線性規劃問題的最佳解

解析：令目標函數 $f(x\,,\,y)=x+y$

在點 $A(-1\,,\,1)$ 處有最小值，則 $f(-1\,,\,1)=0$

且直線 $x+y=0$ 通過點 A

在點 $B(4\,,\,2)$ 處有最大值，則 $f(4\,,\,2)=6$

且直線 $x+y=6$ 通過點 B

由平行線法知：

C 點必須在直線 $x+y=6$ 的左側或線上，

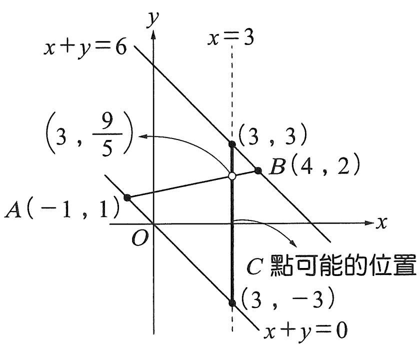
且在直線 $x+y=0$ 的右側或線上

又點 $C(3\,,\,k)$ 在 $x=3$ 上，

而 $3+k=6\Rightarrow k=3$，$3+k=0\Rightarrow k=-3$　$\because -3\le k\le3$

但當 C 點在 $\overline{AB}$ 上時無法形成$\triangle ABC$

此時，$m_{AB}=m_{AC}\Rightarrow\frac{2-1}{4-(-1)}=\frac{k-1}{3-(-1)}\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{k-1}{4}\Rightarrow k=\frac{9}{5}$



綜合以上，得 $-3\le k\le3$，但 $k\ne\frac{9}{5}$。

〈另解〉

$\because A(-1,1)$ 有最小值⇒「A 代入 $x+y$」≤「C 代入 $x+y$」$\Rightarrow -1+1\leq 3+k \Rightarrow k\geq -3$

$\because B(4,2)$ 有最大值⇒「B 代入 $x+y$」≥「C 代入 $x+y$」$\Rightarrow 4+2\geq 3+k \Rightarrow k\leq 3$

又 A，B，C 3 點不共線　$\therefore k\neq \dfrac{9}{5}\left(m_{AB}\neq m_{AC}\Rightarrow \dfrac{1}{5}\neq \dfrac{k-1}{4}\Rightarrow k\neq \dfrac{9}{5}\right)$

綜合以上，$-3\leq k\leq 3$，但 $k\neq \dfrac{9}{5}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $(-x-4,2-y)$；(2) $x=2$，$y=-1$；(3) 16

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的坐標表示法與基本運算性質

解析：(1) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=(2,3)+(-x,-y)+(-6,-1)=(-x-4,2-y)$。

(2) $\overrightarrow{BC}\,/\!/\,\overrightarrow{DA}\Rightarrow \dfrac{x}{-x-4}=\dfrac{y}{2-y}\Rightarrow 2x-xy=-xy-4y\Rightarrow x=-2y$ ……………①

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(6,1)+(x,y)=(6+x,1+y)$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x,y)+(-2,-3)=(x-2,y-3)$

$\because \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

$\therefore (6+x)(x-2)+(1+y)(y-3)=0\Rightarrow x^2+4x+y^2-2y-15=0$ ……………②

將①代入②

$\Rightarrow 4y^2-8y+y^2-2y-15=0\Rightarrow 5y^2-10y-15=0$

$\Rightarrow 5(y-3)(y+1)=0\Rightarrow y=3$ 或 -1

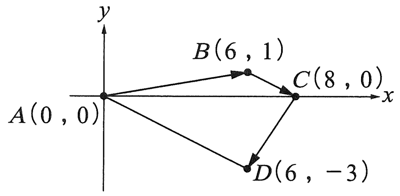
代回①得 $x=-6$ 或 2，又 $x>0$，故 $x=2$，$y=-1$。

(3)設 $A(0,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(6,1)\Rightarrow B(6,1)$

$\overrightarrow{BC}=(2,-1)\Rightarrow C(8,0)$

$\overrightarrow{CD}=(-2,-3)\Rightarrow D(6,-3)$



四邊形 $ABCD$ 面積為$\triangle ABC+\triangle ACD=\dfrac{1}{2}\times8\times1+\dfrac{1}{2}\times8\times3=16$。

〈另解 1〉

$\overrightarrow{BA}=(-6,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(2,-1)$

$\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right|=4$

$\overrightarrow{DC}=(2,3)$，$\overrightarrow{DA}=(-x-4,2-y)=(-6,3)$

$\triangle ACD$ 面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 3\\ -6 & 3\end{vmatrix}\right|=12$

$\therefore$四邊形面積$=4+12=16$。

〈另解 2〉

$\because \overline{AC}\perp\overline{BD}$

$\therefore$四邊形 $ABCD$ 面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\times8\times4=16$。

二、(1) $4x+2$；(2) $2x^2-8x+6$；(3) $f(x)=x^2-2x+4$，$g(x)=-x^2+6x-2$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：一次、二次函數的基本觀念及因式定理的綜合應用

解析：(1)令 $f(x)+g(x)=ax+b$

$f(1)+g(1)=a+b=3+3=6$ ………………①

$f(3)+g(3)=3a+b=7+7=14$ ……………②

由①、②解得 $a=4$，$b=2$

故 $f(x)+g(x)=4x+2$。

(2) $\because f(1)-g(1)=3-3=0$，$f(3)-g(3)=7-7=0$

$\therefore f(x)-g(x)=k(x-1)(x-3)=k(x^2-4x+3)$

$=k((x-2)^2-1)=k(x-2)^2-k$

由 $f(x)-g(x)$ 的最小值為 -2，得 $-k=-2\Rightarrow k=2$

$\therefore f(x)-g(x)=2(x-1)(x-3)=2x^2-8x+6$。

(3) $f(x)+g(x)=4x+2$ ……………………③

$f(x)-g(x)=2x^2-8x+6$……………④

$\dfrac{③+④}{2}\Rightarrow f(x)=x^2-2x+4$

$\dfrac{③-④}{2}\Rightarrow g(x)=-x^2+6x-2$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $(-x-4,2-y)$；(2) $x=2$，$y=-1$；(3) 16

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的坐標表示法與基本運算性質

解析：(1) $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ (1 分)

$=(2,3)+(-x,-y)+(-6,-1)=(-x-4,2-y)$。(1 分)

(2) $\overrightarrow{BC}\,//\,\overrightarrow{DA}\Rightarrow\dfrac{x}{-x-4}=\dfrac{y}{2-y}\Rightarrow 2x-xy=-xy-4y\Rightarrow x=-2y$ ……………① (2 分)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(6,1)+(x,y)=(6+x,1+y)$ (1 分)

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(x,y)+(-2,-3)=(x-2,y-3)$ (1 分)

$\because \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

$\therefore (6+x)(x-2)+(1+y)(y-3)=0\Rightarrow x^2+4x+y^2-2y-15=0$ ……………② (1 分)

將①代入②

$\Rightarrow 4y^2-8y+y^2-2y-15=0\Rightarrow 5y^2-10y-15=0$

$\Rightarrow 5(y-3)(y+1)=0\Rightarrow y=3$ 或 -1 (1 分)

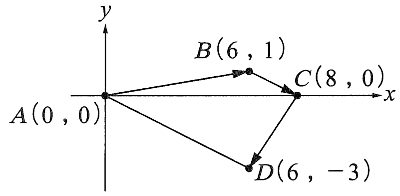
代回①得 $x=-6$ 或 2，又 $x>0$，故 $x=2$，$y=-1$。(1 分)

(3)設 $A(0,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(6,1)\Rightarrow B(6,1)$

$\overrightarrow{BC}=(2,-1)\Rightarrow C(8,0)$

$\overrightarrow{CD}=(-2,-3)\Rightarrow D(6,-3)$ (1 分)



四邊形 $ABCD$ 面積為$\triangle ABC+\triangle ACD=\dfrac{1}{2}\times8\times1$ (1 分)$+\dfrac{1}{2}\times8\times3$ (1 分)$=16$。(1 分)

〈另解 1〉

$\overrightarrow{BA}=(-6,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(2,-1)$

$\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-6&-1\\2&-1\end{vmatrix}\right|=4$ (1.5 分)

$\overrightarrow{DC}=(2,3)$，$\overrightarrow{DA}=(-x-4,2-y)=(-6,3)$

$\triangle ACD$ 面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2&3\\-6&3\end{vmatrix}\right|=12$ (1.5 分)

$\therefore$四邊形面積$=4+12=16$。(1 分)

〈另解 2〉

$\because \overline{AC}\perp\overline{BD}$

$\therefore$四邊形 $ABCD$ 面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$ (2 分)

$=\dfrac{1}{2}\times8\times4=16$。(2 分)