數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.			
答案	(2)	(3)	(1)	(4)(5)	(1)(2)(4)	(2)(5)			

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

難易度：易
出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉
目標：基本對數函數計算
解析：因 $\log(10x)=1+\log x$，等式可化簡成 $1+2\log x+(\log x)^2=(\log x)^2 \Rightarrow \log x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，
故選(2)。

2. (3)

難易度：易
出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉
目標：利用指數、對數性質估計數字範圍
解析：根據題意 $x=\underbrace{20\cdots\cdots}_{\text{有 }21\times4=84\text{ 位數}} \approx 2.0\times10^{84-1}$，因 $\frac{83}{\log 2}\approx 275.7$，即 $10^{83}\approx 2^{275.7}$，
所以 $x\approx 2.0\times2^{275.7}\approx 2^{276.7} \Rightarrow n=276$，
故選(3)。

3. (1)

難易度：中偏易
出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉
目標：直線排列事件機率計算
解析：老師還剩下 5 顆球，代表一共丟擲硬幣 25 次，且第 25 次拿走的球顏色與剩下的 5 顆不同，而前 24 次中有 $15-5=10$ 顆球與剩下球顏色相同，所以共有 C_{10}^{24} 種可能排列，老師剩下球顏色有 2 種可能，所以丟擲硬幣 25 次符合條件的機率為 $\frac{2\times C_{10}^{24}}{2^{25}}=\frac{C_{10}^{24}}{2^{24}}$，也相當於第 25 顆拿走球的顏色在前 24 次中被拿走 14 次，故機率為 $\frac{C_{14}^{24}}{2^{24}}=\frac{C_{10}^{24}}{2^{24}}$
故選(1)。

二、多選題

4. (4)(5)

難易度：易
出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第三冊第二章〈直線與圓〉
目標：解一次不等式與線性規劃可行解範圍討論
解析：化簡不等式可得 $(30-a)x\le 40-b$，所以 $\begin{cases} a\ge1，b\ge1 \\ 30-a>0 \\ 40-b>0 \\ 30-a=40-b \end{cases}$
$\Rightarrow a-b=-10$，$1\le a\le 29$，$11\le b\le 39$。
(1) ╳：b 最小值為 11
(2) ╳：b 最大值為 39
(3) ╳：$a+b\le 68$
(4) ○：$a-b=-10$
(5) ○：$(a, b)=(1, 11)$，$(2, 12)$，……，$(29, 39)$ 共 29 組
故選(4)(5)。

5. (1)(2)(4)

難易度：中偏難

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：除法原理與因式、餘式定理應用

解析：(1) ○：將 $x=\pm 1$ 直接代入 $f(x)$，可得到 $f(\pm 1)=0\cdot g(\pm 1)+0=0$

(2) ○：根據(1)可知 $f(x)$ 被 x^2-1 整除，可令多項式 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^2-1}$

所以題目條件可改寫成 $F(x)=(x+1)\cdot g(x)-2=(x-1)h(x)+2$，其中 $h(x)$ 為 $f(x)$ 除以 $(x+1)(x-1)^2$ 的商式

(3) ╳：由(1)得到 $f(-1)=0$，但 $4x-4$ 不是 $x+1$ 的倍式

(4) ○：$F(1)=2g(1)-2=2\Rightarrow g(1)=2$

(5) ╳：令 $g(x)=(x-1)\cdot Q(x)+2\Rightarrow f(x)=(x^2-1)^2\cdot Q(x)+2(x-1)(x+1)^2+(-2x^2+2)$

餘式為 $2(x-1)(x+1)^2+(-2x^2+2)=2x^3-2x$ 為三次多項式

故選(1)(2)(4)。

6. (2)(5)

難易度：中偏難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：分點公式與向量運算(係數積、二階行列式面積、內積)應用

解析：設 O 為原點

〈方法一〉

設 A 點坐標 $(x\,,y)$

根據分點公式 $\overrightarrow{OF_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{OE_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OF_1}-2\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3\overrightarrow{OE_1}-\overrightarrow{OA}}{2}$

可得坐標 $B(-3-2x\,,-3-2y)$，$C\left(\dfrac{15-x}{2}\,,\dfrac{12-y}{2}\right)$

因 $D(1\,,4)$ 為 $\overline{BC}$ 中點，所以 $2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow\begin{cases}(-6-4x)+(15-x)=4\\(-6-4y)+(12-y)=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}\Rightarrow A(1\,,-2)$，$B(-5\,,1)$，$C(7\,,7)$

(1) ╳：$\triangle DE_1F_1$ 的重心坐標為 $\left(\dfrac{1+5+(-1)}{3}\,,\dfrac{4+4+(-1)}{3}\right)=\left(\dfrac{5}{3}\,,\dfrac{7}{3}\right)$

但$\triangle ABC$ 的重心坐標為 $\left(\dfrac{1+(-5)+7}{3}\,,\dfrac{-2+1+7}{3}\right)=(1\,,2)$

兩三角形重心不同

(2) ○：$\triangle DE_1F_1$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{F_1D}\\\overrightarrow{E_1D}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2&5\\-4&0\end{vmatrix}\right|=10$

(3) ╳：$\triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\\overrightarrow{AC}\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-6&3\\6&9\end{vmatrix}\right|=36$

(4) ╳：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-6\,,3)\cdot(6\,,9)=-9$

(5) ○：A、B、C 三點分別在第四、二、一象限

故選(2)(5)。

〈方法二〉

令 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{c}$，由分點公式可得 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{AF_1}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AE_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{c}$

根據已知坐標可得聯立方程式 $\begin{cases} \overrightarrow{F_1D}=\frac{1}{6}\overrightarrow{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{c}=(2,5) \\ \overrightarrow{E_1D}=\frac{1}{2}\overrightarrow{b}-\frac{1}{6}\overrightarrow{c}=(-4,0) \end{cases}$　(＊)

(1) ╳：令點 M 為 $\overline{E_1F_1}$ 中點，則 $\triangle DE_1F_1$ 的重心在 $\overline{MD}$ 上

且 $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}-\dfrac{\overrightarrow{AE_1}+\overrightarrow{AF_1}}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)-\left(\dfrac{1}{6}\overrightarrow{b}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{c}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{c}$

但 $\triangle ABC$ 的重心在 $\overline{AD}$ 上，而 $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{MD}$ 不平行，所以兩三角形重心不同

(2) ○：$\triangle DE_1F_1$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{F_1D} \\ \overrightarrow{E_1D} \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}\right|=10$

(3) ╳：兩三角形面積比為 $\dfrac{\triangle DE_1F_1}{\triangle ABC}=\dfrac{\triangle ABC-\triangle AE_1F_1-\triangle BF_1D-\triangle CDE_1}{\triangle ABC}$

$$=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$$

所以 $\triangle ABC$ 面積為 $10\div\dfrac{5}{18}=36$

(4) ╳：解聯立方程式(＊)可得 $\overrightarrow{b}=(-6,3)$，$\overrightarrow{c}=(6,9)\Rightarrow\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-9$

(5) ○：三頂點坐標由 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OF_1}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{b}=(1,-2)$

$\Rightarrow\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{b}=(-5,1)$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{c}=(7,7)$

A、B、C 三點分別在第四、二、一象限

故選(2)(5)。

三、選填題

A. $(23,29)$

難易度：中偏易

出處：選修數學乙(下)第一章〈極限與函數〉

目標：循環小數(無窮等比級數)計算

解析：計算可得 $\dfrac{23260}{999}=23+\dfrac{283}{999}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{100^n}=\frac{\frac{\beta}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\beta}{99}$，$\dfrac{23067}{990}=23+\dfrac{3}{10}$，

所以 $\alpha=23$ 與 $\dfrac{283}{999}<\dfrac{\beta}{99}<\dfrac{3}{10}\Rightarrow\beta=29$，故數對 $(\alpha,\beta)=(23,29)$。

B. 3；1

難易度：易

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：平均值與標準差線性變換

解析：根據題目兩個轉換公式可得絕對溫度與華氏的轉換式如下：

$z=\dfrac{5}{9}(y-32)+273.15$，

所以平均 $\mu_K=\dfrac{5}{9}(\mu_F-32)+273.15=\dfrac{5}{9}(-454-32)+273.15=3.15\approx3$，標準差 $\sigma_K=\dfrac{5}{9}\sigma_F=\dfrac{10}{9}\approx1$，

其中 μ_F 是華氏平均，σ_F 是華氏標準差；μ_K 是絕對溫度平均，σ_K 是絕對溫度標準差。

C. $2x^3-18x^2+46x$

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式乘法運算、餘式定理

解析：〈方法一〉

當 $x=2$，4 時，分別代入 $f(x+1)-f(x-1)$ 可得到 $f(1)=f(3)=f(5)=k$

根據餘式定理可令 $f(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)+k$，

將 $f(x)$ 代入 $f(x+1)-f(x-1)$ 可得到

$a(x(x-2)(x-4)-(x-2)(x-4)(x-6))=6a(x-2)(x-4)\Rightarrow a=2$，

又因常數項 $f(0)=0=-15a+k$，所以 $k=15a=30$。

故 $f(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)+30=2x^3-18x^2+46x$。

〈方法二〉

令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$，代入 $f(x+1)-f(x-1)$

可得到 $a(6x^2+2)+b(4x)+2c=(6a)x^2+(4b)x+(2a+2c)$，

與 $12(x-2)(x-4)=12x^2-72x+96$ 比較係數得 $a=2$，$b=-18$，$c=46$。

故 $f(x)=2x^3-18x^2+46x$。

D. 26

難易度：中偏難

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：排列討論計算、樹狀圖

解析：〈方法一〉

根據原則，前兩天一定要吃麵食，且 5 天中至少有一種麵食恰吃兩次

假設牛肉麵先吃滿兩次，則第二次吃牛肉麵可能是在：

(1)星期二：第三天開始增加飯選項後扣除全部點大滷麵的 1 種情況

共有 $2^3-1=7$ 種

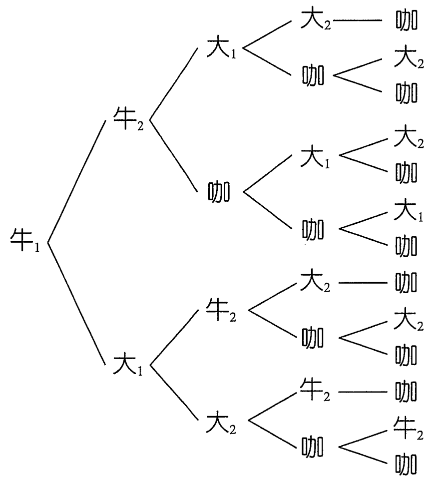
(2)星期三：前 2 天(大滷麵選擇)有 $C_1^2=2$ 種，後 2 天(大滷麵、咖哩飯選擇)有 $2^2-1=3$ 種

共 2x3＝6 種

因為大滷麵先吃滿兩次也是同樣多種情況，故午餐計劃共有 2x(7＋6)＝26 種。

〈方法二〉

直接寫出 5 天午餐樹狀圖(假設第一天點牛肉麵，下標代表累計次數)如下：



合計 13 種，因為第一天點大滷麵也是同樣多種情況

故午餐計劃共有 2x13＝26 種。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $A^2=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}$，$B^2=\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}$，$AB=\begin{bmatrix}0 & x+y\\0 & 0\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}1 & x-y\\0 & -1\end{bmatrix}$；(3)略

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣乘法、反方陣計算

解析：(1) $A^2=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}=A$，$B^2=\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=B$，

$AB=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & x+y\\0 & 0\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$。

(2) $A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=A-3AB+3AB-B=A-B=\begin{bmatrix}1 & x-y\\0 & -1\end{bmatrix}$。

(3) $(A-B)^3=\begin{bmatrix}1 & x-y\\0 & -1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & x-y\\0 & -1\end{bmatrix}$ $\left(\text{註}：\begin{bmatrix}1 & k\\0 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & -1\end{bmatrix}\right)$

因為 $A^3-3BA^2+3B^2A-B^3=A-O+O-B=A-B$，

所以只要 $x+y\neq 0$，等式成立且 $AB\neq BA$。

二、(1) $3x-4y=0$；(2) $\overline{OB}=10$，B 點坐標為 $(8\,,6)$ 或 $(-8\,,-6)$；(3) $k=-1$ 或 $\dfrac{5}{3}$

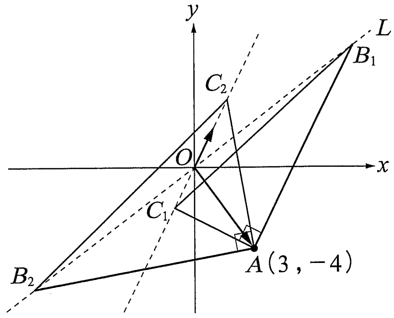
難易度：難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量長度、內積、平行、垂直性質運用，直線的方向向量、法向量應用

解析：(1)法向量可對應 x，y 項係數，又通過原點

故方程式為 $3x-4y=0$。



(2) $\overline{OB}=\sqrt{\overline{AB}^2-|\overrightarrow{OA}|^2}=\sqrt{125-25}=10$，

又直線方向向量平行 $(4\,,3)$，

因為 $(4\,,3)$ 垂直 $\overrightarrow{OA}$ 且長度為 5

所以可令 $\overrightarrow{OB}=\pm(8\,,6)$

故 B 點坐標可能為 $B_1(8\,,6)$ 或 $B_2(-8\,,-6)$，如右圖所示。

(3)因 $\angle BAC=90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

即 $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0$，

化簡可得 $k=\dfrac{-25}{(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(1\,,2)}$，

分別討論如下：

① $\overrightarrow{OB}=(8\,,6)\Rightarrow k=\dfrac{-25}{(5\,,10)\cdot(1\,,2)}=-1$。

② $\overrightarrow{OB}=(-8\,,-6)\Rightarrow k=\dfrac{-25}{(-11\,,-2)\cdot(1\,,2)}=\dfrac{5}{3}$。

故 k 值為 -1 或 $\dfrac{5}{3}$。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) $A^2=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}$，$B^2=\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}$，$AB=\begin{bmatrix}0 & x+y\\0 & 0\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}1 & x-y\\0 & -1\end{bmatrix}$；(3)略

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣乘法、反方陣計算

解析：(1) $A^2=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}=A$，(1 分)

$B^2=\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=B$，(1 分)

$AB=\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & x+y\\0 & 0\end{bmatrix}$，(1 分)

$BA=\begin{bmatrix}0 & y\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$。(1 分)

(2) $A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=A-3AB+3AB-B=A-B=\begin{bmatrix}1 & x-y\\0 & -1\end{bmatrix}$。(3 分)

(3) $(A-B)^3=\begin{bmatrix}1 & x-y\\0 & -1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & x-y\\0 & -1\end{bmatrix}$ （註：$\begin{bmatrix}1 & k\\0 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & k\\0 & -1\end{bmatrix}$） (2 分)

因為 $A^3-3BA^2+3B^2A-B^3=A-O+O-B=A-B$，(2 分)

所以只要 $x+y\neq 0$ (2 分)，等式成立且 $AB\neq BA$。