

# 數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.			
答案	(5)	(3)	(2)	(2)(4)(5)	(4)(5)	(1)(3)			

## 第壹部分：選擇題

### 一、單選題

1. (5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：評量學生對於指數函數與其圖形的基本認知能力

解析：依題意可知  $f(x)=2^x$ ，因為  $f(x)$  的圖形為凹口向上，且最右邊為往上攀升故選(5)。

2. (3)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：評量學生是否能利用餘式定理與有理根判定法來解題

解析：由餘式定理可知  $f(-1)=-1+a-b+2=a-b+1=-2 \Rightarrow a-b=-3$

因為方程式  $f(x)=0$  恰有一有理根，且  $f(x)$  的領導係數為 1，各項係數均為正數

所以由有理根判定法可知此有理根為  $-2 \Rightarrow f(-2)=-8+4a-2b+2=4a-2b-6=0 \Rightarrow 2a-b=3$

$$\text{解} \begin{cases} a-b=-3 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow a+b=6+9=15$$

故選(3)。

3. (2)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：評量學生對於迴歸直線(最適直線)的基本認知能力

解析：可知  $\mu_x = \frac{120+240+200+300+320+380}{6} = \frac{1560}{6} = 260$ ，

$$\mu_y = \frac{30+55+40+65+60+68}{6} = \frac{318}{6} = 53$$

設  $y$  對  $x$  的迴歸直線為  $y=ax+b$ ，因為此直線必通過點  $(\mu_x, \mu_y)$

所以可得  $\mu_y = a\mu_x + b \Rightarrow 53 = 260a + b$

又泰黎在段考前練習了 260 題，即  $x=260$ ，代入  $y=ax+b$

可得  $y=260a+b=53(\text{分})$

故選(2)。

### 二、多選題

4. (2)(4)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：評量學生是否能計算矩陣乘法與求出二階反方陣

解析：可知  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，可得  $a=1, b=0, c=-1, d=1$

$$(1) \times : a+b+c+d=1+0+(-1)+1=1$$

$$(2) \circ : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \times : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \circ : \text{因為} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{所以} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$(5) \circ : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

故選(2)(4)(5)。

5. (4)(5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：評量學生是否能讀懂題意，並能利用指數與對數的轉換來解決問題

解析：依題意可知  $\begin{cases} \log a = b \\ \log b = 3 \end{cases} \Rightarrow b = 10^3 = 1000 \Rightarrow a = 10^b = 10^{1000}$

(1)  $\times$  :  $10^{\log b} = b = 1000$

(2)  $\times$  :  $b = 1000$  為 4 位數

(3)  $\times$  :  $\sqrt{a} = \sqrt{10^{1000}} = 10^{500}$  為 501 位數

(4)  $\circ$  :  $\frac{\log a}{\log b} = \frac{10^3}{3} = 333\frac{1}{3}$  的整數部分為 3 位數

(5)  $\circ$  :  $\frac{3a}{b} = \frac{3 \times 10^{1000}}{10^3} = 3 \times 10^{997}$  為 998 位數

故選(4)(5)。

6. (1)(3)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：評量學生是否能利用線性規劃原理解題

解析：可知  $\overleftrightarrow{CD} : x + 2y - 12 = 0$ ,  $\overleftrightarrow{DE} : 3x - 2y + 4 = 0$ ,  $\overleftrightarrow{BC} : 4x + ay - 12 = 0$

將  $C(4, 4)$  代入  $4x + ay - 12 = 0 \Rightarrow 16 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow a = -1$

解  $\begin{cases} y = 0 \\ 4x - y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ , 解  $\begin{cases} x + 2y - 12 = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ , 解  $\begin{cases} x = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

所以  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $D(2, 5)$ ,  $E(0, 2)$

(1)  $\circ$  :  $a = -1 < 0$

(2)  $\times$  : 設  $mx + y = k$ , 其斜率為  $-m < 0$

因為  $mx + y$  的最大值只發生在點  $C(4, 4)$ , 如圖(一)

所以由平行線法可知  $-m < m_{\overleftrightarrow{CB}} \Rightarrow -m < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < m$

因此  $m$  之值不可能為  $\frac{1}{3}$

(3)  $\circ$  : 承(2), 由平行線法可知, 將直線  $mx + y = k$  往左下方移動時,  $k$  值會變小, 所以當直線  $mx + y = k$  通過點  $A(0, 0)$  時, 有最小值 0

(4)  $\times$  : 設  $8mx - y = h$ , 其斜率為  $8m$ , 承(2)可知  $8m > 4$

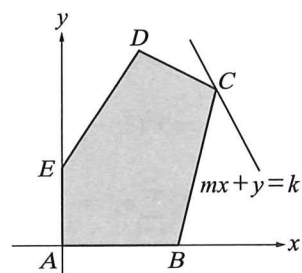
因為  $m_{\overleftrightarrow{BC}} = 4$ ,  $m_{\overleftrightarrow{DE}} = \frac{3}{2}$ , 所以可得圖(二)

由平行線法可知, 將直線  $8mx - y = h$  往右下方移動時,  $h$  值會變大  
所以當直線  $8mx - y = h$  通過點  $C(4, 4)$  時, 有最大值;

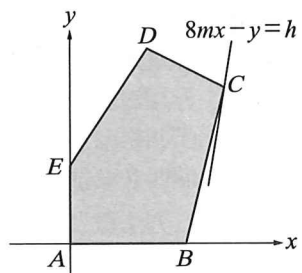
而通過點  $E(0, 2)$  時, 有最小值

(5)  $\times$  : 承(4)可知  $8mx - y$  的最小值只發生在  $E$  點

故選(1)(3)。



圖(一)



圖(二)

### 三、選填題

A. 174

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：評量學生是否能解含絕對值的一次不等式

解析：設帕森的年所得為  $x$  萬, 依題意可知  $3|x - 172| \leq |x - 180|$

(i) 當  $x \geq 180$  時,  $3(x - 172) \leq x - 180 \Rightarrow 2x \leq 336 \Rightarrow x \leq 168$  (不合)

(ii) 當  $172 \leq x < 180$  時,  $3(x - 172) \leq 180 - x \Rightarrow 4x \leq 696 \Rightarrow x \leq 174 \Rightarrow 172 \leq x \leq 174$

(iii) 當  $x < 172$  時,  $3(172 - x) \leq 180 - x \Rightarrow 2x \geq 336 \Rightarrow x \geq 168 \Rightarrow 168 \leq x < 172$

所以  $168 \leq x \leq 174$ , 故帕森的年所得最多為 174 萬。

B.  $\frac{1}{6}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：評量學生是否能讀懂題意，並計算條件機率

解析：設老師從「士」與「土」之中選出一字的事件為  $A$

從「紹」、「結」、「給」之中選出一字的事件為  $B$

從「夫」、「天」、「夭」、「大」之中選出一字的事件為  $C$

鑫蕾將選出的字讀錯的事件為  $D$

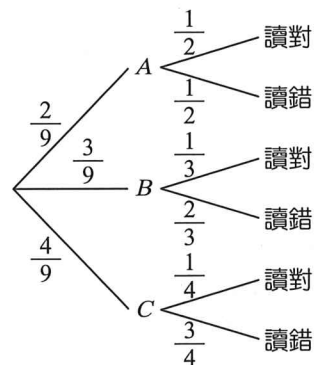
可得樹狀圖如右

$$\text{所以 } P(\text{此字為「夫」} | D) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{6}$$

〔另解〕

可知老師選出「土」、「紹」、「給」、「夫」、「夭」、「大」之中任一  
字時，鑫蕾就會將此字讀錯

$$\text{故 } P(\text{此字為「夫」} | \text{讀錯}) = \frac{1}{6}。$$



C.  $\frac{16}{3}$

出處：選修數學乙(下) 第一章〈極限與函數〉

目標：評量學生是否能計算無窮等比級數之和

$$\text{解析：可知 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_4 + a_5 + \dots + a_n) = \frac{a_4}{1-r} = a_3 \Rightarrow \frac{2 \times r^3}{1-r} = 2 \times r^2 \Rightarrow r^3 = r^2(1-r)$$

$$\Rightarrow r^2(2r-1)=0 \Rightarrow r=\frac{1}{2} \text{ 或 } 0 \text{ (不合)}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-r^2} = \frac{2^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}。$$

D. 132

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

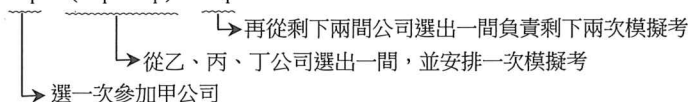
目標：評量學生能否讀懂題意，並分類討論計算其方法數

解析：分類討論如下：

(i) 四次參加四間不同模擬考公司：方法數為  $4! = 24$

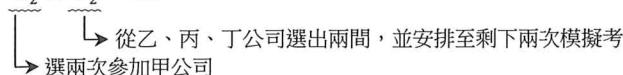
(ii) 四次參加三間不同模擬考公司且恰有一次參加甲模擬考公司：

$$\text{方法數為 } C_1^4 \times (C_1^3 \times C_1^3) \times C_1^2 = 72$$



(iii) 四次參加三間不同模擬考公司且恰有兩次參加甲模擬考公司：

$$\text{方法數為 } C_2^4 \times P_2^3 = 36$$



故總方法數為  $24 + 72 + 36 = 132$  (種)。

第貳部分：非選擇題

$$\text{一、(1) } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}; (2) 4; (3) -12; (4) \sqrt{19}$$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量學生是否能利用向量分點公式，並計算向量內積

解析：(1)因為  $M$  為  $\overline{AC}$  中點，所以  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$\text{故 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}。$$

$$\begin{aligned} (2)\text{承(1)可知 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(6^2 - \overline{AD}^2) = -10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = 16, \text{ 故 } \overline{AD} = 4。$$

$$(3)\text{承(2)可知, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overline{AB} \times \overline{AD} \times \cos \angle BAD = 6 \times 4 \times \cos 120^\circ = -12。$$

$$\begin{aligned} (4)\text{承(1)、(2)、(3)可知 } \overline{BM} &= \sqrt{|\overrightarrow{BM}|^2} = \sqrt{\left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \times 36 + \frac{1}{4} \times 16 - \frac{1}{2} \times (-12)} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 6} = \sqrt{19}。 \end{aligned}$$

二、(1)  $\frac{27}{64}$  ; (2)  $\frac{5}{32}$  ; (3) 86.15 萬元

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：評量學生對於二項分布的基本認知，並能計算期望值

解析：(1)設隨機變數  $X$  表示此行銷專案經評估通過的主管人數，可知隨機變數  $X$  滿足二項分布  $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$

$$\text{所以 } P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

故此行銷專案同時遭三位主管評估否決的機率為  $\frac{27}{64}$ 。

$$\begin{aligned} (2)\text{承(1)可得 } P(X \geq 2) &= P(X=2) + P(X=3) = C_2^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} + C_3^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{5}{32} \end{aligned}$$

故此行銷專案可執行的機率為  $\frac{5}{32}$ 。

$$\begin{aligned} (3)\text{承(2)可得此行銷專案獲利的期望值為 } & -1.6 \times \left(1 - \frac{5}{32}\right) + 600 \times \frac{5}{32} \times \frac{3}{5} + 500 \times \frac{5}{32} \times \frac{2}{5} \\ &= -1.35 + 56.25 + 31.25 \\ &= 86.15 \text{ (萬元)。} \end{aligned}$$

## 非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1)  $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$  ; (2) 4 ; (3) -12 ; (4)  $\sqrt{19}$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量學生是否能利用向量分點公式，並計算向量內積

解析：(1)因為  $M$  為  $\overline{AC}$  中點，所以  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$  (1 分)

$$\text{故 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}。(1 \text{ 分})$$