

數學乙考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(4)	(2)	(4)	(4)	(1)(2)(4)	(2)(3)(4)(5)
8.	9.					
(2)(5)	(1)(2)(3)(4)					

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：對數的定義

解析： $\log(\log x) = 2025 \Rightarrow \log x = 10^{2025}$

$$\Rightarrow x = 10^{10^{2025}}$$

則 x 的位數為 $10^{2025} + 1$

故選(1)。

2. (4)

出處：選修數學乙〈複數與多項式方程式〉

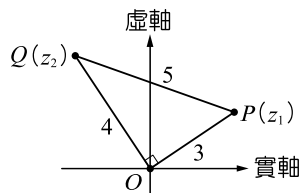
目標：複數的幾何意義

解析：如右圖

$\triangle OPQ$ 的面積為

$$\frac{3 \times 4}{2} = 6$$

故選(4)。



3. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率的定義與計算

解析：設有 y 杯米漿

$$\text{由題意知 } \frac{1}{x} = \frac{y}{y+10+4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+14}{y} = 1 + \frac{14}{y}$$

當 $y=1, 2, 7, 14$ 時, $x=15, 8, 3, 2$

$\therefore x$ 的最大值為 15

故選(2)。

4. (4)

出處：第二冊〈數據分析〉、第四冊 A〈矩陣〉、

第四冊 B〈矩陣與資料表格〉

目標：矩陣基本概念與標準差運算

解析：由題意可得知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & \cdots & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ -2 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \end{bmatrix}$

其中 0 有 n 項, 2 與 -2 皆有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 項, 所有元的

算術平均數為 0

由標準差公式可得知各項離均差的平方和為

$$n^2 \times \left(\frac{4\sqrt{6}}{5} \right)^2 = n \times 0^2 + \frac{n(n-1)}{2} \times [2^2 + (-2)^2]$$

$$\text{化簡可得 } n \times \frac{96}{25} = 4(n-1) \Rightarrow n = 25$$

故選(4)。

5. (4)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：二次函數圖形與圓交點個數判斷

$$\text{解析：} \begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ y = x^2 + k \end{cases} \Rightarrow x^2 + (x^2 + k)^2 = k^2$$

$$\text{化簡可得 } x^4 + 2kx^2 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + 2k + 1) = 0$$

$$\text{得 } x^2 = 0 \text{ 或 } x^2 = -2k - 1$$

$\therefore$ 有 3 個相異交點, 即有三個相異實數解

$$\therefore -2k - 1 > 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{2}$$

故選(4)。

二、多選題

6. (1)(2)(4)

出處：第二冊〈數列與級數〉、

選修數學乙〈複數與多項式方程式〉

目標：方程式根與係數的關係與等差數列的應用

$$\text{解析：由根與係數的關係得 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = p \end{cases}, \begin{cases} x_3 + x_4 = 4 \\ x_3 \cdot x_4 = q \end{cases}$$

$$\text{假設首項為 } x_1, \text{ 則 } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{7}{2}, p = \frac{7}{4}$$

$\therefore$ 四根成等差數列, 且 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 4$

$$\text{假設 } x_4 > x_3, \text{ 則 } x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = \frac{5}{2}, q = \frac{15}{4},$$

並得知公差 $d = 1$

$$\text{同理, 若假設首項為 } x_3, \text{ 則 } x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{7}{2}, q = \frac{7}{4}$$

$$\text{假設 } x_2 > x_1, \text{ 則 } x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{5}{2}, p = \frac{15}{4}, \text{ 且公差 } d = 1$$

$$\text{可得 } p > 0, d > 0, p + q = \frac{11}{2} < 6, |p - q| = 2, pq = \frac{105}{16}$$

故選(1)(2)(4)。

7. (2)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：相關係數的概念與性質

解析： $\therefore y_i = ax_i + b, z_i = ay_i + b$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$

$$\therefore \text{可得 } z_i = a(ax_i + b) + b = a^2x_i + ab + b$$

將原來的 16 分提高為 46 分, 原來的 40 分提高為 52 分代入上式

$$\text{得 } \begin{cases} 16a^2 + ab + b = 46 \\ 40a^2 + ab + b = 52 \end{cases}$$

兩式相減可得 $24a^2 = 6$

$$\Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \text{ (負不合)} \Rightarrow b = 28$$

$$\text{故可求出 } y_i = \frac{1}{2}x_i + 28, z_i = \frac{1}{2}y_i + 28 = \frac{1}{4}x_i + 42$$

(1) $\times$: x_i 與 y_i 為完全正相關, 相關係數為 1,
 y_i 與 z_i 為完全正相關, 相關係數為 1

(2) $\bigcirc$: 小劉第一次調整後的分數為 $\frac{1}{2} \times 16 + 28 = 36$ (分)

(3) $\bigcirc$: 由 $z_i = \frac{1}{4}x_i + 42$, 可得 $\sigma_z = 4\sigma_x$

(4) $\bigcirc$: 設原始分數為 k 分, 則 $k + 9 = \frac{1}{4}k + 42$
 $\Rightarrow k = 44$

故小林的原始分數為 44 分

(5) ○：設原始分數的平均為 t 分，

$$\text{則 } 2t = \frac{1}{4}t + 42 \Rightarrow t = 24$$

故 x_i 的平均分數為 24 分

故選(2)(3)(4)(5)。

8. (2)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理與面積公式的應用

解析：(1) ×：若為正六邊形，則 $\triangle ACE$ 面積是此六邊形面積

的 $\frac{1}{2}$ ，故不成立

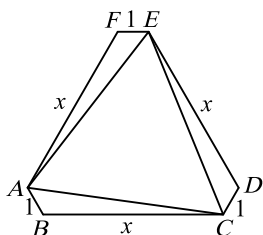
(2) ○：∵ 此六邊形的各內角相等

∴ 各內角皆為 120°

由下圖可得知在 $\triangle ABC$ 中

$$\cos 120^\circ = \frac{x^2 + 1^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot x \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \overline{AC}^2 = x^2 + x + 1$$



同理可得 $\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{AE}$

∴ $\triangle ACE$ 為正三角形，

$$\triangle ABC \cong \triangle CDE \cong \triangle EFA$$

又 $\triangle ACE$ 面積為此六邊形面積的 $\frac{7}{10}$

∴ $\triangle ACE$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = 7 : 1

即 $\triangle ACE$ 面積為 $\triangle ABC$ 面積的 7 倍

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + x + 1) = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

故 x 的所有可能值之和為 6

(3) ×：當 $x < 1$ 時， $x = 3 - 2\sqrt{2}$ ，

$\triangle ACE$ 面積 = 7 · $\triangle ABC$ 面積

$$= 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 - 2\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{21\sqrt{3} - 14\sqrt{6}}{4}$$

(4) ×：當 $x > 1$ 時， $x = 3 + 2\sqrt{2}$ ，

$\triangle ACE$ 面積 = 7 · $\triangle ABC$ 面積

$$= 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{21\sqrt{3} + 14\sqrt{6}}{4}$$

(5) ○： $a = \frac{21\sqrt{3} - 14\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{10}{7}$ ，

$$b = \frac{21\sqrt{3} + 14\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{10}{7}$$

得 $a < b$

故選(2)(5)。

9. (1)(2)(3)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：排列組合中不盡相異物概念

解析：(1) ○：從 $A(-4, -3)$ 至 $B(2, 3)$ 走捷徑，須向右 6 格，向上 6 格

$$\text{故所求方法數為 } \frac{12!}{6! \times 6!} \text{ 種}$$

(2) ○：從 $A(-4, -3)$ 至 $O(0, 0)$ 走捷徑，須向右 4 格，向上 3 格

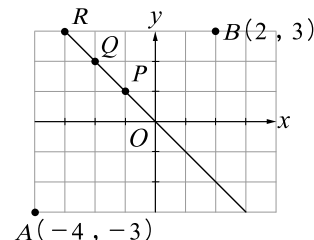
$$\text{方法數為 } \frac{7!}{4! \times 3!} = C_4^7$$

從 $O(0, 0)$ 至 $B(2, 3)$ 走捷徑，須向右 2 格，向上 3 格

$$\text{方法數為 } \frac{5!}{2! \times 3!} = C_3^5$$

故所求方法數為 $C_4^7 \times C_3^5$ 種

(3) ○：如下圖所示



$A(-4, -3)$

若需經過第二象限，則必通過 P 、 Q 、 R 其中一點

$$A \rightarrow P \rightarrow B : \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 350$$

$$A \rightarrow Q \rightarrow B : \frac{7!}{2! \times 5!} \times \frac{5!}{4! \times 1!} = 105$$

$$A \rightarrow R \rightarrow B : \frac{7!}{1! \times 6!} \times \frac{5!}{5!} = 7$$

共有 $350 + 105 + 7 = 462$ 種

(4) ○：不經過第二象限方法數

= (全部方法數) - (經過第二象限方法數)

$$= \frac{12!}{6! \times 6!} - 462 = 462 \text{ (種)}$$

(5) ×：→ ↑ 或 ↑ → 即轉一次彎，共轉三次彎的情況下有兩種情形：

① $A \rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow B$ ：

(→, →) 可有 (5, 1)、(4, 2)、(3, 3)、(2, 4)、(1, 5) 5 種

(↑, ↑) 可有 (5, 1)、(4, 2)、(3, 3)、(2, 4)、(1, 5) 5 種

共 $5 \times 5 = 25$ 種

② $A \uparrow \rightarrow \uparrow B$ ：

(↑, ↑) 可有 (5, 1)、(4, 2)、(3, 3)、(2, 4)、(1, 5) 5 種

(→, →) 可有 (5, 1)、(4, 2)、(3, 3)、(2, 4)、(1, 5) 共 5 種

共 $5 \times 5 = 25$ 種

故共有 $25 + 25 = 50$ 種

故選(1)(2)(3)(4)。

三、選填題

10. $\frac{-1}{2}$

出處：第四冊 A〈矩陣〉、第四冊 B〈矩陣與資料表格〉

目標：矩陣運算與乘法反方陣

解析：∵ A 、 B 的乘法反方陣皆存在

$$\therefore A^2 = 4AB \Rightarrow A = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}A$$

左右同乘以 A^{-1} 和 B^{-1}

$$\Rightarrow A^{-1}BB^{-1} = \frac{1}{4}A^{-1}AB^{-1}, \text{ 得 } A^{-1} = \frac{1}{4}B^{-1}$$

$$\text{代入 } A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} \text{ 得 } \frac{5}{4}B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = (B^{-1})^{-1} = -\frac{1}{32} \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } a = \frac{-1}{2}。$$

11. 34

出處：第三冊 A〈平面向量〉、第三冊 B〈平面向量與應用〉

目標：平面向量的運算

解析：設直線 $2x - y = 0$ 上 $Q_1(t, 2t)$ ，直線 $2x + 5y = 0$ 上

$Q_2(5s, -2s)$ ，其中 $t, s \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2} = (t + 25s, 2t - 2s)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ_2} + \overrightarrow{OQ_1} = (5s + 2t, -2s + 2t)$$

$$\text{可得 } \begin{cases} t + 25s = 5s + 2t \\ 2t - 2s = -2s + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ s = 2 \end{cases}$$

$$\text{則 } \overrightarrow{OP} = (30, 16) \Rightarrow |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34$$

故建築物 P 與基地的距離為 34 單位。

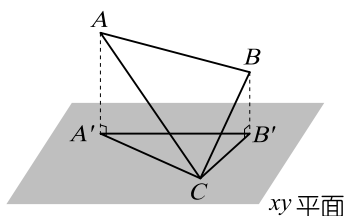
12. $13\sqrt{3}$

出處：第四冊 A〈空間向量〉、

第四冊 B〈空間概念與空間坐標系〉

目標：空間坐標系的投影與空間概念

解析：如下圖所示



設 A 點的 z 坐標為 $h > 0$ ， B 點的 z 坐標為 $k > 0$

又 $\overline{A'C} = 6$ ， $\overline{B'C} = 4$ ， $\overline{A'B'} = 4\sqrt{3}$

$$\text{則 } \overline{AC}^2 = 6^2 + h^2, \overline{BC}^2 = 4^2 + k^2, \overline{AB}^2 = (h - k)^2 + (4\sqrt{3})^2$$

∵ $\triangle ABC$ 為正三角形

$$\therefore \text{得 } \begin{cases} 6^2 + h^2 = 4^2 + k^2 \\ 6^2 + h^2 = (h - k)^2 + (4\sqrt{3})^2 \\ 4^2 + k^2 = (h - k)^2 + (4\sqrt{3})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4 \\ k = 6 \end{cases}$$

則 $\triangle ABC$ 邊長為 $2\sqrt{13}$

$$\text{故所求面積為 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{13})^2 = 13\sqrt{3} \text{ 平方單位。}$$

第貳部分、混合題或非選擇題

13. $a = 3, b = 1, c = -5$

出處：選修數學乙〈極限與函數〉

目標：函數極限概念與運算

解析：∵ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^4 - 1} = \frac{5}{2}$ 極限存在

$$\therefore f(1) = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = -1 \dots\dots\dots (*)$$

將 $\frac{f(x)}{x^4 - 1}$ 的分子、分母約分 $x - 1$

$$\text{可得 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (a+1)x - c}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + (a+1) - c}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + (a+1) - c = 10$$

$$\Rightarrow c = a - 8 \text{ 代入 } (*), \text{ 得 } 2a + b = 7$$

∵ $a > b$ ，且 a, b 為正整數

$$\therefore a = 3, b = 1 \Rightarrow c = -1 - 3 - 1 = -5$$

$$\text{故 } a = 3, b = 1, c = -5。$$

◎評分原則

∵ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^4 - 1} = \frac{5}{2}$ 極限存在

$$\therefore f(1) = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = -1 \dots\dots\dots (*) \quad (1 \text{ 分})$$

將 $\frac{f(x)}{x^4 - 1}$ 的分子、分母約分 $x - 1$

$$\text{可得 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + (a+1)x - c}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + (a+1) - c}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + (a+1) - c = 10$$

$$\Rightarrow c = a - 8 \text{ 代入 } (*), \text{ 得 } 2a + b = 7 \quad (2 \text{ 分})$$

∵ $a > b$ ，且 a, b 為正整數

$$\therefore a = 3, b = 1 \Rightarrow c = -1 - 3 - 1 = -5$$

$$\text{故 } a = 3, b = 1, c = -5。 \quad (3 \text{ 分})$$

14. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：配方法求三次函數圖形的對稱中心

解析：承 13. 題， $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$

$$= (x+1)^3 - 2(x+1) - 4$$

∴ $y = f(x)$ 圖形的對稱中心坐標為 $(-1, -4)$

故選(2)。

15. $y = x - 1$

出處：選修數學乙〈微分〉

目標：一次近似計算

解析：∵ $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 6x + 1 \Rightarrow f'(-2) = 1 \text{ 且 } f(-2) = -3$$

故 $y = f(x)$ 在 $x = -2$ 附近的一次近似為 $y = x - 1$ 。

◎評分原則

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + 6x + 1 \Rightarrow f'(-2) = 1 \text{ 且 } f(-2) = -3 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{故 } y = f(x) \text{ 在 } x = -2 \text{ 附近的一次近似為 } y = x - 1。 \quad (2 \text{ 分})$$

16. (3)

出處：選修數學乙〈積分〉

目標：了解邊際成本概念

解析：
$$\frac{1}{40-10} [(4000 \times 40 - 10 \times 40^2) - (4000 \times 10 - 10 \times 10^2)]$$
$$= 3500(\text{元})$$

故選(3)。

17. 均衡數量為 5 個，均衡價格為 50 萬元

出處：選修數學乙〈積分〉

目標：了解均衡數量與均衡價格概念

解析：當供需均衡時， $D(x) = S(x) \Rightarrow -3x^2 + 125 = 2x^2$
 $\Rightarrow x = 5$ 或 -5 (負不合)
故供需均衡時的均衡數量為 5 個
均衡價格為 $D(5) = S(5) = 2 \times 5^2 = 50$ (萬元)。

◎評分原則

當供需均衡時， $D(x) = S(x) \Rightarrow -3x^2 + 125 = 2x^2$
 $\Rightarrow x = 5$ 或 -5 (負不合)
故供需均衡時的均衡數量為 5 個 (2 分)
均衡價格為 $D(5) = S(5) = 2 \times 5^2 = 50$ (萬元)。(2 分)

18. 250 萬元

出處：選修數學乙〈積分〉

目標：計算供需均衡時的消費者剩餘

解析：
$$\int_0^5 D(x) dx = \int_0^5 (-3x^2 + 125) dx$$
$$= (-x^3 + 125x) \Big|_0^5$$
$$= -125 + 625 = 500$$

供需均衡時成交總金額為 $5 \times 50 = 250$ (萬元)
此時消費者剩餘為 $500 - 250 = 250$ (萬元)。

◎評分原則

$$\int_0^5 D(x) dx = \int_0^5 (-3x^2 + 125) dx$$
$$= (-x^3 + 125x) \Big|_0^5$$
$$= -125 + 625 = 500 \quad (2 \text{ 分})$$

供需均衡時成交總金額為 $5 \times 50 = 250$ (萬元) (2 分)
此時消費者剩餘為 $500 - 250 = 250$ (萬元)。(1 分)