

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11-1	11-2	12-1	12-2	12-3
5	5	3	4	2	1	34	345	145	235	1	3	7	2	7
13-1	13-2	14	15	16										
4	5	5												

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 【知識點】數據分析

【解析】各選項的標準差如下：

選項(1)(2)(4)皆為 $\sqrt{\frac{60}{9}}$ ，選項(3)為 4，選項(5)為 $\sqrt{\frac{6}{9}}$ ，

故選(5)。

2. 【知識點】平面向量

【解析】令 $\vec{AD} = (x, y)$ ，

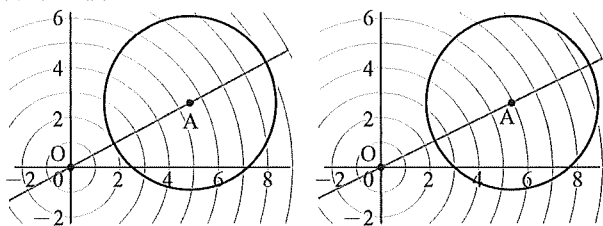
$$\text{由正射影公式可知} \begin{cases} \frac{3x+y}{10}(3,1)=(15,5) \\ \frac{x+3y}{10}(1,3)=(3,9) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+y=50 \\ x+3y=30 \end{cases} \Rightarrow D(x,y)=(15,5),$$

故選(5)。

3. 【知識點】圖與直線

【解析】圓 Ω 的直徑為 7，本題所求的點的数量必為 $7 \times 2 = 14$ 個，故選(3)。詳細可分為 $\overline{OA}$ 為整數與 $\overline{OA}$ 不為整數兩種情況討論，示意圖如下，兩種類型的圖形中，點的数量皆為 14 個。



4. 【知識點】對數

【解析】已知 pH 值為 3.3010 的混合溶液，其 $[H^+] = 10^{-3.3010} = 10^{0.6990} \times 10^{-4} \approx 5 \times 10^{-4}$ ，

$$\text{因此 } \frac{10^{-3} \times 10 + 10^{-4} \times a}{10 + a} \approx 5 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{100 + a}{10 + a} \approx 5 \Rightarrow 100 + a \approx 50 + 5a$$

$$\Rightarrow a \approx 12.5,$$

故選(4)。

5. 【知識點】微分

【解析】 $f(x)$ 為三次函數，符合題意的切線只有對稱中心的切線。 $f'(x) = 3x^2 + 18x + 21$ ， $f''(x) = 6x + 18$ 。

當 $f''(x) = 6x + 18 = 0$ 時， $x = -3$ 。切線斜率 $f'(-3) = 27 - 54 + 21 = -6$ ，

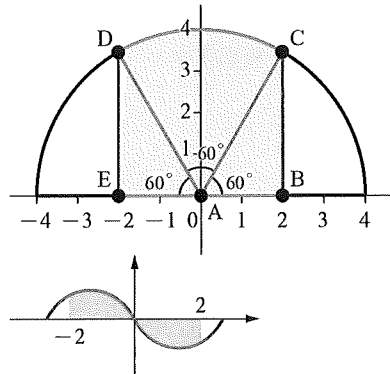
$$f(-3) = -27 + 81 - 63 + 27 = 18。$$

因此以對稱中心為切點的切線為 $y = -6(x + 3) + 18 = -6x$ ，故選(2)。

6. 【知識點】積分

【解析】令 $\triangle ADE$ 面積為 S ， $\triangle ABC$ 面積為 T ，

$$\text{扇形 } ACD \text{ 面積為 } M = \frac{4^2 \pi}{6} = \frac{8\pi}{3}。$$



$$\text{因為 } \int_{-2}^2 \sqrt{16 - x^2} dx = T + M + S,$$

$$\int_{-2}^2 \sin x dx = 0, \quad \int_{-2}^2 \sqrt{3}|x| dx = T + S,$$

$$\text{所以 } \int_{-2}^2 (\sqrt{16 - x^2} + \sin x - \sqrt{3}|x|) dx$$

$$= \int_{-2}^2 \sqrt{16 - x^2} dx + \int_{-2}^2 \sin x dx - \int_{-2}^2 \sqrt{3}|x| dx$$

$$= (T + M + S) + 0 - (T + S) = M = \frac{8\pi}{3},$$

故選(1)。

二、多選題

7. 【知識點】分點公式

$$\text{【解析】 } \frac{a \int_0^1 7x^2 dx + b \int_0^1 9x dx}{a + b}, \text{ 因此原式} = \frac{\frac{7}{3}a + \frac{9}{2}b}{a + b},$$

且 a, b 皆為正數，符合內分點公式

$$\Rightarrow \frac{7}{3} < \frac{\frac{7}{3}a + \frac{9}{2}b}{a + b} < \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{\frac{7}{3}a + \frac{9}{2}b}{a + b} \text{ 可能為 } 3 \text{ 或 } 4,$$

故選(3)(4)。

8. 【知識點】週期性數學模型

【解析】

(1) $\times$ ：由圖可知此函數的週期為 8，而 $2025 = 8 \times 253 + 1$ ，因此 $x = 2025$ 與 $x = 1$ 的 y 坐標相同，皆為 2。

$$(2) \times : a = \frac{6-2}{2} = 2。$$

$$(3) \circ : \text{週期 } 8 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}。$$

(4) $\circ$ ：當 $y = 2 \sin(\frac{\pi}{4}x) + 4$ 向右移動變成題目中的圖時，
B 點從 $(0, 4)$ 移動到 $(3, 4)$ ，因此移動後的函數為
 $y = 2 \sin[\frac{\pi}{4}(x-3)] + 4 = 2 \sin(\frac{\pi}{4}x - \frac{3\pi}{4}) + 4,$

$$c = \frac{-3\pi}{4}。$$

$$(5) \circ : d = \frac{6+2}{2} = 4。$$

故選(3)(4)(5)。

9. 【知識點】極限

【解析】

(1) ○：此為無窮等比級數且公比為 $\frac{2}{3} \in (-1, 1)$ ，極限存在。

(2) ×： $\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x-6}{|x-6|} = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x-6}{x-6} = 1$ ，

$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x-6}{|x-6|} = \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x-6}{6-x} = -1$ 。極限不存在。

(3) ×：此級數和為 4 或 5，不趨近於一個數字，極限不存在。

(4) ○： $\lim_{x \rightarrow 2025} \frac{2^x}{x^2} = \frac{2^{2025}}{2025^2}$ ，極限存在。

(5) ○：因為 $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$ ，

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$ ，極限存在。

故選(1)(4)(5)。

10. 【知識點】矩陣

【解析】

(1) ×： $A \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

(2) ○： $A \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(3) ○：因為 $A \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 且 $A \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，

所以 $A \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 。

(4) ×： $\begin{cases} nx + qy = 5 \\ mx + py = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} py + mx = 6 \\ qy + nx = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p & m \\ q & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ 。

(5) ○： $A \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -14 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 31 \end{bmatrix}$ 。

故選(2)(3)(5)。

三、選填題

11. 【知識點】排列組合

【解析】如下表，合計 13 種。

物品	紅利點數	個數					
圓規	5 點	0 個	0 個	0 個	0 個	1 個	1 個
直尺、三角板	3 點	0 個	1 個	2 個	3 個	0 個	1 個
鉛筆	1 點	剩下的點數都換鉛筆					
兌換方式		1 種	2 種	3 種	4 種	1 種	2 種

12. 【知識點】等差、等比數列

【解析】因為 $a_{2n+1} = a_{2n} + 4 = 3a_{2n-1} + 4$ ，

所以 $a_{2n+1} + 2 = 3a_{2n-1} + 6 = 3(a_{2n-1} + 2)$ 。

令 $b_k = a_k + 2$ ，因此 $b_1 = a_1 + 2 = 1$ ，且 $b_{2n+1} = 3b_{2n-1}$ 。

$b_{13} = 3b_{11} = 3^2b_9 = 3^3b_7 = 3^4b_5 = 3^5b_3 = 3^6b_1 = 729$ ，

$a_{13} = b_{13} - 2 = 727$ 。

13. 【知識點】空間坐標系

【解析】C 點坐標為 $(0, 2, 0)$ ， $\overline{AB} = 2$ ，

$\overline{BC} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，

$\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，

由餘弦定理可知 $\cos \angle ACB = \frac{\sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{4}{5}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

14. 【知識點】二項分布的標準差

【解析】當 a, b 均為正數且 $a \leq b$ 時，

$\frac{|a-b| + |a+b|}{2} = \frac{(b-a) + (b+a)}{2} = b$ 。

當 a, b 均為正數且 $a > b$ 時，

$\frac{|a-b| + |a+b|}{2} = \frac{(a-b) + (a+b)}{2} = a$ 。

因此 $\frac{|a-b| + |a+b|}{2}$ 的值等於 a, b 中較大的那一個。

a	300	300	300	600
b	300	600	1000	1000
購物金	300	600	1000	1000
機率	$\frac{C_2^2}{C_2^4} = \frac{1}{6}$	$\frac{2 \times 1}{C_2^4} = \frac{2}{6}$	$\frac{2 \times 1}{C_2^4} = \frac{2}{6}$	$\frac{1 \times 1}{C_2^4} = \frac{1}{6}$

隨機變數 X 為二項分布， $n = 3600$ ，

購物金超過 500 元的機率 $p = \frac{5}{6}$ ，

標準差 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3600 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}} = 10\sqrt{5}$ ，

故選(5)。

15. 【知識點】隨機變數的變異數

【解析】

$E(Y) = \frac{2}{4} \times 600 + \frac{1}{4} \times 1200 + \frac{1}{4} \times 2000$ (2 分)

$= 1100$ 。(1 分)

$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$= \frac{2}{4} \times 600^2 + \frac{1}{4} \times 1200^2 + \frac{1}{4} \times 2000^2 - 1100^2$ (2 分)

$= 330000$ 。(2 分)

16. 【知識點】隨機變數的變異數

【解析】

a	300	300	300	600
b	300	600	1000	1000
購物金	300	600	1000	1000
機率	$\frac{C_2^2}{C_2^4} = \frac{1}{6}$	$\frac{2 \times 1}{C_2^4} = \frac{2}{6}$	$\frac{2 \times 1}{C_2^4} = \frac{2}{6}$	$\frac{1 \times 1}{C_2^4} = \frac{1}{6}$

(1 分)

(1 分)

(1 分)

$E(Z) = \frac{1}{6} \times 300 + \frac{2}{6} \times 600 + \frac{3}{6} \times 1000 = 750$ ，

$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$

$= \frac{1}{6} \times 300^2 + \frac{2}{6} \times 600^2 + \frac{3}{6} \times 1000^2 - 750^2$ (2 分)

$= 72500$ 。(2 分)