

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-1	10-2	10-3	10-4	11-1	11-2
5	4	3	1	5	35	1245	12	235	1	3	2	5	—	2
11-3	12-1	12-2	12-3	13-1	13-2	14	15	16	17-1	17-2	18			
8	3	3	6	1	5				1	6				

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 【知識點】實數與指對數、按比例成長模型

【解析】因為 $\log_{0.25} x = 3$ ，
所以 $x = (0.25)^3 = (2^{-2})^3 = 2^{-6}$ ，
又因為 $2^y = 3$ ，

$$\text{所以 } x^y = (2^{-6})^y = (2^y)^{-6} = 3^{-6} = \frac{1}{729}，$$

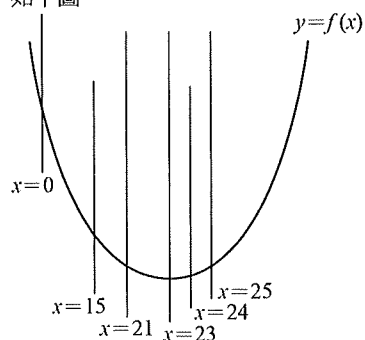
故選(5)。

2. 【知識點】數據分析、多項式函數

【解析】設 $s = 36^2 + 1^2 + 21^2 + 21^2 + 8^2 + 3^2 + 15^2 + 10^2 + 92^2$ ，
 $f(x)$ 為 36, 1, 21, 21, 8, 3, 15, 10, 92, x 之變異數，

$$\begin{aligned} \text{則 } 10 \cdot f(x) &= (s + x^2) - 10 \times \left(\frac{207 + x}{10} \right)^2 = \frac{9x^2 - 414x - 207^2}{10} + s \\ &= \frac{9(x - 23)^2 - 23^2 \times 9 - 207^2}{10} + s \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = f(x)$ 是以 $x = 23$ 為對稱軸且開口向上之拋物線，
如下圖，



由上圖可看出 $f(24) < f(21) = f(25) < f(15) < f(0)$ ，
所以最小值為 s_4 ，
故選(4)。

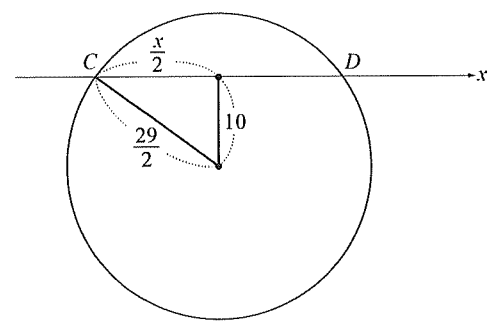
3. 【知識點】直線與圓

【解析】因為 Γ 之圓心為 $(-\frac{d}{2}, 0)$ 在 x 軸上，

所以 $\overline{AB}$ 為直徑。

又因為 $\overline{AB} = 29$ ，且 Γ, Γ' 全等，所以 Γ' 之半徑為 $\frac{29}{2}$ 。

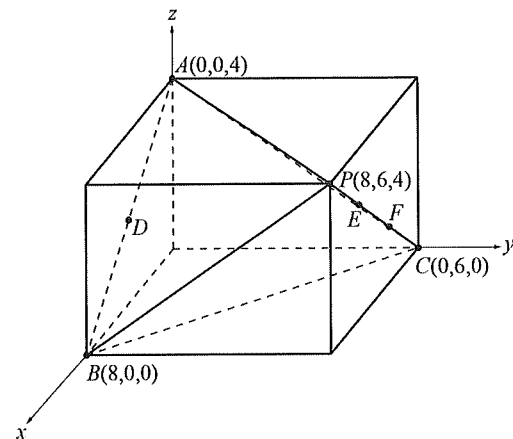
設 $\overline{CD} = x$ ，因為 $(\frac{x}{2})^2 + 10^2 = (\frac{29}{2})^2$ ，所以 $x = 21$ ，



故選(3)。

4. 【知識點】空間概念

【解析】於空間坐標中作一長方體，如下圖，
取 $A(0, 0, 4)$ 、 $B(8, 0, 0)$ 、 $C(0, 6, 0)$ ，



因為 D 是 $\overline{AB}$ 之中點，所以 D 為 $(4, 0, 2)$ 。

因為 $\overline{PC}$ 之中點為 $F(4, 6, 2)$ ，

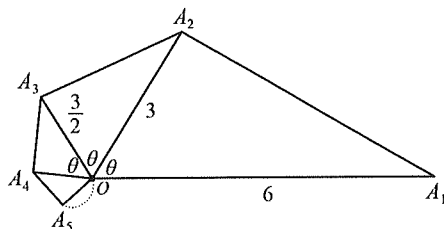
所以 $\overline{PF}$ 之中點 E 為 $(6, 6, 3)$ ，

故 $\overline{DE} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{41}$ ，

故選(1)。

5. 【知識點】三角比、數列與級數、極限與函數 B

【解析】



$$\text{因為 } \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_3}} = \frac{\overline{OA_3}}{\overline{OA_4}} = \dots = \frac{2}{1}，$$

且 $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \angle A_3OA_4 = \dots = \theta$ ，

所以 $\triangle A_1OA_2 \sim \triangle A_2OA_3 \sim \triangle A_3OA_4 \dots$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{\overline{A_4A_5}}{\overline{A_3A_4}} = \dots = \frac{1}{2}，$$

$$\text{又因為 } \overline{A_1A_2} = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{5}{9}} = \sqrt{25} = 5，$$

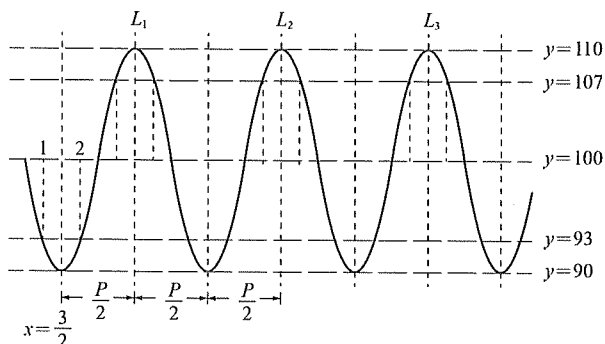
$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_nA_{n+1}} = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = 10，$$

故選(5)。

二、多選題

6. 【知識點】週期性數學模型

【解析】因為 $f(x) = 10 \sin(ax - b) + 100$ ，如下圖，



所以 $x = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2}$ ，可能是 $L_1, L_2, L_3, \dots$

設 $f(x)$ 的週期為 p ，則 $\frac{p}{2} \times (2n-1) = \frac{15}{2} - \frac{3}{2}$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ ，

所以 $p = \frac{12}{2n-1}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，

又 $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{a} < 2\pi = 6.28$ （因為 $a > 1$ ），

所以 p 可能為 $\frac{12}{3}, \frac{12}{5}, \frac{12}{7}, \frac{12}{9}, \frac{12}{11}, \dots$ ，

故選(3)(5)。

7. 【知識點】積分 B

【解析】

(1) $\bigcirc$ ： $f(0) = 33$ (m/sec)

$\Rightarrow$ 時速為 $33 \times 60^2 \div 1000 = 118.8$ (公里)。

(2) $\bigcirc$ ： $f(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 + 2t - 33 = 0 \Rightarrow t = 3$ 或 $-\frac{11}{3}$ (不合)。

(3) $\times$ ：因為 $\int_0^3 (-3t^2 - 2t + 33) dt = (-t^3 - t^2 + 33t) \Big|_{t=0}^3 = 63$ ，
所以相距至少 63 m。

(4) $\bigcirc$ ： $\frac{63}{3} = 21$ (m/sec)。

(5) $\bigcirc$ ：因為 $-3t_0^2 - 2t_0 + 33 = 21$ ，

所以 $3t_0^2 + 2t_0 - 12 = 0$ ， $t_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{3}$ 。

因為 $t_0 > 0$ ，所以 $t_0 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{3} \approx 1.7$ 。

故選(1)(2)(4)(5)。

8. 【知識點】條件機率與貝氏定理 B 、分布與統計 B

【解析】

(1) $\bigcirc$ ： $p(X=1) = \frac{1}{2}$ 。

(2) $\bigcirc$ ： $p(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 。

白 紅

(3) $\times$ ： $p(X=4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{30}$ 。

(4) $\times$ ： $p(X \leq 5) = \sum_{k=1}^5 p(X=k)$
 $= \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{(k+1)} \right)$
 $= \sum_{k=1}^5 \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^5 \frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$
 $= \sum_{k=1}^5 \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right]$
 $= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \dots + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} \right)$

$$= 1 - \frac{1}{720} < 1 - \frac{1}{1000} = 0.999。$$

<另解>

$p(X \leq 5) = 1 - p(X > 5) = 1 - \text{前五次都抽白的機率}$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}$$

$$= 1 - \frac{1}{720} < 1 - \frac{1}{1000} = 0.999。$$

$$(5) \times : \frac{\frac{1}{11!}}{\frac{1}{8!}} = \frac{1}{990} > \frac{1}{1000}。$$

故選(1)(2)。

9. 【知識點】微分 B

【解析】 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 8$ 。

(1) $\times$ ：因為中心點的 x 坐標為 $-\frac{3}{3 \cdot (-1)} = 1$ ，

所以 $(1, f(1))$ 為 $y = f(x)$ 之中心點，

即 $(1, 19)$ 為 $y = f(x)$ 之中心點。

(2) $\bigcirc$ ：因為 $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$
 $= -3(x-3)(x+1)$ ，

x		-1		3	
$f'(x)$	$-\searrow$	0	$+\nearrow$	0	$-\searrow$

所以在 $[-1, 3]$ ， $f(x)$ 為遞增函數

$\Rightarrow f(1.987) < f(2.345)$ 。

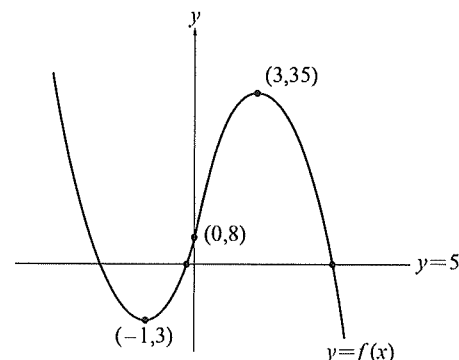
(3) $\bigcirc$ ：因為 $f(0) = 8$ 且 $(0, 8)$ 滿足 $y = (x^3 - 2)(3x^2 - 4)$ ，
所以 $y = f(x)$ 與 $y = (x^3 - 2)(3x^2 - 4)$ 的圖形有交點在 y 軸上。

(4) $\times$ ：因為極大值： $f(3) = -3^3 + 3^3 + 27 + 8 = 35$ ，

極小值： $f(-1) = 1 + 3 - 9 + 8 = 3$ ，

所以極大值+極小值=38。

(5) $\bigcirc$ ：



由上圖知 $f(x) = 5$ 有 1 正根 2 負根。

故選(2)(3)(5)。

三、選填題

10. 【知識點】矩陣與資料表格

【解析】

因為 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，所以 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

因為 $XA = B - A^2 = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ，

所以 $X^{-1}XA = X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +3 & +8 \\ +2 & +5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 。

11. 【知識點】平面上的比例

【解析】因為 $\overline{AB}=8$ ， $\overline{AC}=6$ ， $\angle A=90^\circ$ ，
所以 $\overline{BC}=10 \Rightarrow \overline{AD}=\overline{AE}=\frac{6+8-10}{2}=2$ ，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 0 - 2 \times 6 - 8 \times 2 + 0 \\ &= -28.\end{aligned}$$

12. 【知識點】排列組合與機率

【解析】

因為主食與配湯之選擇有 $(2 \times 3 + 1 \times 1)$ 種，

蔬菜之選擇有 $(C_2^3 + C_3^3)$ 種，又

水果品項數	1	1	2
甜點品項數	0	1	0
組合數	$C_1^3 C_0^2$	$C_1^3 C_1^2$	C_2^3

所以水果配甜點共有 $(3+6+3)$ 種選擇，
故所求 $= 7 \times 4 \times 12 = 336$ (種)。

第貳部分、混合題或非選擇題

13. 【知識點】複數平面 B 、多項式函數

【解析】

$$\text{因為 } f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + ax + b + 3i,$$

$$g(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + (a+1)x + b,$$

$$\text{所以 } f(x) - g(x) = -x + 3i$$

$$\Rightarrow f(1+i) - g(1+i) = -(1+i) + 3i$$

$$\text{因為 } f(1+i) = 4 + 2i,$$

$$\text{所以 } g(1+i) = (4+2i) + (1+i) - 3i = 5$$

$$\Rightarrow 1+i \text{ 是 } g(x) - 5 = 0 \text{ 之一根，}$$

$$\text{又因為 } g(x) - 5 = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + (a+1)x + b - 5$$

是實係數多項式，

$$\text{所以 } 1-i \text{ 是 } x^4 - 4x^3 + 5x^2 + (a+1)x + b - 5 = 0 \text{ 之一根}$$

$$\Rightarrow g(1-i) - 5 = 0 \Rightarrow g(1-i) = 5,$$

$$\text{所以 } g(1+i) + 2g(1-i) = 15.$$

14. 【知識點】多項式函數、複數平面 B

【解析】

$$\text{因為 } [x - (1+i)][x - (1-i)] \text{ 為}$$

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 + (a+1)x + b - 5 \text{ 之因式}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 \text{ 為 } x^4 - 4x^3 + 5x^2 + (a+1)x + b - 5 \text{ 之因式 (2分)}$$

$$\begin{array}{r} 1-2-1 \\ 1-2+2 \quad 1-4+5+(a+1)+(b-5) \\ 1-2+2 \\ -2+3+(a+1) \\ -2+4-4 \\ -1+(a+5)+(b-5) \\ -1+2-2 \\ (a+3)+(b-3) \end{array}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a+3=0 \\ b-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=3 \end{cases} \text{ (2分)}$$

15. 【知識點】多項式函數、複數平面 B

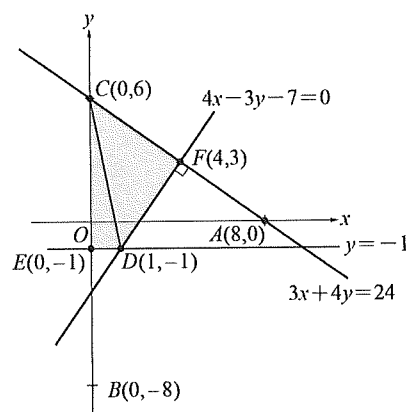
【解析】

$$\text{因為 } g(x) - 5 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 1),$$

$$\text{所以 } g(x) = 5 \text{ 之解為 } 1 \pm i, 1 \pm \sqrt{2}. \text{ (每一解 1 分, 共 4 分)}$$

16. 【知識點】平面上的比例、直線與圓

【解析】



因為 $\overline{AC}$ 之中點為 $(4, 3)$ ， $\overrightarrow{AC} = (-8, 6) \parallel (4, -3)$ ，
所以 $\overline{AC}$ 之中垂線為 $4x - 3y = 7$ ，(2分)

因為 $\overline{BC}$ 之中點為 $(0, -1)$ ， $\overrightarrow{BC} = (0, 14) \parallel (0, 1)$ ，
所以 $\overline{BC}$ 之中垂線為 $y = -1$ ，(2分)

因為 P 在 $\triangle ABC$ 內部 (含邊界)，且 $\begin{cases} \overline{PA} \geq \overline{PC} \\ \overline{PB} \geq \overline{PC} \end{cases}$ ，

$$\text{所以 } \Gamma: \begin{cases} 3x + 4y \leq 24 \\ 4x - 3y \leq 7 \\ y \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ (2分)}$$

17. 【知識點】直線與圓

【解析】

① 設 D 為 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 之兩中垂線的交點 $\Rightarrow D(1, -1)$

② 連 $\overline{CD}$ ，則

$$\begin{aligned}\Gamma \text{ 之面積} &= \triangle CDF \text{ 面積} + \triangle CDE \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 7 \times 1 = 16.\end{aligned}$$

18. 【知識點】線性規劃

【解析】

x	0	1	4	0
y	-1	-1	3	6
$-x + ay + 18$	$-a + 18$	$-a + 17$	$3a + 14$	$6a + 18$

因為 $a > 0$ ，所以最大值為 $6a + 18$ 。(2分)

$$\text{① 若 } -a + 17 \text{ 為最小值} \Rightarrow -a + 17 \leq 3a + 14 \Rightarrow a \geq \frac{3}{4},$$

$$\text{又 } (6a + 18) - (-a + 17) = 5$$

$$\Rightarrow 7a + 1 = 5 \Rightarrow a = \frac{4}{7} \text{ (不合).}$$

$$\text{② 若 } 3a + 14 \text{ 為最小值} \Rightarrow 3a + 14 \leq -a + 17 \Rightarrow a \leq \frac{3}{4},$$

$$\text{又 } (6a + 18) - (3a + 14) = 5$$

$$\Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{3}. \text{ (2分)}$$