數學乙考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)(3)(5)	(1)(2)(3)(5)
8.	9.					
(1)(2)(4)	(1)(4)					

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值不等式

解析：$15-15\times0.04\leq W\leq 15+15\times0.04$

$\Rightarrow 15-0.6\leq W\leq 15+0.6$

$\Rightarrow |W-15|\leq 0.6$

$\therefore a=-15$，$b=0.6$

故選(4)。

2. (3)

出處：第四冊 A〈矩陣〉、第四冊 B〈矩陣與資料表格〉

目標：矩陣乘法、反矩陣的運算

解析：由題意知 $X\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 8 & 3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 8 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}^{-1}$

$=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 8 & 3\end{bmatrix}\times\dfrac{1}{-7}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{-7}\begin{bmatrix}9 & -1\\ 8 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{-7}\begin{bmatrix}-7 & -28\\ -14 & -21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

故選(3)。

3. (1)

出處：選修數學乙(下)〈機率統計〉

目標：二項分布

解析：設隨機變數 X 表示丟此不公正的骰子 300 次得到奇數點數的次數

則 $X\sim B\left(300,\dfrac{1}{4}\right)$

$\therefore X$ 的標準差 $\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{300\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}}$

$=\dfrac{15}{2}=7.5$ (次)

故選(1)。

4. (2)

出處：第三冊 A〈指數與對數函數〉、第三冊 B〈按比例成長模型〉

目標：指數函數、對數律

解析：每個月每位成員都要找 2 個新成員，因此每個月後，公司成員人數會變為原來的 3 倍

故 n 個月後公司體系成員人數為 1×3^n 人

$3^n>8000000000$

$\Rightarrow (10^{\log 3})^n>2^3\times10^9=(10^{\log 2})^3\times10^9$

$\Rightarrow 10^{n\log 3}>10^{9+3\log 2}$

$\Rightarrow n\log 3>9+3\log 2$

$\Rightarrow n>\dfrac{9+3\log 2}{\log 3}\approx\dfrac{9.9030}{0.4771}\approx 20.8$

$\therefore n\geq 21$

故選(2)。

5. (3)

出處：第三冊 A〈三角函數〉、第三冊 B〈正弦函數與週期性現象〉

目標：理解函數週期的定義、了解正弦函數圖形的重要特徵：週期、振幅、認識週期性現象，並能用正弦函數的伸縮平移 $B+A\sin(\omega t+\phi)$，也就是正弦波，作為該現象的數學模型

解析：由題意中最高點高度時間到最低點高度時間為週期 T 的一半，

即 $\dfrac{T}{2}=$ 下午 4 點 33 分－上午 10 點 15 分，

求得 $T=12$ 小時 36 分，

而中午 12 點 21 分離上午 10 點 15 分為 2 小時 6 分，

即為 $\dfrac{T}{6}$，

即 $\omega t+\phi$ 由 $\dfrac{\pi}{2}$ 變成 $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$

最高點為 $B+A=380$ 與最低點 $B-A=80$，

解出 $B=230$，$A=150$

$\therefore$ 中午 12 點 21 分時的海水高度為

$B+A\sin(\omega t+\phi)=230+150\sin\dfrac{5\pi}{6}=305$

故選(3)。

二、多選題

6. (1)(3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、選修數學乙(下)〈複數與多項式方程式〉

目標：方程式的虛根、虛根成對性質、三次函數圖形的對稱性、局部近似直線

解析：(1) ○：$1+2i$ 為 $f(x)=0$ 的一個虛根

$\Rightarrow 1-2i$ 亦為 $f(x)=0$ 的一個虛根

(2) ╳：$[x-(1+2i)][x-(1-2i)]=0$

$\Rightarrow x^2-2x+5=0$

設 $f(x)=(x+t)(x^2-2x+5)$

又 $f(2)=5\Rightarrow t=-1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-2x+5)=x^3-3x^2+7x-5$

$\therefore b=-3$，$c=7$，$d=-5$

故 $b+c+d=-1$

(3) ○：$h=-\dfrac{-3}{3\times1}=1$

$f(x)$ 以 $(x-1)$ 連續除之可得

$f(x)=(x-1)^3+4(x-1)$ $\therefore k=0$

(4) ╳：$\because f(x)=(x-1)^3+4(x-1)$

$\therefore y=f(x)$ 的圖形對稱於點 $(1,0)$

(5) ○：$\because f(x)=(x-1)^3+4(x-1)$

$\therefore y=f(x)$ 在 $x=1$ 附近近似於直線

$y=4x-4$

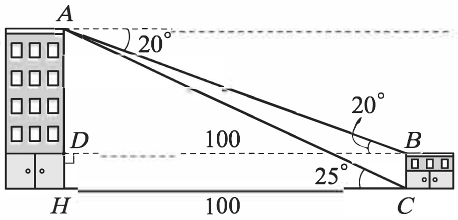
故選(1)(3)(5)。

7. (1)(2)(3)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：能嫺熟地轉換直角三角形的三角比概念

解析：設甲塔塔底點 H，乙塔塔頂點 B 至甲塔垂直距離為 $\overline{BD}$



由題意甲、乙兩塔的水平距離為 100 公尺，

得 $\overline{BD}=\overline{CH}=100$，

在△ABD 中由三角比得知，

$\overline{AB}=\dfrac{100}{\cos 20^\circ}$，$\overline{AD}=100\tan 20^\circ$，

同理在△ACH 中，

$\overline{AC}=\dfrac{100}{\cos 25^\circ}$，$\overline{AH}=100\tan 25^\circ$，其中 $\overline{AH}$ 為甲塔塔高

$\overline{DH}=\overline{AH}-\overline{AD}=100\tan 25^\circ-100\tan 20^\circ$ 為乙塔塔高

故選(1)(2)(3)(5)。

8. (1)(2)(4)

出處：第三冊 A〈平面向量〉、第三冊 B〈平面向量與應用〉

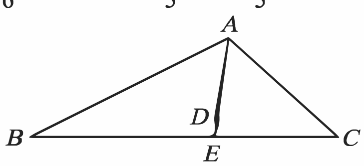
目標：向量的運算

解析：因為 $\overrightarrow{AD}\,/\!/\,\overrightarrow{AE}$，所以 $\overrightarrow{AD}=t\,\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{t}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{3t}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2t}\overrightarrow{AC}$

因為 B，E，C 三點共線，所以 $\dfrac{1}{3t}+\dfrac{1}{2t}=1\Rightarrow t=\dfrac{5}{6}$

故 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AE}$ 且 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$



(1)○：$\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AE}$，所以點 D 在△ABC 的內部

(2)○：$\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AE}$，

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AE}=6\,\overrightarrow{DE}$

(3)╳：$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，

由分點公式可知 $\overline{BE}:\overline{CE}=3:2$，

所以 $\overrightarrow{EB}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{EC}$

(4)○：∵ $\overline{AE}$ 是角平分線

∴ $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}=3:2$

故 $\overline{AB}=\dfrac{3}{2}\overline{AC}$

(5)╳：∵△ABE 和△ACE 高相同

∴ $\dfrac{\triangle ABE\text{ 面積}}{\triangle ACE\text{ 面積}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\dfrac{3}{2}$

故選(1)(2)(4)。

9. (1)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：平均數、中位數、相關程度

解析：(1)○：女性在 40 歲至 59 歲這個年齡層的投保率為 82.30 %，高於其他年齡層

(2)╳：在 15 歲至 19 歲這個年齡層的投保率，男性為 66.30 %高於女性 65.24 %

(3)╳：臺灣的人口總數為 23,420 (千人)，中位數約為第 11,710 (千人)

19 歲以下的人口總數為 3,829 (千人)，39 歲以下的人口總數為 9,930 (千人)，59 歲以下的人口總數為 17,368 (千人)，故中位數會落在 40 歲至 59 歲這個年齡層

(4)○：在男性各年齡層中，投保人數多的人口數就比較多，為正相關

(5)╳：無法從表格看到因果關係

故選(1)(4)。

三、選填題

10. $\dfrac{1}{5}$

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈數列與級數〉、選修數學乙(上)〈極限與函數〉

目標：循環小數化為分數、等比數列的遞迴關係、無窮等比級數求和

解析：$\begin{cases} a_1=0.15555\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 10a_1=1.5555\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

將②－①得 $9a_1=1.4$，解得 $a_1=\dfrac{7}{45}$

同理可得 $0.\overline{2}=\dfrac{2}{9}$

又 $a_n=0.\overline{2}\,a_{n-1}\Rightarrow\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=0.\overline{2}=\dfrac{2}{9}$ 為等比數列

∴公比 $r=\dfrac{2}{9}$

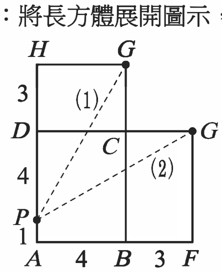
故無窮數列的和為 $\dfrac{a_1}{1-r}=\dfrac{7}{45}\times\dfrac{9}{7}=\dfrac{1}{5}$。

11. $\sqrt{65}$

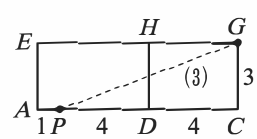
出處：第四冊 A〈空間向量〉、第四冊 B〈空間概念與空間坐標系〉

目標：利用長方體的展開圖討論表面上的兩點距離

解析：將長方體展開圖示，如下圖三種路徑



圖(一)



圖(二)

如圖(一)，$\overline{PG}=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$

如圖(二)，$\overline{PG}=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}$

即可得到最短距離為兩股 4 與 4＋3 的直角三角形

故螞蟻行走的最短距離為 $\sqrt{65}$。

12. 1996

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：組合

解析：

學測採計科目數	分科測驗採計科目數	方法數
4	1	$C_4^6 \times C_1^8 = 120$
3	2	$C_3^6 \times C_2^8 = 560$
2	3	$C_2^6 \times C_3^8 = 840$
1	4	$C_1^6 \times C_4^8 = 420$
0	5	$C_0^6 \times C_5^8 = 56$

故總計共有 $120+560+840+420+56=1996$ (種)。

第貳部分、混合題或非選擇題

13. (3)

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：導數的極限定義

解析：$\because \lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)=0 \Rightarrow f(1)=0$

故選(3)。

14. $6x+y-6=0$

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：切線與導數

解析：$\because \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-6$

$\therefore y=f(x)$在$x=1$時的切線斜率$f'(1)=-6$

又切點$(1, f(1))=(1, 0)$

$\therefore y=f(x)$ 在$x=1$時的切線方程式為$y-0=(-6)(x-1)$

即 $6x+y-6=0$。

◎評分原則

$\because \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-6$

$\therefore y=f(x)$在$x=1$時的切線斜率$f'(1)=-6$ (1 分)

又切點$(1, f(1))=(1, 0)$ (1 分)

$\therefore y=f(x)$ 在$x=1$時的切線方程式為$y-0=(-6)(x-1)$

即 $6x+y-6=0$。 (2 分)

15. -12

出處：選修數學乙(上)〈微分〉、選修數學乙(上)〈積分〉

目標：導數的極限定義、切線與導數、定積分、微積分基本定理

解析：設$f(x)=x^3+px^2+qx+r$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+2px+q$

$\because \begin{cases} f'(1)=-6 \\ f(1)=0 \\ f(-1)=8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3+2p+q=-6 \\ 1+p+q+r=0 \\ -1+p-q+r=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-2 \\ q=-5 \\ r=6 \end{cases}$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2-5x+6$

$\because f'(x)=g(x)$

$\therefore \int_{-1}^{2} g(x)dx=\int_{-1}^{2} f'(x)dx=f(2)-f(-1)$

$=(8-8-10+6)-8=-12$。

〈另解〉

設$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=-6$

$\Rightarrow 1+a+b=-6$

$\Rightarrow a+b=-7$……………①

又$f(-1)=8 \Rightarrow -2(1-a+b)=8 \Rightarrow -2+2a-2b=8$

$\Rightarrow a-b=5$………………②

由①、②解得 $a=-1$，$b=-6$

故$f(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$\int_{-1}^{2} g(x)dx=f(2)-f(-1)=-4-8=-12$。

◎評分原則

設$f(x)=x^3+px^2+qx+r$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+2px+q$ (1 分)

$\because \begin{cases} f'(1)=-6 \\ f(1)=0 \\ f(-1)=8 \end{cases}$ (1 分)

$\Rightarrow \begin{cases} 3+2p+q=-6 \\ 1+p+q+r=0 \\ -1+p-q+r=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-2 \\ q=-5 \\ r=6 \end{cases}$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ (2 分)

$\because f'(x)=g(x)$

$\therefore \int_{-1}^{2} g(x)dx=\int_{-1}^{2} f'(x)dx=f(2)-f(-1)$ (1 分)

$=(8-8-10+6)-8=-12$。 (1 分)

〈另解〉

設$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (1 分)

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=-6$ (1 分)

$\Rightarrow 1+a+b=-6$

$\Rightarrow a+b=-7$……………①

又$f(-1)=8 \Rightarrow -2(1-a+b)=8 \Rightarrow -2+2a-2b=8$

$\Rightarrow a-b=5$………………②

由①、②解得 $a=-1$，$b=-6$ (2 分)

故$f(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$\int_{-1}^{2} g(x)dx=f(2)-f(-1)=-4-8=-12$。 (2 分)

16. $(2, 1)$

出處：選修數學乙(下)〈線性規劃〉

目標：目標函數的一次式

解析：小翰打算今天吃x個甲廠牌軟糖，y個乙廠牌軟糖

而甲廠牌軟糖售價每個 2 元，乙廠牌軟糖售價每個 1 元

因此小翰需花維他命軟糖費用為 $2x+y$ 元

故數對$(a, b)=(2, 1)$。

17. $\begin{cases} 700\le 150x+90y+2100\le 3000 \\ 13\le 2x+2y+1\le 800 \\ 100\le 50x+10y \\ x\ge 0，y\ge 0 \end{cases}$

出處：選修數學乙(下)〈線性規劃〉

目標：能理解題意，並將問題建立為線性規劃的數學模型

解析：小翰今天攝取的維生素A共$150x+90y+2100$微克，

維生素E共$2x+2y+1$毫克，維生素C共$50x+10y$毫克

而維生素A建議量為 700 微克、上限不超過 3000 微克，

維生素E建議量為 13 毫克、上限不超過 800 毫克，

維生素 C 建議量為 100 毫克
顯然 x，$y \geq 0$ 為非負整數，

因此可得以下聯立不等式

$$\begin{cases} 700 \leq 150x+90y+2100 \leq 3000 \\ 13 \leq 2x+2y+1 \leq 800 \\ 100 \leq 50x+10y \\ x \geq 0，y \geq 0 \end{cases}。$$

◎評分原則

小翰今天攝取的維生素 A 共 $150x+90y+2100$ 微克，維生素 E 共 $2x+2y+1$ 毫克，維生素 C 共 $50x+10y$ 毫克
而維生素 A 建議量為 700 微克、上限不超過 3000 微克，
維生素 E 建議量為 13 毫克、上限不超過 800 毫克，
維生素 C 建議量為 100 毫克
顯然 x，$y \geq 0$ 為非負整數，
因此可得以下聯立不等式

$$\begin{cases} 700 \leq 150x+90y+2100 \leq 3000 & \text{(1 分，其中「} 700 \leq \text{」可省略)} \\ 13 \leq 2x+2y+1 \leq 800 & \text{(1 分，其中「} \leq 800 \text{」可省略)} \\ 100 \leq 50x+10y & \text{(1 分)} \\ x \geq 0，y \geq 0 & \text{(1 分)} \end{cases}。$$

18. 甲廠牌軟糖 1 個與乙廠牌軟糖 5 個，才能花費最少且最少花費是 7 元，圖略

出處：選修數學乙(下)〈線性規劃〉

目標：能理解平行直線系、能將聯立二元一次不等式的圖形繪製在坐標平面上、能知道可行解區域與目標函數的意義、能利用平行線法與頂點法求出最佳解

解析：$\because x，y \geq 0$

$\therefore 700 \leq 150x+90y+2100$ 必成立

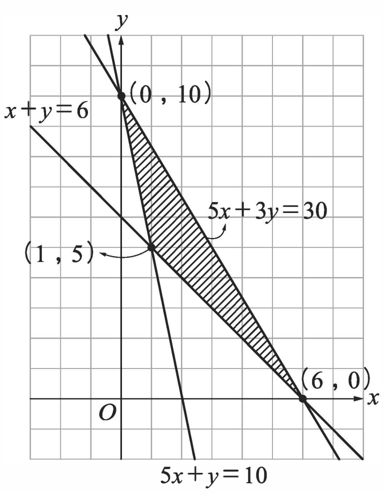
將 $150x+90y+2100 \leq 3000$ 化簡得 $5x+3y \leq 30$

$\because 5x+3y \leq 30$ 且 $x，y \geq 0$，則 $2x+2y+1 \leq 800$ 必成立

$\therefore$ 第 17. 題中的聯立不等式可化簡為

$$\begin{cases} 5x+3y \leq 30 \\ x+y \geq 6 \\ 5x+y \geq 10 \\ x \geq 0，y \geq 0 \end{cases}$$

可行解區域如下圖所示：



將頂點坐標代入目標函數 $2x+y$，得到數值如下表所示：

(x, y)	$(6, 0)$	$(1, 5)$	$(0, 10)$
$2x+y$	12	7	10

故小翰應吃甲廠牌軟糖 1 個與乙廠牌軟糖 5 個，才能花費最少且最少花費是 7 元。

◎評分原則

$\because x，y \geq 0$

$\therefore 700 \leq 150x+90y+2100$ 必成立

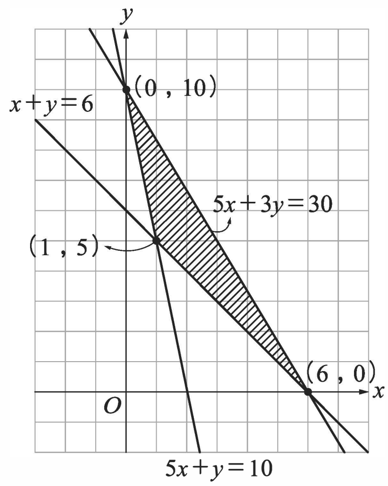
將 $150x+90y+2100 \leq 3000$ 化簡得 $5x+3y \leq 30$

$\because 5x+3y \leq 30$ 且 $x，y \geq 0$，則 $2x+2y+1 \leq 800$ 必成立

$\therefore$ 第 17. 題中的聯立不等式可化簡為

$$\begin{cases} 5x+3y \leq 30 \\ x+y \geq 6 \\ 5x+y \geq 10 \\ x \geq 0，y \geq 0 \end{cases} \quad \text{(2 分)}$$

可行解區域如下圖所示：



(2 分)

將頂點坐標代入目標函數 $2x+y$，得到數值如下表所示：

(x, y)	$(6, 0)$	$(1, 5)$	$(0, 10)$
$2x+y$	12	7	10

(2 分)

故小翰應吃甲廠牌軟糖 1 個與乙廠牌軟糖 5 個，才能花費最少且最少花費是 7 元。 (1 分)