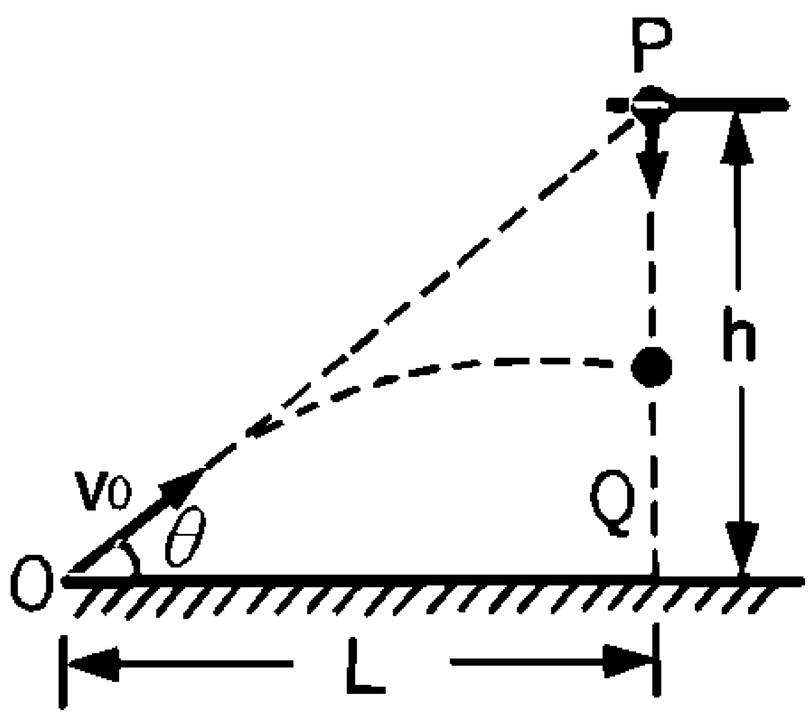
PHYSICS

第二章

平面運動



_____年 _____班 _____號

姓名：_____

吳錫玠老師 編授

吳錫玠老師 編授

觀念一　向量的大小&方向

一、向量

1. 純數：有數值、無單位、無方向性。

2. 純量：有數值、有單位、無方向性的物理量，稱為純量，如質量、時間、溫度.....等。

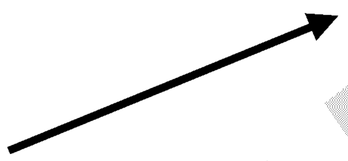
3. 向量：有數值、有單位、有方向性的物理量，稱為向量。如速度、加速度、位移，力.....等。

二、向量的表示

1. 圖示法：

(1)以箭號的長短，表示向量的大小。

(2)以箭號的方向，表示向量的方向。



2. 座標法：(相對於原點)

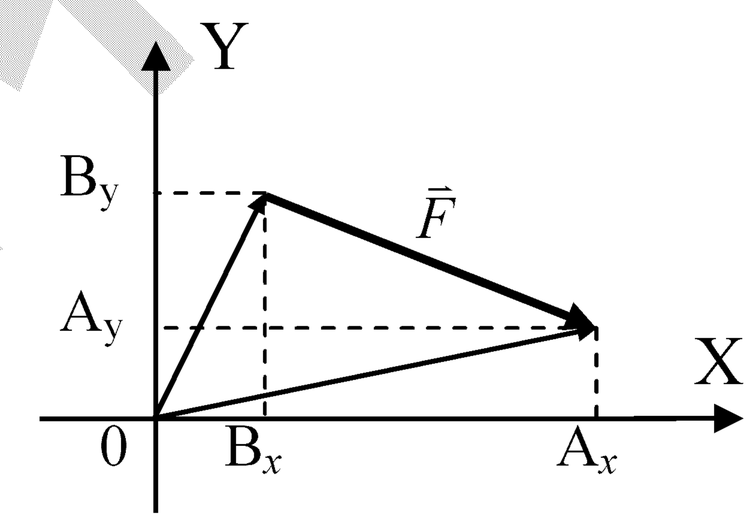
$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}=(A_x,A_y)$　　$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}=(B_x,B_y)$

3. 分量法：($\vec{F}=\vec{A}$ 相對於 $\vec{B}$ ＝由 $\vec{B}$ 指向 $\vec{A}$)

$\vec{F}=(末_x-初_y)\vec{i}+(末_x-初_y)\vec{j}$

$=(A_x-B_x)\vec{i}+(A_y-B_y)\vec{j}$

$=(A_x-B_x,A_y-B_y)$



三、向量的大小

$|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$　　$|\vec{B}|=\sqrt{B_x^2+B_y^2}$

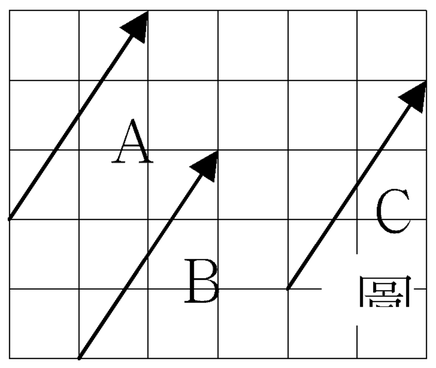
$|\vec{F}|=\sqrt{(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2}$

四、向量的角度

$\vec{A}$ 與 X 軸的夾角 $\tan\theta=\dfrac{A_y}{A_x}$

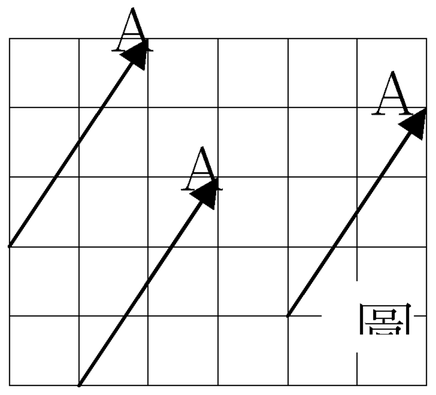
五、向量的性質

1. 相等：向量相等的充要條件是大小相等、方向相同。$\vec{A}=\vec{B}=\vec{C}$，如右圖



圖一

2. 平移：向量平移後，與原向量不僅大小相等，方向也相同，所以兩向量相等，代表向量可平移至任意位置。如右圖二。



圖二

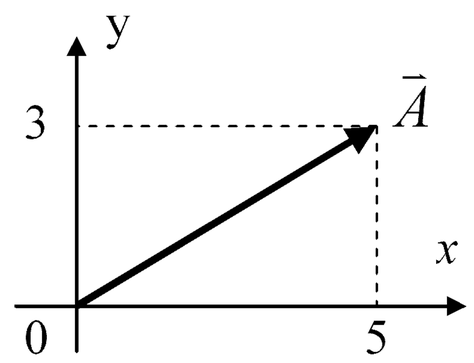
3. 交換律：$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

4. 結合律：$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})\ =\ (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

例1. 如右圖，在 xy 平面上有一向量 $\vec{A}$ ，求：

(1)其大小爲。

(2)以分量法表示 $\vec{A}$ ＝？答：(1) $\sqrt{34}$ (2) $5\hat{i}+3\hat{j}$



例2. 若 A=(2，5)，B=(-4，13)，求(1) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ =？ (2) $\overrightarrow{AB}$ 與 x 軸之夾角？答：(1)10；(2)127°

例3. 某向量在互相垂直之 x、y 及 z 三坐標之分向量 v_x 、 v_y 及 v_z ，與其合成向量 v 之夾角分別爲 θ_x 、 θ_y 及 θ_z 時，可得下何關係：(A) $v=v_x+v_y+v_z$ (B) $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$ (C) $\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=1$ (D) $\sin^2\theta_x+\sin^2\theta_y+\sin^2\theta_z=1$ (E) $v_x=v\cos\theta_x$ 、 $v_y=v\cos\theta_y$ 、 $v_z=v\cos\theta_z$ 。答：(B)(C)(E)

※家庭作業

1.設 $\vec{A}=3\vec{i}+4\vec{j}$ ，求(1)$\left|\vec{A}\right|$=？，(2) $\vec{A}$ 與 x 軸之夾角？答：(1)5；(2)53^{o}

2. 設 $\vec{A}=12\vec{i}-5\vec{j}$ ，求(1)$\left|\vec{A}\right|$=？，(2) $\vec{A}$ 與 x 軸之夾角？答：(1)13；(2) $\tan^{-1}\frac{-5}{12}$

3.請區別向量、純量及純數：(A)位移 (B)速率 (C)密度 (D)時間 (E)π (F)質量 (G)功 (H)動能 (I)體積 (J)力 (K)速度變化 (L)$\sqrt{5}$ (M)重量 (N)加速度 (O)面積 (P)電流 (Q)比重 (R)動量。。答：(1)向量：A J K M N R；(2)純量：B C D F G H I O P；(3)純數：E L Q

4.有一向量 $\vec{P}=3\hat{i}+4\hat{j}$ ，則：

(1)$\left|\vec{P}\right|$=？

(2) $\vec{P}$ 與 x 軸正方向之夾角爲？答：(1)5；(2)$53°$

5.有一向量之起點在(2，－1)，終點在(－3，2)，則此一向量之大小爲

(A)$\sqrt{23}$ (B)$\sqrt{34}$ (C)8 (D)13 (E)$\sqrt{29}$ 。答：(B)

6.兩向量 $\vec{A}=\vec{B}$ ，則下列關係正確者爲：

(A)$|\vec{A}|=|\vec{B}|$ (B)$|\vec{A}|=-|\vec{B}|$ (C)$|\vec{A}|=-|-\vec{B}|$

(D) $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 同方向 (E) $\vec{A}$ 與 $-\vec{B}$ 反方向 。 答：(A)(D)(E)

7.求三向量：$\vec{A}$=5，東偏北 37^{o}；$\vec{B}$=2.5，西偏北 53^{o}；$\vec{C}$=$2\sqrt{2}$ ，西偏南 45^{o} 的合向量。

答：$\frac{\sqrt{37}}{2}$，$\phi=\tan^{-1}6$，東偏北

8.有一向量其大小爲 13，終點在 (1，－1)，起點在 (x，4)，則 x 之值爲？

答：13 或 －11

觀念二　向量的加法、減法&分解

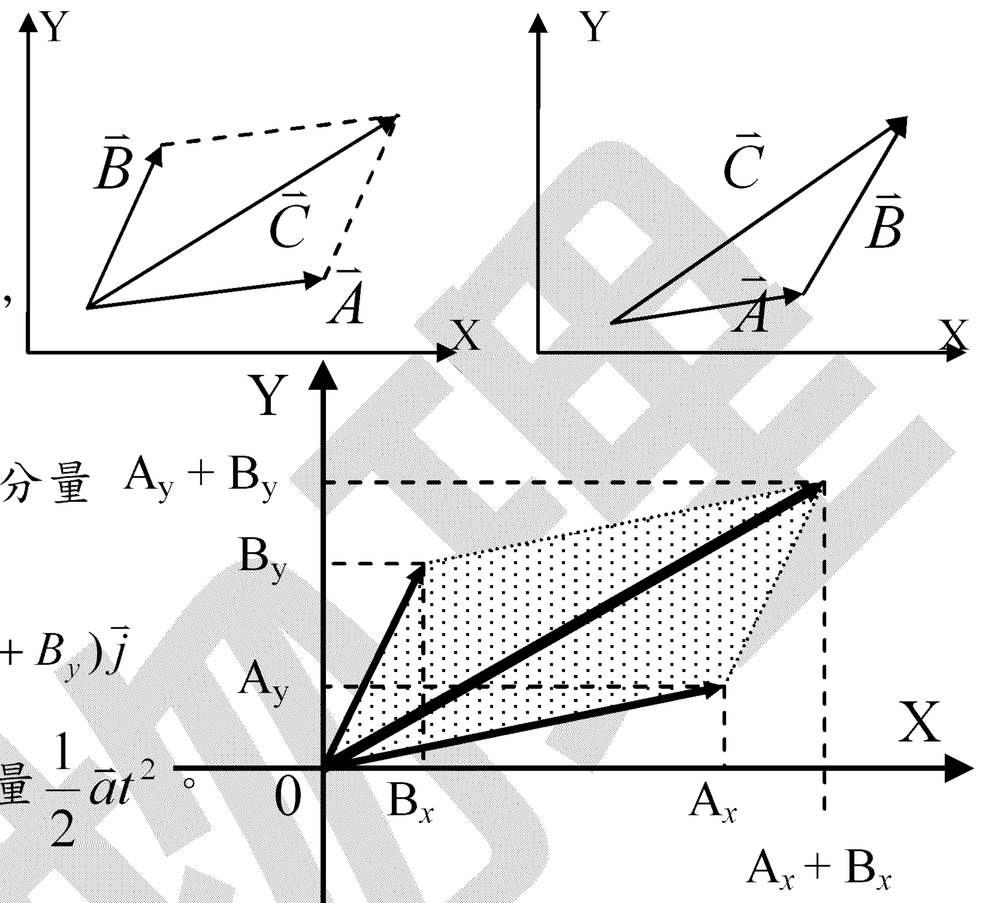
一、向量的加法

1. 平行四邊形法：向量和$\vec{C}$剛好為$\vec{A}$和$\vec{B}$所構成的平行四邊形的對角線。

2. 三角形法：將向量$\vec{B}$平移使$\vec{B}$起點與$\vec{A}$的終點重合，則$\vec{A}$的起點至$\vec{B}$的終點的向量$\vec{C}$即為$\vec{A}$與$\vec{B}$的和。

3. 分量法：將向量$\vec{A}$、$\vec{B}$分解在x、y方向上，再將各分量相加後求和。

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j})+(B_x\vec{i}+B_y\vec{j})=(A_x+B_x)\vec{i}+(A_y+B_y)\vec{j}$$



例：$\vec{S}=\vec{v}_o t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$表示位移向量$\vec{S}$等於向量$\vec{v}_o t$加上向量$\frac{1}{2}\vec{a}t^2$。

二、向量的減法

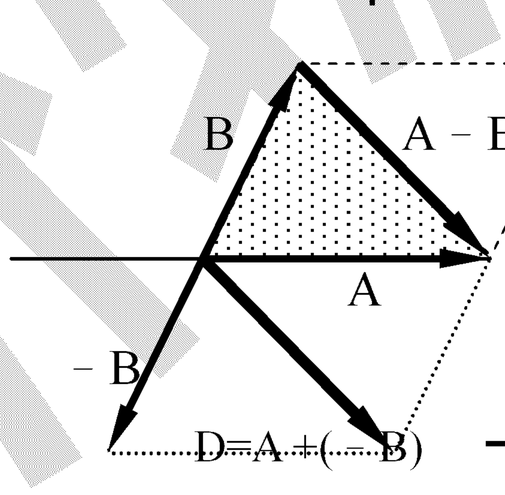
1. 作圖法:

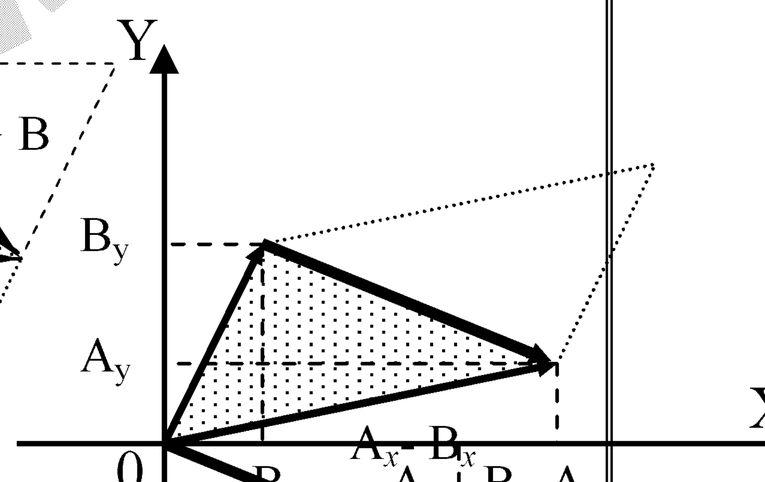
(1)將向量$\vec{B}$平移使$\vec{B}$起點與$\vec{A}$的起點重合，

則由$\vec{B}$的終點至$\vec{A}$的終點之向量即為$\vec{A}-\vec{B}$。

(2)向量$\vec{A}$與向量$\vec{B}$的向量差為$\vec{D}$，

則$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

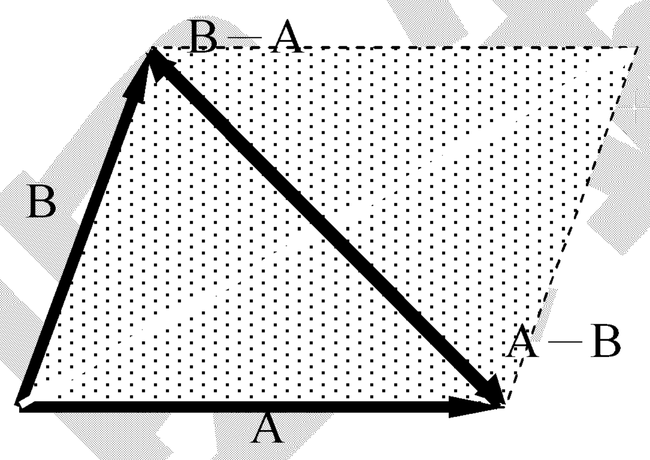




2. 分量法：$\vec{A}-\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j})-(B_x\vec{i}+B_y\vec{j})=(A_x-B_x)\vec{i}+(A_y-B_y)\vec{j}$

三、向量和、差的比較

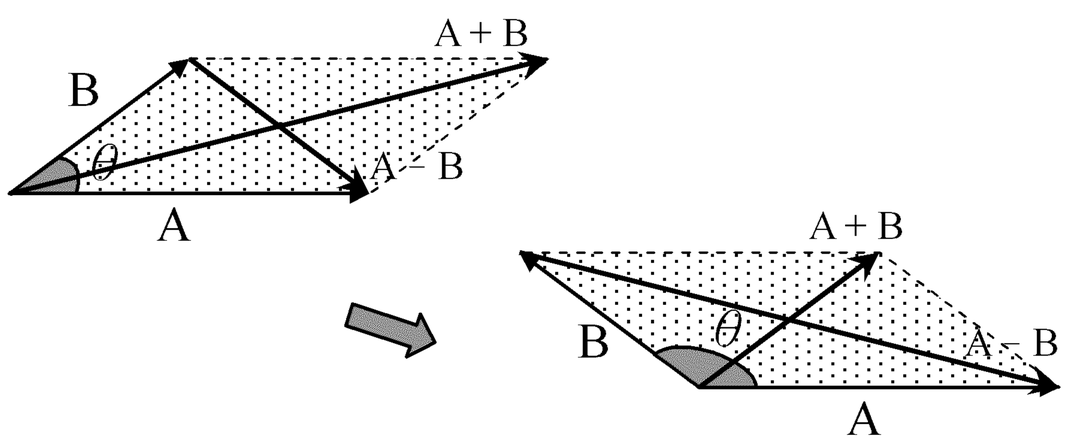
1. 作圖法總結：



2. 兩向量間夾角的大小對於和、差的影響：

(1)兩向量間的夾角越大，其向量和越小。

(2)兩向量間的夾角越大，其向量差越大。



例4. 設向量 $\vec{A}=15$ 單位，方向爲東偏北 37°，向量 $\vec{B}=20$ 單位，方向爲西偏北 53°，若取向東、向北的單位向量各爲 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ ，則：(1)將 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 各以向量方程式表示之，(2)試求 $\vec{A}+\vec{B}$ 與 $\vec{A}-\vec{B}$ ，並比較其大小。

例5. 設有兩向量的量值相等，即 A = B ，則： (1)$|\vec{A}+\vec{B}|$ = A 時 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 之夾角爲何？ (2)$|\vec{A}-\vec{B}|$ = A 時 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$ 之夾角爲何？圖示說明之。答：(1)120^{o}；(2)60^{o}

例6. 設 $\vec{v}_A$ 、 $\vec{v}_B$ 、 $\vec{v}_C$ 分別表示 A、B、C 三人的速度，假設 $\vec{v}_A+\vec{v}_B+\vec{v}_C=0$ ，而且 A、B 二人速率之和等於 C 之速率，則下列情況中哪些是可以發生的？ (A)A、B、C 三人運動方向互相垂直 (B)A 靜止，B 與 C 均不靜止 (C)B 靜止，A 與 C 均不靜止 (D)C 靜止，A 與 B 均不靜止 (E)A、B、C 運動方向互相平行。【71 日大】答：(B)(C)(E)

※家庭作業

1.若兩向量大小相等不平行，則其向量和與向量差：(A)平行 (B)垂直 (C)可能夾任何角度 (D)60° (E)120° 。答：(B)

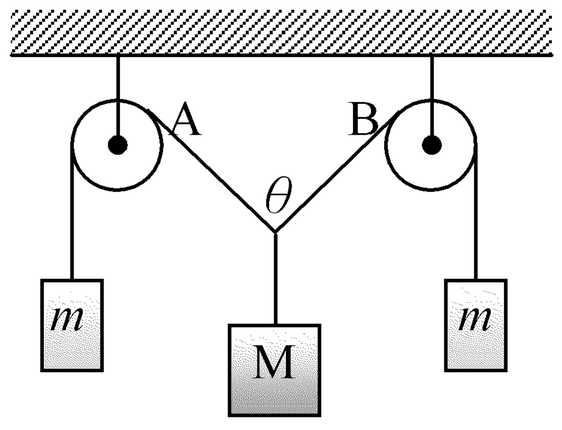
2.兩向量之和與差大小相等，則此兩向量之夾角(A)30^o (B)45^o (C)53^o (D)60^o (E)90^o。答：(E)

3.可任意改變方向之兩向量，兩向量和之最大值為 x，最小值 y，若此兩向量垂直時其和為若干？ (A)x＋y (B)x－y (C)$\sqrt{x^2+y^2}$ (D) $\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ (E) 0 。答：(D)

4. 12 牛頓的力可分解為 4 牛頓的力與 (A)8 (B)6 (C)15 (D)18 (E)19 牛頓的力。答:(A)(C)

5.已知兩向量，$\vec{A}$ 為 6.0 單位長、$\vec{B}$ 為 9.0 單位長時，$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$ 不能為:(A)15 (B)14 (C)10 (D)3.0 (E)2.0 。答：(E)

6.如右圖，平衡時 A、B 兩繩之夾角為θ，若物體 M 之大小固定，則當θ越大時，兩旁之物體的質量 m 越？答：大



7.課堂上，請 A、B、C 三位同學將 10kgw 的力分解成兩個分力。A 分得的兩分力大小為 6kgw、8kgw，B 分得的兩分力大小為 5kgw、7kgw，C 分得的兩分力大小為 7kgw、11kgw，若三人所分解的兩力之夾角依序為 θ_A、θ_B、θ_C。則其大小為 (A)$\theta_A > \theta_B > \theta_C$ (B)$\theta_C > \theta_A > \theta_B$ (C)$\theta_B > \theta_A > \theta_C$ (D)$\theta_A = \theta_B = \theta_C$ (E)$\theta_B > \theta_C > \theta_A$。答：(B)

8.有關向量之運算，下列何者不真？ (A)若 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ 且 $A+B=C$，則表示 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 同向 (B) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{A}-\vec{B}$ 是不可能的 (C) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ 且 $A^2+B^2=C^2$，則表示 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 互相垂直 (D) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ 且 $|\vec{A}-\vec{B}|=C$，則表示 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 反向平行。答：(B)

9.設一物體所受諸力之合力為 $\vec{F}$ ，則：(A)各分力的大小均比 F 小 (B)各分力大小之和等於 F (C)各分力大小與 F 並無一定關係 (D)若任兩分力皆彼此互相垂直，則各分力大小皆比 F 小 (E)若各分力不在一直線上時，各分力與 $\vec{F}$ 恰構成一封閉多邊形。答：(C)(D)(E)

觀念三　餘弦定律

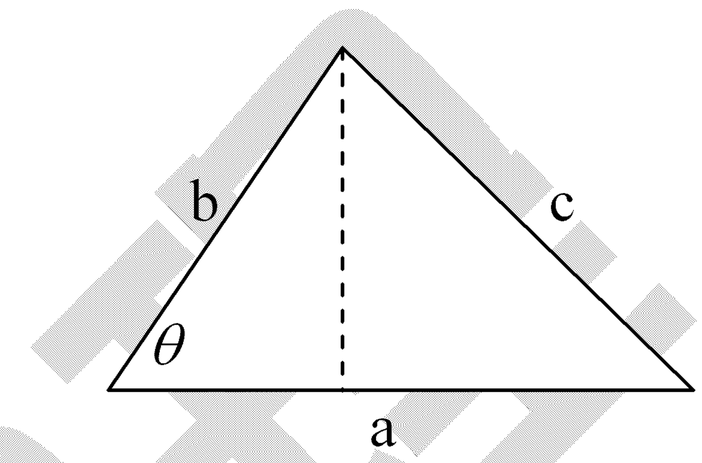
一、餘弦定律

公式：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

證明：

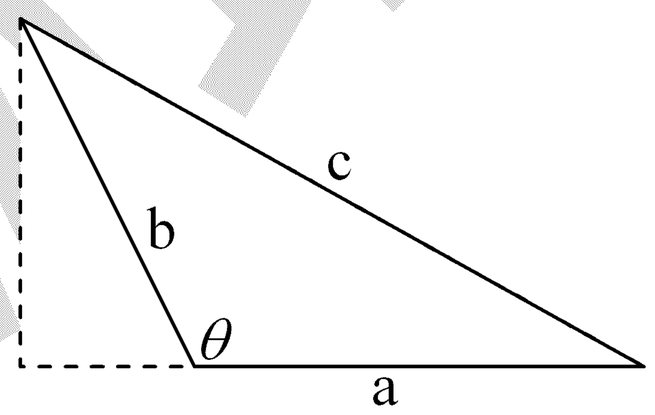
(1)若$\theta < 90°$

$$c^2 = (a - b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2$$
$$= a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$



(2)若$\theta > 90°$

$$c^2 = (a + b\cos(180° - \theta))^2 + (b\sin(180° - \theta))^2$$
$$= (a - b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2$$
$$= a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$



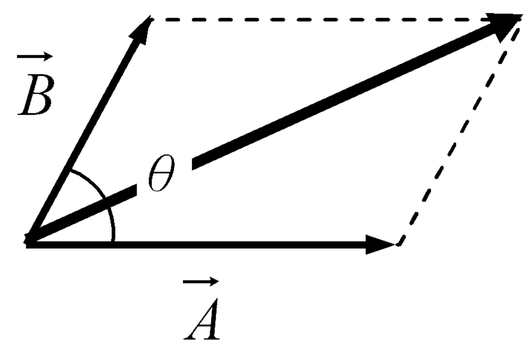
二、運算向量和的大小：

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x, A_y) + (B_x, B_y) = (A_x + B_x, A_y + B_y)$$

(1) $\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$

(2) $\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos(180° - \theta)}$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

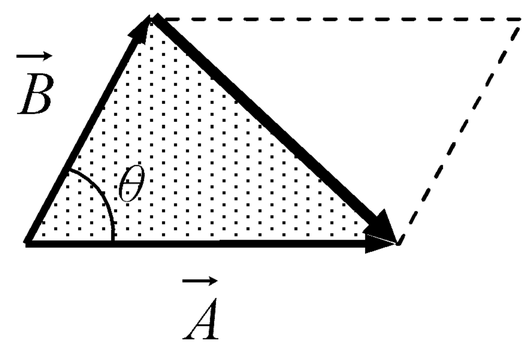


三、運算向量差的大小：

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x, A_y) - (B_x, B_y) = (A_x - B_x, A_y - B_y)$$

(1) $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2}$

(2) $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$



四、有天，大象問駱駝說: 「你的奶奶怎麼長在背上??」

駱駝聽了之後，狠狠瞪了大象一眼.說:「這由一個老二長在臉上的大象來問是不是太奇怪了...」

大象:.....

例7. 若$\left|\vec{A}\right|$=6，$\left|\vec{B}\right|$=8，且$\vec{A}$與$\vec{B}$的夾角爲60^{o}，則

(1)$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$= (A) 10 (B) 14 (C)$2\sqrt{37}$ (D) 2 (E) 5 。

(2)$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$= (A) 10 (B) 14 (C)$2\sqrt{37}$ (D)$2\sqrt{13}$ (E) 5 。

例8. 兩向量之和爲 R，差爲 D。今使此兩向量大小不變，但方向互相垂直，則此兩新向量之：(1)和？ (2)差？答：(1)$\sqrt{\frac{1}{2}(R^2+D^2)}$；(2)$\sqrt{\frac{1}{2}(R^2+D^2)}$

例9. $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$且$\vec{a}$、$\vec{b}$不爲零向量，若$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{2}\left|\vec{a}\right|$，求$\vec{a}$、$\vec{b}$之夾角。答：$30^{o}$

※家庭作業

1.兩大小均為 a 之向量夾角θ，則

(1)其和為(A)$2a\sin\theta$ (B)$2a\cos\theta$ (C)$2a\sin\frac{\theta}{2}$ (D)$2a\cos\frac{\theta}{2}$ (E)$2a\tan\frac{\theta}{2}$。

(2)其差為(A)$2a\sin\theta$ (B)$2a\cos\theta$ (C)$2a\sin\frac{\theta}{2}$ (D)$2a\cos\frac{\theta}{2}$ (E)$2a\tan\frac{\theta}{2}$。答：(C)；(D)

2.$\vec{A}$、$\vec{B}$二向量之夾角為θ時，其合向量大小為$(2m+1)\sqrt{A^2+B^2}$；當夾角為$(90°-\theta)$時，其合向量之大小為$(2m-1)\sqrt{A^2+B^2}$，試以θ表示 m 之值。答：$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

3.二向量 A、B(A≠B)，其合向量大小為$\sqrt{3}B$，其方向與 A 之夾角為30°，則當此二向量正交時，其合向量之大小為 (A)$\sqrt{3}A$ (B)$\sqrt{5}A$ (C)$\sqrt{3}B$ (D)$\sqrt{5}B$ (E)以上皆非。答：(D)

4.二向量大小相等，夾角為θ時其合向量大小為a，差向量大小b，則$a:b$之值為 (A)$\cot\theta$ (B)$\tan\theta$ (C)$\cot\frac{\theta}{2}$ (D)$\tan\frac{\theta}{2}$。答：(C)

5.夾角60^o之$\bar{a}$、$\bar{b}$兩向量之和為$\sqrt{13}$，若使其相垂直，則合向量之大小為$\sqrt{10}$，則：
(A)$a=5$，$b=7$ (B)$a=1$，$b=\sqrt{7}$ (C)$a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{3}$ (D)$a=3$，$b=1$ (E)$a=b=\sqrt{5}$。
答：(D)

6.若$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|=|\vec{b}|$時，$\bar{a}$與$\bar{b}$之夾角為 (A)0° (B)45° (C)60° (D)120°。答：(C)

7.兩向量 A、B 之大小分別為 5 和 3，夾角為37^o，求：(1)$\vec{A}+\vec{B}=$？ (2)$\vec{A}-\vec{B}=$？
答：(1)$\sqrt{58}$，$\phi=\tan^{-1}\frac{9}{37}$（$\phi$為與$\vec{A}$的夾角）；(2)$\sqrt{10}$，$\phi=\tan^{-1}\frac{9}{13}$

觀念四　向量的乘法(純數、內積&外積)

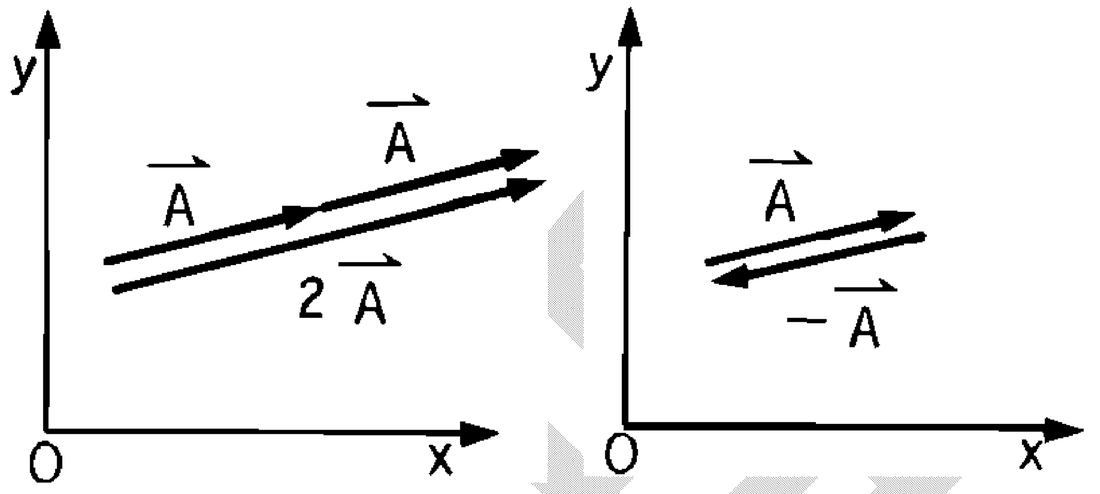
一、向量與純量的乘積

$n\vec{A}$ 表示將向量 $\vec{A}$ 放大 n 倍。例：

$\vec{A}=2\vec{i}+\vec{j}=(2,1)\Rightarrow 2\vec{A}=4\vec{i}+2\vec{j}=(4,2)$

表示將向量 $\vec{A}$ 放大 2 倍

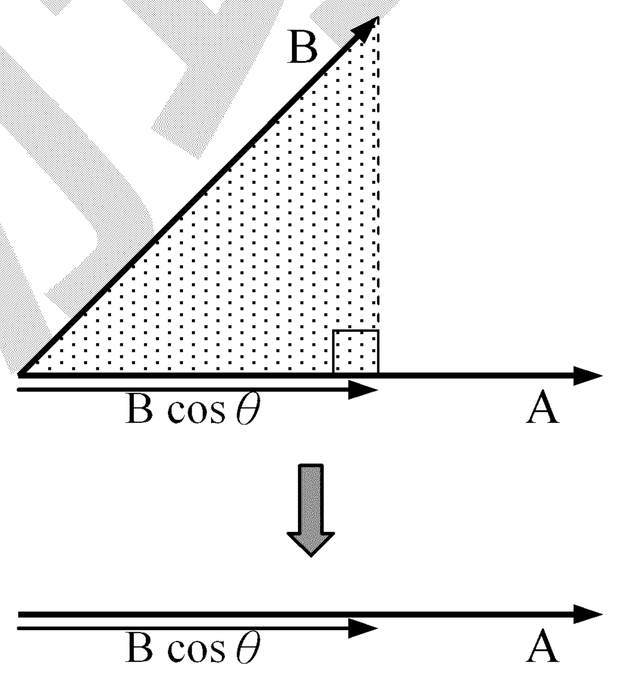
$(-1)\vec{A}=-2\vec{i}-\vec{j}=(-2,-1)$ 表示將向量支改變成反方向。



二、內積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x,A_y,A_z)\cdot(B_x,B_y,B_z)=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$



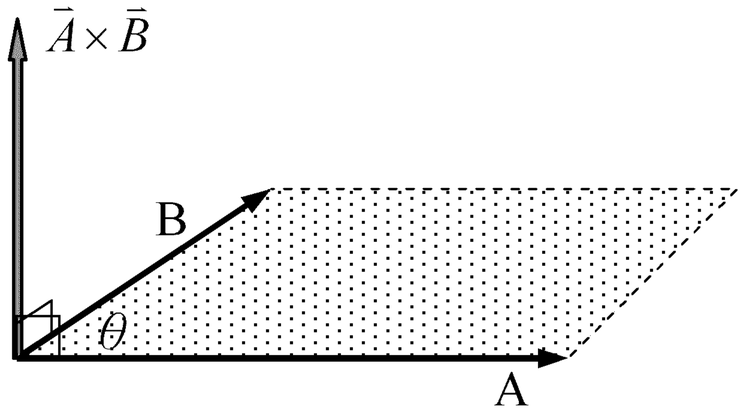
1. 兩向量之內積，結果為純量

2. 內積之意義為兩向量取互相平行之分量相乘

三、外積

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x,A_y,A_z)\times(B_x,B_y,B_z)$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$



$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y,A_zB_x-A_xB_z,A_xB_y-A_yB_x)$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta=\sqrt{(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2}$$

1. 兩向量之外積，結果為向量

2. 外積之大小：兩向量取互相垂直之分量相乘，等於 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 所展開之平行四邊形面積大小

   外積的方向：依 $\vec{A}\rightarrow\vec{B}$ 的順序，由右手定則判別，垂直於 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 的共平面。

例10. 若 $\vec{A}=2\hat{i}+\hat{j}$ ，$\vec{B}=-\hat{i}-2\hat{j}$ ，求：(1) $\vec{A}\cdot\vec{B}$=？ (2) $\vec{B}\cdot\vec{A}$=？答：(1) – 4；(2) – 4

例11. 若 $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ，$\vec{B}=3\hat{j}+\hat{k}$ ，則 $\vec{A}\times\vec{B}$=？答：$11\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

例12. 設 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 兩向量之大小分別為 5 及 4，其夾角為 30^{o}，則：

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=20$

(B) $\vec{a}+\vec{b}$ 之大小為 9

(C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=10\sqrt{3}$

(D) $\vec{a}\times\vec{b}$ 之大小為 10

(E) $\vec{a}\times\vec{b}$ 之大小為 $10\sqrt{3}$ 。答：(C)(D)

※家庭作業

1.設 K 為純量，$\vec{A}$ 為向量，則 K$\vec{A}$ 與 $\vec{A}$ 必定：

(A)單位相同，方向相同　　(B)單位相同，方向不同

(C)單位不同，方向相反或相同　　(D)單位不同，方向關係不確定

(E)單位相同，方向相同或相反。答：(C)

2.設 m 為小於 0 的純數，$\vec{A}$ 為向量，則 m$\vec{A}$ 為：

(A)向量 (B)與 $\vec{A}$ 同方向 (C)與 $\vec{A}$ 的性質不同 (D)與 A 的單位相同 (E)與 $\vec{A}$ 反方向。

答：(A)(D)(E)

3.有關 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 何者正確？

(A)等於 $\vec{B}\cdot\vec{A}$ (B)等於$(-\vec{A})\cdot(-\vec{B})$ (C)等於$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ (D)是向量 (E)是純量。

答：(A)B)(E)

4.某天國小老師出造句的作業

題目是：能幹、樹幹、苦幹、實幹、匪幹、高幹、才幹、公幹、主幹。

結果隔天老師看小明的作業時.不由噴飯，因為....

能幹：我們的政府真的很無能，幹。

樹幹：內閣都做那麼久了，還是沒有半點建樹，幹。

苦幹：害我們小老百姓的生活都很辛苦，幹。

實幹：連那些保衛國家的軍人都不老實，幹。

匪幹：這些官員真的是土匪，幹。

高幹：台灣的物價指數越來越高，幹。

才幹：ＸＸ 黨都不會重用人才，幹。

公幹：把所有財產都充公，幹。

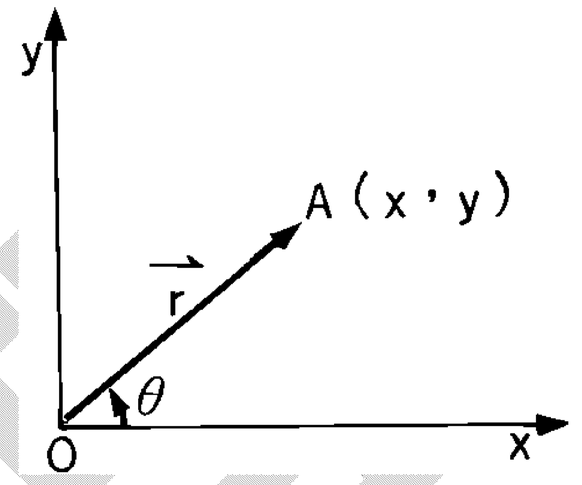
主幹：還騙我們說一切都是以民為主，幹。

師評：幹的好！！

觀念五　位置向量&位移向量

一、位置向量

1. 在質點運動的平面上，取一適當的位置為參考點，作為直角座標系 X 與 Y 的原點。如右圖所示。



2. 圖中 A 點的位置與 O 點形成一有向線段

$$\overrightarrow{OA}=\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=(x,y)$$

(1)$\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 為 x 與 y 軸的單位向量。

(2)以箭矢長度表向量的量值$\left|\vec{r}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$ 。

(3)位置向量的方向則以與 x 軸之間的夾角θ表示：$\tan\theta=\frac{y}{x}$ 。

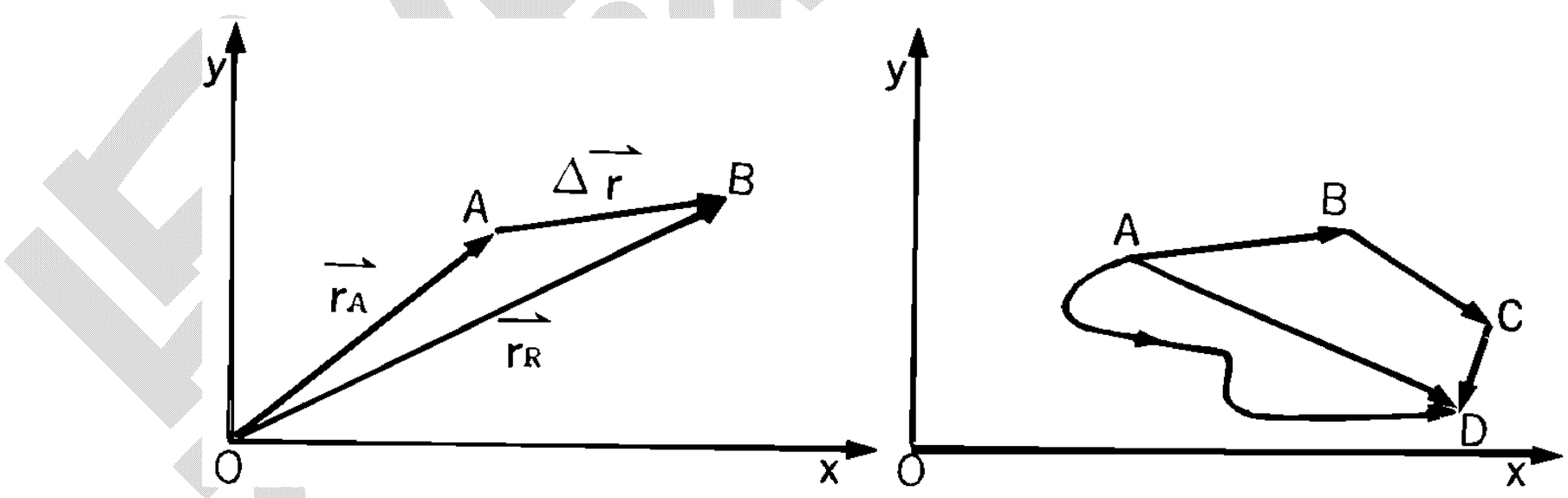
二、位移向量

1. 位移向量$\Delta\vec{r}$ ：質點位置的變化量。

2. 當質點由 A 移至 B 點時，$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\Delta\vec{r}=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}$

3. 位移是反應運動的結果，即前後位置的變化，它和所經的運動路徑無關。

如下列右圖中，質點可沿不同路徑由 A 至 D 點，但兩種路徑的位移相向，均為$\overrightarrow{AD}$ 。



三、有兩個外國人到家樂福去購物，結帳時，店員問：「Can you speak chinese?」

兩個外國人用國語回答：「如果你講慢一點的話，我們可以聽的懂！」

店員說：「Can...you...speak...chinese？」

例13.一時鐘之秒針長 20 公分，今以鐘面圓心處爲直角坐標原點，3 點鐘方向及 12 點鐘方向分別爲 x 及 y 的正方向，求： (1)秒針指在兩點鐘方向時，針尖上一點之位置向量 (2)秒針由指在兩點鐘方向開始經過 15 秒鐘時，針尖上一點之位置向量及位移。(以分量表示) 答：(1)$10\sqrt{3}\vec{i}+10\vec{j}$ (cm)；(2)位置向量$10\vec{i}-10\sqrt{3}\vec{j}$ (cm)，位移$(10-10\sqrt{3})\vec{i}-(10\sqrt{3}+10)\vec{j}$ (cm)

例14.某人由一位置出發，先向東偏北 53°方向走了 20 公尺後，再朝向東偏北 16°方向走了 30 公尺，問此人之總位移量值及路程？答：位移量值 47.5m，路程 50m

例15.有一螺旋其螺距爲 d，而螺旋截面半徑爲 R，今在螺旋上選定一點 P，求 (1)當螺旋旋進一整圈時，p 點之位移大小？ (2)當旋進 1/2 圈時 P 點之位移大小？ (3)當旋進 1/4 圈時 P 點之位移大小？ (4)轉一周之路程？

答：(1)d；(2)$\sqrt{4R^2+\frac{d^2}{4}}$；(3)$\sqrt{2R^2+\frac{d^2}{16}}$；(4)$\sqrt{d^2+4\pi^2R^2}$

※家庭作業

1.一質點從直角坐標上一點 A 沿一曲線移至坐標為(4，－7)的 B 點，其位移$\Delta \vec{r} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$，求 A 點之位置向量。答：$2\vec{i} - 12\vec{j}$

2.有一個指針式時鐘，轉動 1 周費時 60 秒。若針尖在 0～15 秒的位移表為$\vec{d}_1$，15～30 秒的位移為$\vec{d}_2$，0～30 秒的位移表為$\vec{d}_3$，30～45 秒的位移為$\vec{d}_4$，45～60 秒的位移為$\vec{d}_5$，則下列各項關係，何者為正確？

(A)$\vec{d}_1 = \vec{d}_2$ (B)$\vec{d}_1 = \vec{d}_4$ (C)$\vec{d}_1 = \vec{d}_5$ (D)$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = \vec{d}_4 + \vec{d}_5$ (E)$\vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5 = 0$。答：(E)

3.一質點向東移動 10 公尺，在向東偏北 60°，移動 10 公尺，則總位移與正東方夾角的正切值為 (A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C)$\frac{\sqrt{3}}{5}$ (D)$\frac{\sqrt{3}}{15}$ (E)$\frac{2\sqrt{3}}{5}$。答：(B)

4.某人欲到達距其現在位置 200 公尺東偏北 60°的某處，然而他只能沿著東西向或南北向的街道行走，問他抵達目的地所需走的最短路程為若干？答：173m

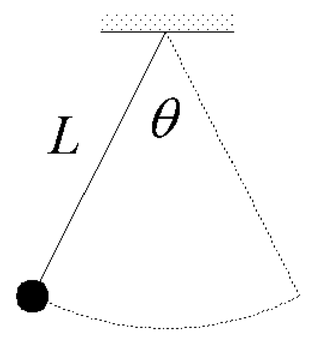
5.一隻螞蟻在唱片上距圓心 2.0 公分處，沿半徑向外走 3.0 公分，在此期間內唱片逆時針旋轉θ的角度，求各種情形下螞蟻之位移大小：

(1) 若$\theta = 90^o$，則位移為多少公分？

(2) 若$\theta = 180^o$，則位移為多少公分？答：(1)$\sqrt{29}$；(2) 7

6.擺長 L 的單擺，由左側開始擺動，則單擺在半個週期內的位移量值為

(A)$L\sin\theta$ (B)$2L\sin\theta$ (C) $2L\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (D)$2L\cos\theta$ (E) $2L\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 。答：(C)

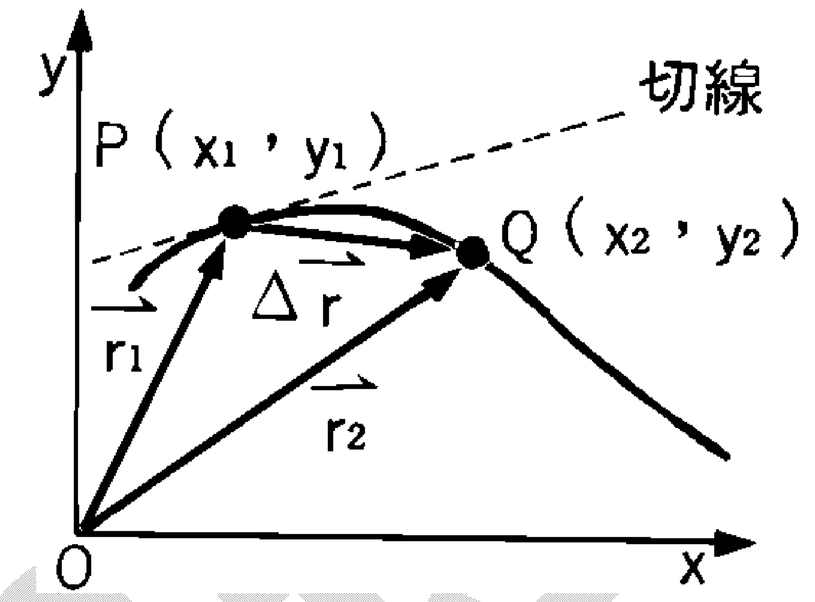


7.直升機的螺旋槳，每秒轉 25 轉，而機身以 4 m/s 速度上升，槳上一定點 P 距轉軸 2 米，則在螺旋槳轉 6.25 轉時，P 點位移的量值為若干米？

(A)$2\sqrt{3}$ (B)$2\sqrt{2}$ (C)4 (D)3 (E)2 。答：(D)

觀念六　速度&速率

當質點在t_1時刻由位置$P(x_1,y_1)$開始移動，於t_2時運動至$Q(x_2,y_2)$點。



一、平均速度

在t_1至t_2時間內

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}=\vec{v}_x\vec{i}+\vec{v}_y\vec{j}$$

平均速度的方向與位移方向相同。

二、瞬時速度

當t_2趨近於t_1（$\Delta t\to 0$）時，在t_1時刻的瞬時速度

$$\vec{v}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t})\vec{i}+(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t})\vec{j}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$$

1. 瞬時速度大小為$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$。

2. 瞬時速度方向為質點運動軌跡在該點的切線方向。

三、速率

平均速率$\bar{v}_s=\dfrac{\text{路徑長}\Delta S}{\text{時間}\Delta t}$

瞬時速率$v_s=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\text{路徑長}\Delta S}{\text{時間}\Delta t}$=瞬時速度的大小

四、某日 一教授應邀至某大學演講...

教授:「我今天要演講的主題是什麼你們知道嗎??」

學生:「不知道!!」 教授:「氣死我了！不知道的話，我也不說了...」

教授即揚長而去...

第二次.. 教授:「我今天要演講的主題是什麼你們知道嗎???」

學生:「知道!!!」

教授:「嗯... 很好.... 既然你們都知道，那我就不用說了....」

教授仍然揚長而去...

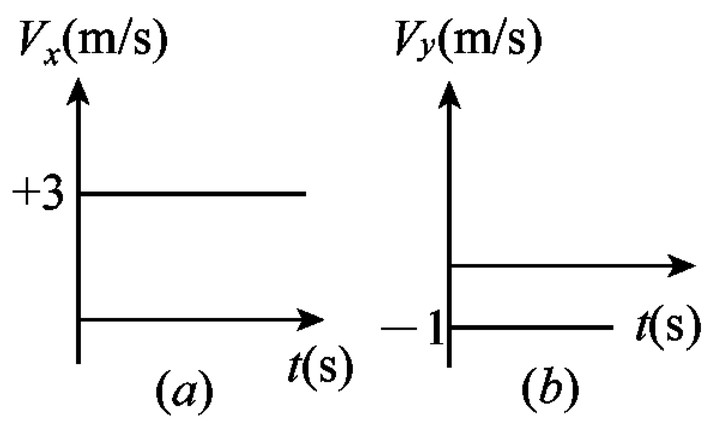
第三次.. 教授:「我今天要演講的主題是什麼你們知道嗎????」 學生們面面相覷

一半回:「知道!!」 一半回:「不知道!!」

只見教授滿意的點點頭說:「很好，那就請那些知道的人告訴那些不知道的人..」 教授又走了....

例16. 某質點在平面上運動時，其速度分量與時間的圖形如右圖 a，b。若質點的出發點為$(-2,0)$公尺，則該質點在第 2 秒末的位置為何？

(A)(4,–2) (B)(4,2) (C)(8,–2) (D)(8,2) (E)(2,–2) 公尺。答：(A)



例17. 一質點作半徑 R 的等速率圓周運動（週期為 T），若該質點的瞬時速度量值為 V，在時間 $\frac{T}{3}$ 內的平均速度量值為 V'，則 $\frac{V}{V'}$ 等於？答：$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

例18. 有甲、乙兩個質點，其速度分別為 (–1,3) 公尺/秒與 (1,2) 公尺/秒，則兩速度的夾角為

(A)15° (B)30° (C)45° (D)60° (E)90°。答：(C)

※家庭作業

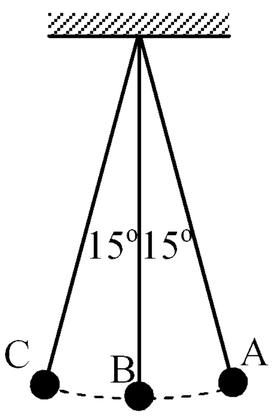
1.某時鐘之秒針長 12cm，則從 12 點鐘的位置起秒針走 10 秒之瞬時為止，求秒針尖端：(1)10 秒內之位移，(2)10 秒內之運動路程長，(3)10 秒內之平均速度，(4)l0 秒內之平均速率，(5)第 l0 秒之瞬時速率，(6)第 10 秒時之瞬時速度。答：(1)12cm 東偏南 30^o；(2) 4π cm；(3)1.2cm/s；(4) $\frac{2\pi}{5}$ cm/s；(5) $\frac{2\pi}{5}$ cm/s；(6) $\frac{2\pi}{5}$ cm/s

2.一人往正東走 3 公尺，再轉正北走 4 公尺，然後乘升降機上爬 5 公尺而停止，共歷時 5 秒鐘，則：(1)此人之平均速度大小為 (A)2.4 (B)5 (C)1 (D)12 (E) $\sqrt{2}$ 公尺/秒。

(2)此人之平均速率大小為 (A)2.4 (B)5 (C)1 (D)12 (E) $\sqrt{2}$ 公尺/秒。答：(1)(E)；(2)(A)

3.A、B 兩隻螞蟻均以等速率沿半徑 20cm 之時鐘面的圓周爬行，若它們同時由 12 點位置起，最後停在 6 點位置，A 沿順時針方向爬，而平均速度量值為 5cm/s，B 沿逆時針方向平均速率為 5cm/s，則：(1)那一隻螞蟻先抵達？(2)A 的平均速率若干？ (3)B 的平均速度量值若干？ (4)在 3 點鐘位置時 A 的瞬時速度為何？答：(1)A；(2)2.5π cm/s；(3)10/π cm/s；(4)2.5π cm/s，方向沿切線平行於 12 點到 6 點的連線

4.如右圖所示，單擺的擺長為 L，週期為 T，若擺錘自 A 點開始運動，當其擺到 C 點時的平均速率為 (A) $\frac{2\pi L}{3T}$ (B) $\frac{2L}{T}$ (C) $\frac{\pi L}{3T}$ (D) $\frac{\pi L}{6T}$。答：(C)



5.一物體在 5 秒內由初位置(x，y)=(3m，2m)，運動至末位置(x，y)=(-lm，5m)，則物體在這段時間內的平均速度為何？答：$(\frac{-4}{5},\frac{3}{5})$ m/s

6.某系正在選拔班花，恐龍級的彩萍正在發表參選政見：

「如果我當選班花，10 年後妳們就可以跟老公說，我大學時比系上的班花還漂亮，娶到我是你賺到了。」

彩萍高票當選。

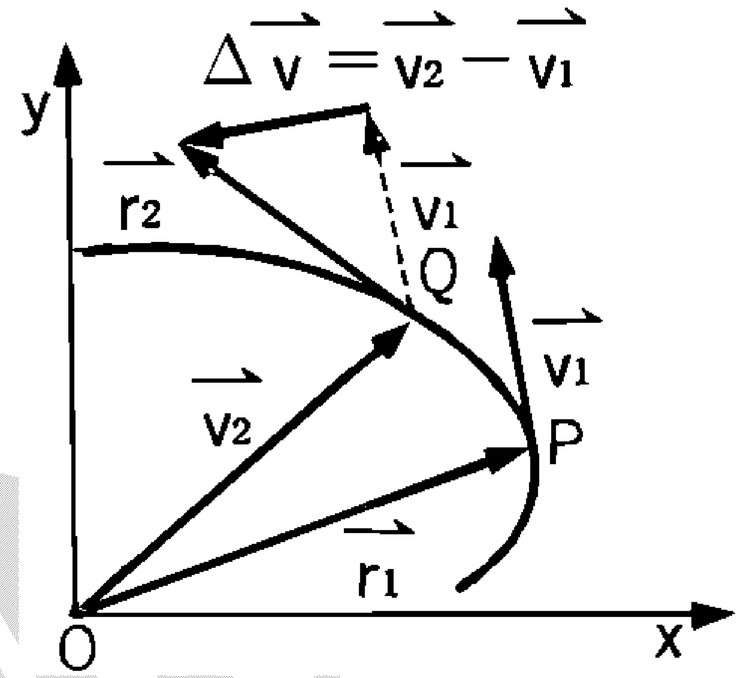
觀念七　加速度

當t_1時刻質點在位置$P(x_1,y_1)$、速度$\vec{v}_1$，於t_2時運動至$Q(x_2,y_2)$點、速度$\vec{v}_2$。

一、平均加速度

在t_1至t_2時間內，平均加速度

$$\vec{\bar{a}}=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j}=\vec{a}_x\vec{i}+\vec{a}_y\vec{j}$$



平均加速度的方向與速度變化$\Delta\vec{v}$的方向相同

(但不一定與速度$\vec{v}$同方向)。

二、瞬時加速度

當t_2趨近於t_1($\Delta t\to 0$)時，在t_1時刻的瞬時加速度

$$\vec{a}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t})\vec{i}+(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_y}{\Delta t})\vec{j}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$$

1. 瞬時加速度大小為$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$。

2. 瞬時加速度方向與合力$\vec{F}$、速度變化$\Delta\vec{v}$同方向，不一定與運動方向(切線方向)有關。

三、有一天，班上有位同學問老師三個私人的問題，

還拿了三個十元，要給老師猜中間的硬幣是人頭或是十元，

如果老師猜中的是十元的話，就可以不用回答問題。

於是老師答應之後，學生開始問第一個問題：

老師，妳和師母洞房花燭夜的時候是誰先主動的呢？

此時，老師抽到的是人頭，頭滴低的害羞說：是我

接著，學生又問第二個問題：老師，那誰在上面？

此時，學生耍了一點小技巧，所以老師又抽到人頭，

老師又不好意思的回答說： 還是我

緊接著，學生又問第三個問題：

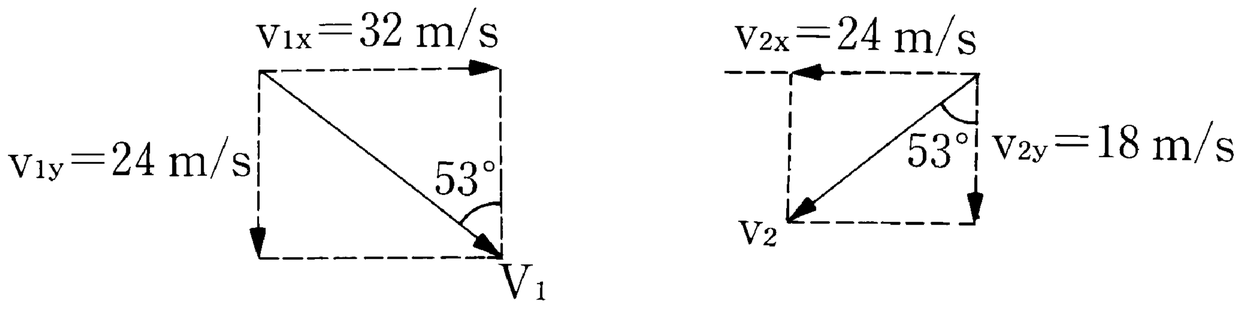
老師，那你們洞房花燭夜的時候，你說的第一句話是什麼？

此時，只見那學生很用力的把那三枚硬幣握住...

當老師抽不出那中間的硬幣時，就問那學生：「你夾那麼緊幹嘛？」

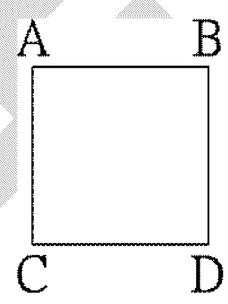
頓時，全班哄堂大笑...

例19. 一網球與牆面碰撞如右圖，若 v_1=40m/s，v_2=30m/s，$\theta = 53°$，球與牆接觸時間爲 0.02s，則在接觸時球之平均加速度量值約爲：



(A)3500 (B)2800 (C)500 (D)400 (E)300 m/s^2。答：(B)

例20. 一質點以一定速率 v 自附圖中 A 點出發，逆時針方向繞行一周再回到 A 點，繞行時間之平均加速度爲 $\bar{a}$，當改以 2v 速率順時針方向繞行一周，則其平均加速度爲　(A)4a (B)－4a (C)2a (D)－2a (E)－$\sqrt{2}$ a。答：(A)



例21. 一錶之秒針長 2cm(秒針之針尖作等速率圓周運動)，則

(1)此錶秒針尖之速率爲：　(A)$\frac{\pi}{15}$　(B)4π　(C)$\frac{\pi}{30}$　(D)π　(E)2π　cm/s。

(2)設錶面垂直，則在第 15 秒時，其速度(cm/s)爲：

(A)$\frac{\pi}{15}$向下　(B)$\frac{\pi}{15}$向右　(C)$\frac{\pi}{15}$向上　(D)$\frac{\pi}{15}$向左　(E)以上皆錯。

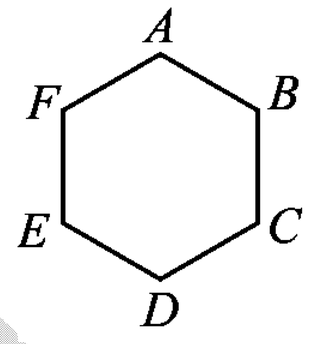
(3)在 0.0 秒至 15 秒間之速度變化(cm/s)爲：

(A)0 (B)$\frac{\pi}{15}$向下　(C)$\frac{\sqrt{2}\pi}{15}$向下偏左 45^o (D)$\frac{\sqrt{2}\pi}{15}$向下偏右 45^o (E)$\frac{2\pi}{15}$向下偏左 45^o。

(4)在 0.0 秒至 15 秒間之平均加速度(cm/s^2)是：　(A)$\frac{\sqrt{2}\pi}{225}$　(B)$\frac{2\pi}{225}$　(C)$\frac{\sqrt{2}\pi}{225}$向下偏左 45^o (D)$\frac{\sqrt{2}\pi}{225}$向上偏右 45^o (E)0　。答：(1)(A)；(2)(A)；(3)(C)；(4)(C)

※家庭作業

1.一質點以一定速率 10cm/s 自圖中 A 點出發順時針方向繞行一周再回到 A 點，已知繞行的路徑是一個正六角形，邊長為 10cm，則在繞行時間內的平均加速度為？答：$\frac{5}{3}$ cm/s^2 向上



2.某物體初速為 v，於 t 時間內運動方向偏轉120°，則此時間內其平均加速度為何？

(A)$\frac{v}{t}$ (B)$\frac{\sqrt{2}v}{2t}$ (C)$\frac{\sqrt{3}v}{t}$ (D)$\frac{2v}{t}$ (E)$\frac{\sqrt{3}v}{2t}$。答：(C)

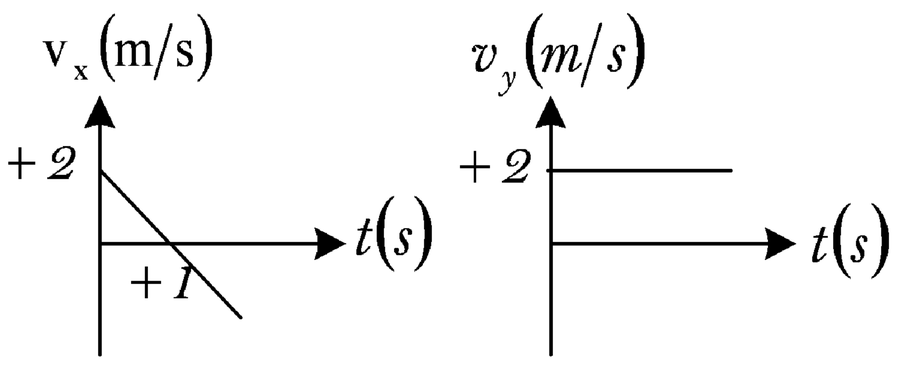
3.一飛機繞一個圓圈飛行，圓之周長為 10 公里，飛機以 100 公里/小時之定速率飛行，求:

(1)飛機飛行六分之一圓周時間內之平均加速度大小(以公里/小時 ^{2} 表示)為

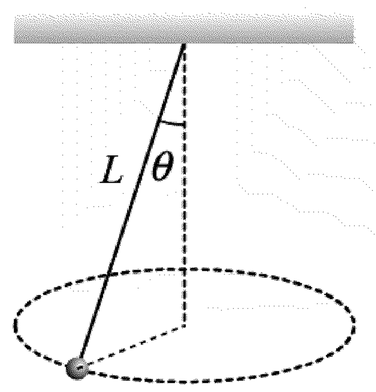
(A)6×10^3 (B)$2\pi\times10^3$ (C)$4\sqrt{2}\times10^3$ (D)4×10^3 (E)零。

(2)飛機之瞬時加速度大小(以 km/hr^2 表示)為 (A)6×10^3 (B)$2\pi\times10^3$ (C)4×10^3 (D)$4\sqrt{2}\times10^3$ (E)條件不夠無法求。答：(1)(A)；(2)(B)

4.右圖為某質點速度的水平分量 vx、鉛直分量 vy 與時間 t 的圖形，則：(1) t=0 時，質點的加速度為？m/s^2 (2) 0~2 秒內，質點的平均加速度為？m/s^2。答：(1) $(-2,0)$ (2) $(-2,0)$



5.一小球以細繩懸掛，在水平面上做等速率的圓周運動，如圖所示。已知小球繞行一周費時為 t，則：(1)小球於$\frac{3}{4}$週期內的平均速度量值為何？(2)小球於半週期內的平均加速度量值為何？



答：(1)$\frac{4\sqrt{2}L\sin\theta}{3t}$；(2)$\frac{8\pi\ell\sin\theta}{t^2}$

6.一質點以等速率 v 沿一曲線運動，經 t 時間，方向改變θ角，則此一時間內：

(1)速度變化量之值為？ (2)平均加速度之值為？答：(1) $2v\sin\frac{\theta}{2}$；(2)$\frac{2v}{t}\sin\frac{\theta}{2}$

觀念八　等加速度公式&微分

一、運動的獨立性

物體的運動可分為彼此互相垂直的向量，各方向的運動互不相干、彼此獨立。

二. 等加速度公式

1. $\begin{cases} v_x = v_{ox} + a_x \cdot t \\ v_y = v_{oy} + a_y \cdot t \end{cases} \Rightarrow (v_x, v_y) = (v_{ox}, v_{oy}) + (a_x, a_y) \cdot t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a} \cdot t$

2. $\begin{cases} S_x = v_{ox} \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 \\ S_y = v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow (S_x, S_y) = (v_{ox}, v_{oy}) \cdot t + \frac{1}{2}(a_x, a_y) \cdot t^2 \Rightarrow \vec{S} = \vec{v}_o \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2$

3. $\begin{cases} v_x^2 = v_{ox}^2 + 2a_x \cdot S_x \\ v_y^2 = v_{oy}^2 + 2a_y \cdot S_y \end{cases} \Rightarrow (v_x^2 + v_y^2) = (v_{ox}^2 + v_{oy}^2) + 2(a_x \cdot S_x + a_y \cdot S_y) \Rightarrow \vec{v}^2 = \vec{v}_o^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{S}$

三、微分

$\vec{r} = (x, y)$

$\vec{v} = (v_x, v_y) = (\frac{d}{dt}x, \frac{d}{dt}y) = \frac{d}{dt}\vec{r}$

$\vec{a} = (a_x, a_y) = (\frac{d}{dt}v_x, \frac{d}{dt}v_y) = \frac{d}{dt}\vec{v}$

四、有一個囚犯逃離了關了他 15 年的監獄。他越獄後， 他闖入了一間民宅，看到了一對年輕的夫妻躺在床上。他把那位丈夫的趕下床，綁在椅子上，把太太綁在床上，他上了床，親吻那太太的脖子，接著就進去了洗手間。

當那逃犯在洗手間的時候，丈夫跟他的太太說："聽著，這個男的是囚犯，看看他的衣服就知道！他可能被關很久，而且很久沒碰過女人了，假如他想要做愛，千萬不要抵抗，也不要抱怨，就讓他做他想做的事，讓他滿足就好。這個人非常的危險，假如讓他生氣的話，他可能會把我們殺了。堅強點，親愛的，我愛你"

這時候他太太說："我很高興你這樣想，沒錯，他很久沒碰女人了，但是他不是在親我的脖子，他是在我的耳邊小聲的說他覺得你很性感，順便問我洗手間裡面有沒有放潤滑液。堅強點，親愛的，我愛你"

例22.若一質點在 $\vec{i}$ 方向：起點+3，初速度 0，加速度+2(等加)

在 $\vec{j}$ 方向：起點 0，初速度 10，加速度-4(等加)

在 $\vec{k}$ 方向：起點 5，初速度-2，加速度 0。

寫出其 $\vec{r}$ 與 $\vec{v}$ 及 $\vec{a}$ 之向量式？答：$\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}$ ；$\vec{v}=2t\vec{i}+(-4t+10)\vec{j}+(-2)\vec{k}$ ；

$\vec{r}=(t^2+3)\vec{i}+(-2t^2+10t)\vec{j}+(-2t+5)\vec{k}$

例23.平面運動之物體其坐標為 $x=3t-4t^2$ ，$y=-6t^2+t^3$ ，X 及 Y 單位為米，t 為秒，試求：

(1)在 t=3 秒時之位置向量？

(2)最初 3 秒內之平均速度及平均加速度？

(3)t=3 秒時的瞬時速度及瞬時加速度？

(4)t=3 秒時的瞬時速度與瞬時加速度的夾角？答：(1) (-27，-27)；(2) (-9，-9) m/s ，(-8，-3) m/s^2 ；(3) (-21，-9) m/s ，(-8，6) m/s^2 ；(4) $\theta=\cos^{-1}\dfrac{19}{5\sqrt{58}}$

例24.某質點初速度 $\vec{v}_o=3\vec{i}$ m/s，以等加速度 $\vec{a}=-\vec{i}-0.5\vec{j}$ m/s^2 離開原點，求：

(1)當質點位置 x 達最大值時其速度為何？

(2)此時質點之位置？答：(1) $-1.5\vec{j}$ m/s；(2) $4.5\vec{i}-2.25\vec{j}$ 公尺

※家庭作業

1.某物初速度為 16.0 公尺/秒向東，若加速度為 $3.0\,m/s^2$ 向南，求：
(1)4.0 秒內位移之量值？ (2)第 4.0 秒末之速度量值？ (3)第 4.0 秒末之切線加速度與法線加速度量值。答：(1) $8\sqrt{73}$ m；(2)20m/s；(3) $a_T = 1.8\,m/s^2$，$a_N = 2.4\,m/s^2$

2.一質點在水平面上做等加速度運動，初速為 5 公尺/秒向西，加速度為 5 公尺/秒 ^{2} 向東偏北 37°，則 2 秒末瞬時速率為？公尺/秒 答：$3\sqrt{5}$

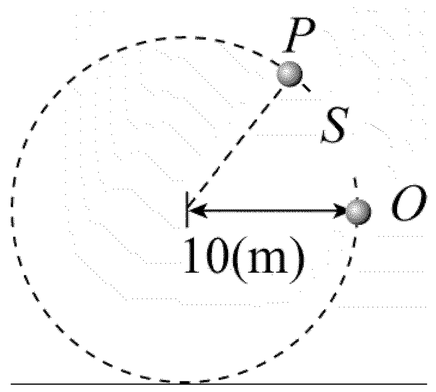
3.一質點在平面上移動，其坐標 x 分量為 $x = 2t$，坐標的 y 分量為 $y = -20t^2$，則當質點速度與 $+x$ 軸夾角為 45° 時，當時為第幾秒?(A) $\frac{1}{80}$ (B) $\frac{1}{60}$ (C) $\frac{1}{40}$ (D) $\frac{1}{20}$ (E) $\frac{1}{10}$ 秒。答：(D)

4.某質點在水平面內運動，其位置向量為 $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + 4t\vec{j}$ (r：米，t：秒)，求：
(1)以直角坐標 x，y 表示質點之運動路徑方程式？答：$y^2 = 16x + 16$
(2)當質點經過點(3，8)時之速度？答：$\vec{v} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ m/s
(3)開始計時後 2 秒質點的瞬時加速度？答：$\vec{a} = 2\vec{i}\ m/s^2$

5.某質點在水平面內運動，其位置向量為 $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + 4t\vec{j}$，求 (1)當質點經(3，8)時之速度？(2)開始計時後 2 秒質點的瞬時加速度？答：(1)(4，4)；(2)(2，0)

6.一質點在平面上運動時，其速度分量為 $v_x = 2t$，$v_y = t^2 + 1$，單位為 S.I.制。若質點的出發點為座標原點，則 (1)質點的初速度為何？ (2)質點於第 3 秒的瞬時速度與 x 軸夾角的正切值為何？ (3)質點在時間 t 時的加速度為何？ (4)質點在 0~3 秒的平均加速度為何？答：(1)(0，1)m/s (2)5/3 (3)(2，2t) (4)(2，3) m/s^2

7.一質點沿著圓周運動時，質點 P 與起點 O 間的路徑長滿足 $S = t^2 + t$(m)，則 (1)質點的初速率為何？ (2)0～10 秒的過程中，質點與圓心的連線共轉動了幾度？ (3)第 10 秒當時的速率為何？



答：(1)1(m/s) (2)630° (3)21(m/s)

觀念九　切線加速度&法線加速度

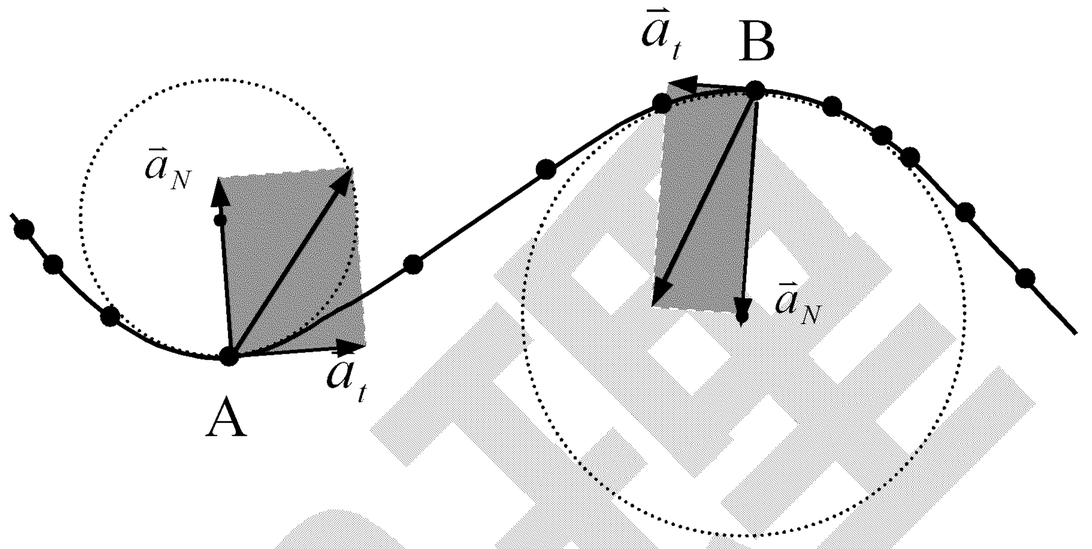
一、切線加速度 $\vec{a}_t$ ：改變速率快慢，但方向不變。

1. 與運動方向平行

2. 能改變速度的快慢

※ 若 $\vec{a}_T$ 與 $\vec{v}$ 同方向，則加快。

※ 若 $\vec{a}_T$ 與 $\vec{v}$ 反方向，則減慢。



3. 當物體受力產生一個與運動方向平行(切線方向)的加速度時，若加速度與速度同方向，會使運動速率變快；加速度與速度反方向，會使運動速率變慢；此加速度稱為切線加速度。

二、法線加速度 $\vec{a}_N$ ：改變運動方向，但速率不變。

1. 與運動方向垂直

2. 能改變速度的方向（運動方向）。

3. 指向曲率中心（與軌跡相切圓的圓心）

4. 當物體受力產生一個與運動方向垂直(切線方向)的加速度時，並不會改變物體的運動速率，但是會使運動方向發生改變；此加速度稱為法線加速度。

三、切線加速度 $\vec{a}_t$ &法線加速度 $\vec{a}_N$ 的計算

1. 設物體之加速度 $\vec{a}$ 與速度 $\vec{v}$ (速度 $\vec{v}$ 的方向就是物體運動軌跡的切線方向)的夾角 θ

由向量的內積可得 $\vec{a}\cdot\vec{v}=|\vec{a}||\vec{v}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|}$

2. 切線加速度 $\vec{a}_t$ 的大小 $=|\vec{a}|\cos\theta$

3. 法線加速度 $\vec{a}_N$ 的大小 $=|\vec{a}|\sin\theta$

四、小瑞將車開進加油站加油，加油員發現有二隻企鵝坐在後座,嚇了一跳.

加油員說:『 先生！ 你應該帶它們去動物園喔。』

小瑞想，嗯...這是一個好主意耶。

第二天，小瑞又來到加油站。

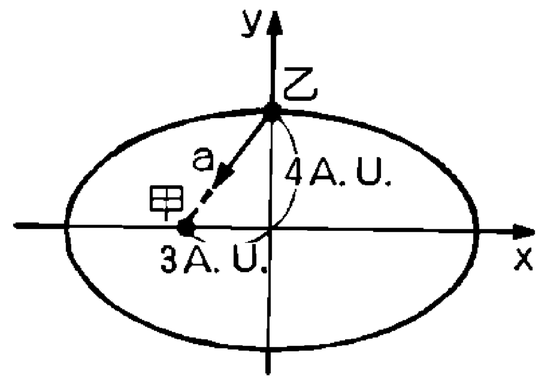
二隻企鵝還是在車上.

加油員說:『我想你應該把它們帶去動物園了吧！』

小瑞說： 哎呀 !動物園喔 ！ 我們昨天就去玩過了，..... 今天我會帶它們去海灘玩,然後再去看電影,吃冰淇淋....

例25. 吾人觀察擺鐘之擺錘的運動可以發現 (A)爲等速度運動 (B)爲等加速度運動 (C)爲變加速度品運動 (D)速率在最低點最大 (E)切線加速度在兩端點時最大，在最低點時最小。答：(C)(D)(E)

例26. 行星公轉軌道爲橢圓，太陽位於其中的一個焦點上，如右圖所示之甲點。當行星通過乙點時，加速度大小爲 $20\,m/s^2$，方向如右圖所示，則乙點瞬時之速率變化率 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 爲 (A)0 (B)12 (C)16 (D)20 (E)25 m/s^2。答：(B)



例27. 某質點之位置與時間之函數爲 $\vec{r}(t)=(2t^2-3)\,\vec{i}+t^3\,\vec{j}$（$r$：米，$t$：秒），求 1 秒末之 a_N 爲何？答：$\frac{6}{10}\sqrt{10}$

※家庭作業

1.平面上有一質點，當它的速度$\vec{v}=3\hat{i}+4\hat{j}$(公尺/秒)時，其加速度爲$\vec{a}=10\hat{i}$(公尺/秒^2)，

此時此質點的切線加速度a_t？法線加速度a_N？答：$6m/s^2$；$8m/s^2$

2.一質點以初速度$v_o=3m/s$，沿+x方向離開原點，已知其加速度$\vec{a}=-\hat{i}-\hat{j}$(公尺/秒^2)，求此質點：(1)速度$\vec{v}$與時間(t)之函數關係？ (2)位置$\vec{r}$與時間(t)之函數關係？(3) t爲幾秒時，質點達最大之x值？(4)當質點達最大之x值時，其切線加速度向量爲若干？(5)當質點達最大之x值時，其法線加速度向量爲若干？

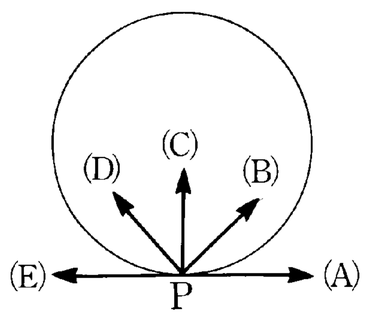
答：(1)$(3-t)\cdot\hat{i}-t\cdot\hat{j}$；(2)$(3t-\frac{1}{2}t^2)\cdot\hat{i}-\frac{1}{2}t^2\cdot\hat{j}$；(3)t=3 秒，$x_{max}$=4.5 (m)；(4)$-\hat{j}$；(5)$-\hat{i}$

3.已知某物體運動方向與 x 軸夾角爲+ϕ，其加速度$\vec{a}=a_x\hat{i}-a_y\hat{j}$，則其切線加速度$a_t$及法線加速度$a_N$的大小分別爲 (A) $a_t=a_y$ (B) $a_t=a_x\cos\phi+a_y\cos\phi$

(C) $a_t=a_x\cos\phi-a_y\sin\phi$ (D) $a_N=a_x$ (E) $a_N=a_x\sin\phi+a_y\cos\phi$。答：(C)(E)

4.下列何項爲正確？ (A)不在一直線路徑上的物體必有切線加速度 (B)作等速率運動的物體切線加速度必等於零 (C)沿一直線運動的物體，法線加速度必爲零 (D)加速度方向恆指向路徑凹的方向 (E)等速率曲線運動的物體，加速度方向恆與速度方向垂直。答：(B)(C)(D)(E)

5.一質點作順時針方向的圓周運動如圖，若速率愈來愈慢，則在 P 點加速度的方向爲何？答：(B)



6.在直線上沿一定方向運動的物體，速度愈來愈快，則最有可爲能：

(A)沒有加速度 (B)加速度逐漸減少 (C)加速度與速度反方向

(D)加速度與運動方向垂直 (E)加速度與速率反方向。答：(B)

觀念十　軌跡方程式

一、運動方程式(參數式)

1. 描述物體運動與時間之關係的方程式，可表示出物體的位置、速度、加速度與時間的關係。

2. $\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{對時間微分}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\text{對時間微分}} \vec{a}(t)$

$\vec{r}(t) \xleftarrow{\text{對時間積分}} \vec{v}(t) \xleftarrow{\text{對時間積分}} \vec{a}(t)$

3. 可將 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ 利用消去法或代入法，化為物體運動的軌跡方程式。

二、軌跡方程式

1. 描述物體運動軌跡的方程式，將物體的位置以 x、y、z 的方程式來表示。

2. 只用來描述 x、y、z 之間的關係，與時間無關。

3. 可將物體的運動方程式(參數式)化為軌跡方程式，

但無法將軌跡方程式化為運動方程式(也就是說無法由軌跡了解運動與時間的關係)

三、比爾和希拉蕊當年結婚的時候，新婚之夜，比爾放了一個大紙盒在他們的床下，並且要求希拉蕊發誓，絕對不偷看紙盒裡裝了什麼東西。卅年過去了，希拉蕊也信守諾言，從沒有看過一次紙盒裡到底裝了什麼東西。

可是，在他們結婚卅周年當天的下午，希拉蕊再也忍不住好奇心，就把床下的紙盒打開。紙盒裡面有三只空的啤酒鋁罐，另外還有 $81,874.25 現金。

當天晚上他們到一家高級的餐廳去慶祝他們的結婚卅週年慶。

希拉蕊就跟比爾坦承：”我很抱歉，過去卅年我一直信守諾言，一直沒有看我們床底下的那個紙盒。可是今天我實在再也壓抑不住好奇心，我打開看了，對不起。不過，既然我已經看了，你可不可以告訴我，那三個空啤酒罐到底是什麼意思？”

比爾沈默了一下，就說：”這麼多年了，我想，你應該也有權利知道這件事。每次我背著妳在外面打野食之後，我就放一個空的啤酒罐在紙盒裡，警惕我自己不要再犯。”

希拉蕊顯然很震驚，臉色一沉，就說：”珍妮佛，寶拉還有莫妮卡，我早就懷疑你跟她們三個人有一腿。”

生了幾分鐘悶氣之後，希拉蕊就說：”我知道你沉迷在性遊戲之中，不過，依你的情況，卅年來你也只出軌三次，我想這也不算太過分啦，我就不跟你計較了。” 於是，兩人相互擁抱，言歸于好。

喝了幾杯酒之後，希拉蕊突然想起，就問比爾說： ”那紙盒裡怎麼會有現金在裡面？”

比爾大大的喝了一口酒說：”每次當紙盒裝滿了空的啤酒罐的時候，我就拿到資源回收中心去把它們換成現金”

例28.平面運之物體，其坐標為 $x=3t$ ， $y=-6t^2+t$ ，x 及 y 單位為公尺，t 為秒，求：

(1)軌跡方程式。

(2)最初 3 秒內之平均速度大小。

(3) $t=1$ 秒時之瞬時速率大小。答：(1) $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{x}{3}$ ；(2) $\sqrt{298}$ 公尺/秒；(3) $\sqrt{130}$ 公尺/秒

例29.一質點以初速度 $v_0=3\text{m/s}$ 沿 $+x$ 方向離開原點，已知其加速度 $\vec{a}=-\hat{i}-\hat{j}\,\text{m/s}^2$，則：

(1)其位置 R 與時間 t 之函數關係為何？

(2)當 t 等於何值時，質點可達最大之 x 值？

(3)試列出此運動的軌跡方程式。(用 x 與 y 表示)

答：(1) $\vec{R}(t)=(3t-\frac{1}{2}t^2)\hat{i}-\frac{1}{2}t^2\hat{j}$ ；(2) 3 sec；(3) $x^2-2xy+y^2+18y=0$

例30.一質點由原點出發，在 xy 平面上以等加速度運動。已知其加速度為 $a_x=0$ ，

$a_y=-b^2$ (b 為正值)，而運動軌跡為 $y=x(1-\frac{x}{d})$ (d 為正值)。試求：

(1)此質點由 x=0 運動到 x=d 所需之時間？

(2)此質點通過 x=d 時之速度分量 v_x 與 v_y？答：(1) $\frac{\sqrt{2d}}{b}$ ；(2) $b\sqrt{\frac{d}{2}}$ ，$-b\sqrt{\frac{d}{2}}$

※家庭作業

1.一質點在平面上運動，其位置分量 x、y 與時間 t 的關係為：$x=1+2\cos t$ ，$y=\sin t$ (單位均為 SI 制)，則質點運動軌跡所遵守的方程式為 (A)$x^2-4y^2=-1$ (B)$x^2-4x+4y^2=0$ (C)$x^2-2x+4y^2=3$ (D)$t^2-2t+4t^2=3$ (E) $x^2-2x+4y^2=4t^2$

2.某質點在平面上運動，其位置向量與時間的關係為 $\vec{r}(t)=pt\hat{i}+qt^2\hat{j}$ ，其中 p＞0、q＞0，且皆為定值，求：

(1)任一時刻 t 時，質點之速度 $\vec{v}$ 和加速度 $\vec{a}$ 。

(2)於某一時刻 t 時，質點之加速度方向與速度方向同之夾角為 θ，則 $\tan\theta=$

(3)質點移動的軌跡方程式為何？

答：(1) $\vec{v}(t)=p\hat{i}+2qt\hat{j}$ ，$\vec{a}(t)=2q\hat{j}$ ；(2) $\tan\theta=\dfrac{p}{2qt}$ ；(3) $qx^2-p^2y=0$

3.一物體在平面上的運動為 $y=2x^2+4x+2$，若已知 y 與時間 t 的關係為 $y=2t^2$，則 x 與 t 的關係式為何？答：$x=t-1$

4.一物體運動之位置向量與時間的關係為 $\vec{R}=2t^2\vec{i}+9t\vec{j}$ ($\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 為水平及鉛直兩方向的單位向量，且 R 之單位為米，t 之單位為秒)，則此動作： (A)等加速運動 (B)第 3 秒末的速度大小為 15 米/秒 (C)第 3 秒內的平均速度大小約為 13.5 米/秒 (D)在 $\vec{i}$ 方向無加速度 (E)軌跡為拋物線。答：(A)(B)(C)(E)

5.下面有關運動方程式與軌跡方程式的敘述，何者正確？ (A)由軌跡方程式可求出運動方程式 (B)由運動方程式可求出軌跡方程式 (C)運動方程式中不含時間變數 (D)軌跡方程式包含時間變數 (E)運動方程式與軌跡方程式完全等義。答：(B)

6.一物體運動之位置向量與時間之關係為 $\vec{r}(t)=(2t^2)\vec{i}+(9t)\vec{j}$ ，($\vec{i}$ ，$\vec{j}$ 表互相垂直之兩單位向量)，則此物 (A)作變加速度運動 (B)第 3 秒末的速度大小 15m/s (C)第 3 秒內平均速度大小 13.5m/s (D)在 $\vec{j}$ 方向無加速度 (E)軌跡方程式為 $y^2=27x$。答：(B)(C)(D)

7.質點在平面上運動，其位置向量 $\vec{r}$ 與時間 t 的關條式為 $\vec{r}(t)=6t\hat{i}+2t^2\hat{j}$ (MKS 制)，則此質點前 4 秒內之平均速度大小為＿＿＿＿＿＿公尺/秒，經點(12，8)時之速度為＿＿＿＿公尺/秒，其運動之軌跡方程式為＿＿＿＿＿＿。

觀念十一　拋體的基本觀念

一、運動獨立性

1. 在空氣阻力可以忽略的狀況下，拋體運動可視為兩個獨立的直線運動：

(1)水平方向：等速度運動

(2)鉛直方向：等加速度運動

2. 質點在平面上的運動可視為兩個互相垂直方向的直線運動，彼此互相不干涉，稱為運動的獨立性。

二、水平拋射運動

	運動狀態	加速度	初速	t 秒後速度	t 秒後位置	軌跡方程式
水平方向	等速運動	**0**	v_o	$v_x = v_o$	$x = v_o t$	$y = \frac{1}{2} g(\frac{x}{v_o})^2$
鉛直方向	自由落體	**g**	**0**	$v_y = gt$	$y = \frac{1}{2} gt^2$	

1. $\vec{a} = (a_x, a_y) = (0, -g)$

2. $\vec{v} = (v_x, v_y) = (v_{ox}, o) + (0, -g)t = (v_{ox}, -gt)$

3. $\vec{s} = (s_x, s_y) = (v_{ox}, 0)t + \frac{1}{2}(0, -g)t^2 = (v_{ox}t, -\frac{1}{2}gt^2)$

三、斜向拋射運動

	運動狀態	加速度	初速	t 秒後速度	t 秒後位置	軌跡方程式
水平方向	等速運動	**0**	$v_o \cos\theta$	$v_x = v_o \cos\theta$	$x = v_o \cos\theta \times t$	$y = \tan\theta x - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2\theta}$
鉛直方向	鉛直上拋	**g**	$v_o \sin\theta$	$v_y = v_o \sin\theta - gt$	$y = v_o \sin\theta \times t - \frac{1}{2}gt^2$	

1. $\vec{a} = (a_x, a_y) = (0, -g)$

2. $\vec{v} = (v_x, v_y) = (v_{ox}, v_{oy}) + (0, -g)t = (v_{ox}, v_{oy} - gt)$

3. $\vec{s} = (s_x, s_y) = (v_{ox}, v_{oy})t + \frac{1}{2}(0, -g)t^2 = (v_{ox}t, v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2)$

例31. 下列有關水平拋射的敘述，何者正確？ (A)與同高度的自由落體，同時著地 (B)初速度增倍，落地時間減半 (C)初速度增倍，水平位移也增倍 (D)第 2 秒內的水平位移是第 1 秒內的 2 倍 (E)第 2 秒內的鉛直位移是第 1 秒內的 2 倍。答：(A)(C)

例32. 某人自地面同時向空中拋射 A、B 兩球，A 球之速度爲V_A，仰角爲θ_A，B 球則爲V_B及θ_B，且$\theta_A > \theta_B$。設兩球在同一平面內運動，而且所達到的最大高度也相同，則下列敘述中何者爲正確？ (A)$V_A < V_B$ (B)A 球之水平射程較 B 球遠 (C)兩球同時到達最高點 (D)A 球先著地 (E)兩球在空中相撞。【67 日大】 答：(A)(C)

例33. A、B、C 三物自同一高處，以同一速率同時拋出，A 爲鉛直上拋，C 爲水平拋射，B 爲仰角 60° 之斜向拋射，若只計重力作用，則： (A)落地時速率爲 $v_A=v_B=v_C$ (B)落地時速率爲 $v_A<v_B<v_C$ (C)在空中時間爲 $t_A=t_B=t_C$ (D)在空中時間爲 $t_A>t_B>t_C$ (E)飛行期間加速度大小爲 $a_A=a_B=a_C$。答：(A)(D)(E)

※家庭作業

1.甲、乙兩粒質量相同的小石子，自同一高度以水平方向的初速拋出，落在平坦的地面上，已知甲的初速爲乙的 2 倍，若不計空氣阻力，則下列敘述何者錯誤？ (A)甲的射程較大 (B)落地時，甲的動能較大 (C)落地時，兩者的加速度相等 (D)兩者在空中的飛行時間相等 (E)落地時，甲的速度的鉛直分量較大。【91 指考】【答】(E)

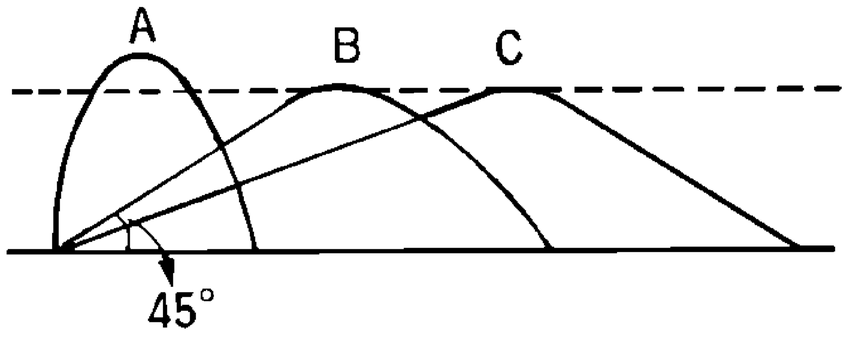
2.關於拋體運動，下列敘述中，那個是錯的？(A)所受的合力與軌跡互相垂直 (B)加速度的方向不變 (C)加速度的量值不變 (D)速度向量沿軌跡的切線方向。【66 夜大】答：(A)

3.自水平地面斜拋至落地之二斜向拋物體在空中飛行時間相同，則 (A)水平方向初速度 (B)鉛直方向初速度 (C)速度變化量 (D)仰角 (E)最大高度 必相同。答：(B)(C)(E)

4.不計空氣阻力，在水平地面分別以仰角37°與53°拋出，若鉛直方向的初速度相等，有關二質點運動的敘述何者正確： (A)水平射程相等 (B)最大高度相等 (C)在空中飛行時間相等 (D)若二質點同時同地拋出，二質點在空中相遇 (E)二質點初速比爲 4：3。答：(B)(C)(E)

5.有關於斜向拋射運動，不計空氣阻力，則下列何者正確？ (A)最高點速度爲零，加速度爲 g (B)軌跡上各點的速度水平分量爲一定值 (C)仰角45°時，水平射程最大且飛行時間最長 (D)軌跡頂點的切線加速度爲零，法線加速度最大值爲 g (E)軌跡頂點曲率最大，切線速度最小。答：(B)(D)(E)

6.圖爲 A、B、C 三小球在同一鉛直面同時拋射出之拋物線軌跡，下列何者正確？ (A)A 球在空中停留時間最久 (B)B、C 二球著地的速率以 B 球較大 (C)A、B 二球可能在空中相撞 (D)到達最高點的瞬間，三球之法線加速度相同 (E)到達最高點時，三球軌跡之曲率半徑以 C 球最大。答：(A)(D)(E)



7.飛機水平飛行，投下一彈 (A)駕駛員看炸彈爲直線軌跡 (B)駕駛員看爲拋物線軌跡 (C)地面上人看爲直線 (D)地面上人看爲拋物線 (E)地面上人看爲雙曲線軌跡。答：(A)(D)

觀念十二　拋體先求 t

一、解題的基本觀念

1. 任何拋體運動，都是以運動的獨立性為基礎，將運動分為

①水平等速：$\Delta x = v_x \cdot \Delta t$

②鉛直等加速：$v_y = v_{oy} - gt$ ；$\Delta y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$ ；$v_y^2 = v_{oy}^2 + 2(-g)\Delta y$

2. 任何題型，都可用以上方程式的組合來解決，重點是你如何依題意去應用。

二、常見的題型

一般常見的題型，可以概略分為

1. 高度差 h → 求 t

2. 鉛直速度變化 Δv_y → 求 t

3. 切線加速度 a_t 或法線加速度 a_N → 求 t

4. 斜坡 $\frac{y}{x}$ → 求 t

5. 軌跡方程式

不過老師要強調，題型的區分只是為了方便老師上課教學與你們的學習，最後還是希望你們把題型的分類都拋棄，最後只要記得「水平等速，鉛直等加速」這兩句話就夠了。

三、時間是解題的樞紐

1.拋體運動是由水平方向的<u>等速度</u>運動，和鉛直方向的<u>等加速度</u>運動組合而成，

兩者彼此互不影響，可分開處理，也就是 x 與 y 獨立，v_x 與 v_y 獨立，a_x 與 a_y 獨立。

2. 水平等速 $\xleftrightarrow{\text{以時間 } t \text{ 作連結}}$ 鉛直等加速，時間是解題的關鍵

3. 超過 90%的拋體運動建議先求時間。

四、小明跟小美是一對情侶，七夕又快到了，小明和小美又一如往常去河濱公園散步。

這時，小美說:「小明，今年的七夕禮物,我想來比較特別的。」

小明疑惑的問:「怎樣特別法。」

小美害羞的說:「例如:比較熱情的禮物。」

(其實小美心裡想等小明送他鑽戒,跟他求婚)

小明堅決的說:「知道了，我送你一桶汽油和一根番仔火，如何。」

小美:「.....」

例34. 自 h 高的地方把物體以 v_o 初速水平拋出，求拋出到落地的：

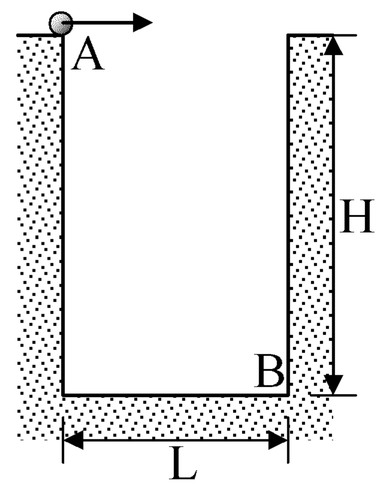
(1)速度變化爲何？

(2)平均速度量值爲何？

(3)平均加速度量值爲何？ 答：(1) $\sqrt{2gh}$ (2) $\sqrt{v_o^2+\frac{1}{2}gh}$ (3)g

例35. 某物體於 h 高處水平拋出，若水平射程爲 4h，則初速量值爲_____。答：$\sqrt{8gh}$

例36. 右圖中，一質點由 A 點水平拋出後，經垂直壁兩次碰撞後，恰好擊中 B 點。假定質點與垂直壁的碰撞滿足反射定律，且令重力加速度爲 g，則質點的初速爲？；質點與垂直壁發生第 1 次碰撞時，當時的高度爲？答：$3L\sqrt{\frac{g}{2H}}$ ；$\frac{8}{9}H$



※家庭作業

1.自寬 h、深 2h 的深谷兩岸相同高度處，將 A、B 兩球在同一直線上互相瞄準。A 球初速度為 v，B 球以初速度 3v 同時投射，不計空氣阻力，g 為重力場強度。欲使兩球在空中相遇，則必須滿足哪一條件？答：$v > \frac{\sqrt{gh}}{8}$

2.在距地面高度 h 處有甲、乙兩物體。物體甲以初速 v_o 水平射出，物體乙也同時以初速 v_o 沿一傾斜角為 45° 之光滑斜面以直線軌跡滑下。如甲、乙兩物體同時到達地面，則 (A) $v_o = \frac{\sqrt{gh}}{2}$ (B) $v_o = \sqrt{\frac{gh}{2}}$ (C) $v_o = \sqrt{gh}$ (D) $v_o = \sqrt{2gh}$ (E) $v_o = 2\sqrt{gh}$。【75.日大】

答：(A)

3.一棒球飛向二壘的正上方，球與二壘的水平距離為 6.0m 時，教練開始計時，此時球的高度為 1.8m，速度為 20m/s 水平向前。若忽略阻力，則下列有關此球運動的敘述哪些正確？（此題假設重力加速度為 $10m/s^2$）【92 指考】答：(A)(C)(D)

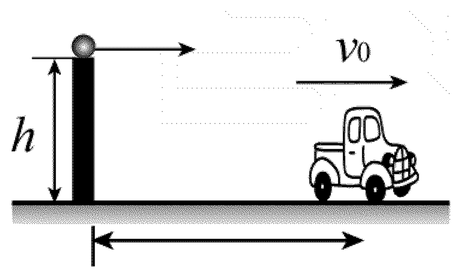
(A)0.3s 時球飛至二壘正上方　(B)飛至二壘正上方時，水平速度分量大於 20m/s

(C)0.3 s 時球的高度為 1.35m　(D)球落地點與二壘間的水平距離為 6.0m

(E)若球與地面作彈性碰撞，則反彈後的最高點與二壘間的水平距離為 12m。

4.一物距地面高度 h 以 v 速度水平拋出，落地時水平位移為 x，若自 2h 處以 2v 速度水平拋出，則落地時水平位移為_____。答：$2\sqrt{2}x$

5.如右圖，欲將一球水平拋入移動中貨車上，已知當球拋出時，球與貨車的水平距離 L，且當時貨車的車速為 v_0，若貨車係以等加速度 a 移動，若貨車高度不計，則小球經？秒落於貨車上，小球的初速為？答：$\sqrt{\frac{2h}{g}}$、$L\sqrt{\frac{g}{2h}} + v_0 + \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2h}{g}}$



6.轟炸機以 v_o 之水平速度在 h 高處頂目標上空飛行，若瞄準線與鉛直方向之夾角為 ϕ，求 $\tan\phi$ = ？答：$\sqrt{\frac{2v_o^2}{gh}}$

例37. 在棒球比賽中，一打擊者以速度 15 m/s ，仰角 30° ，在靠近地面處將球擊出，球沿游擊手方向飛出，若游擊手距擊球處 30 公尺，則以約_____ m/s 的等速度移動即可接住棒球。答：6.7

例38. 一門砲在高 40 米之砲臺上向海面射擊，初速爲 20m/s，仰角爲 30° ，恰可擊中停泊於海面之敵艦(g=10 m/s^2)。試求：

(1)砲彈在空中飛行的時間？

(2)敵艦與砲臺間的水平距離？

(3)設敵艦以 5m/s 之速度航向砲臺，求發砲時艦與砲臺間之水平距離？

答：(1)4sec；(2) $40\sqrt{3}$ 公尺；(3) $20+40\sqrt{3}$ 公尺

例39. 轟炸機以 37° 俯角向下俯衝時，在離地高度 900 公尺處投彈，炸彈投出 6 秒末命中目標，設 $g=10m/s^2$ ，且空氣阻力不計，求：

(1)投彈時轟炸機的速度爲若干公尺/秒？

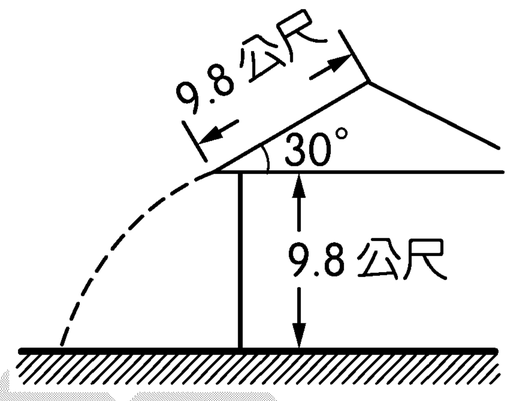
(2)炸彈的水平射程爲若干公尺？

(3)炸彈命中目標時的瞬時速度爲若干公尺/秒(以 $\hat{i}$ ， $\hat{j}$ 表示之)？

答：(1)200m/s；(2)960m；(3) $\vec{v}=160\hat{i}-180\hat{j}$ m/s

※家庭作業

1.一小石子自靜止由光滑屋頂頂端滑下。屋頂長 9.8 公尺，並與水平成 30°角，屋簷離地 9.8 公尺(如右圖)，則小石從離開屋簷至落到地面需時_____秒。【85 日大】答：1



2.由地面以仰角 θ_0 斜拋一石子，不計空氣阻力，若由拋射點到軌跡頂點的仰角為 ϕ ，則 $\tan\phi=$？答：$\frac{1}{2}\tan\theta_0$

3.一物體在平面上，以初速度 10 m/s ，仰角 53^o 向東拋出，$g=10\ m/s^2$

(1)物體在距地面高度為 1.4 m 時，求其運動方向與水平面的夾角為若干？

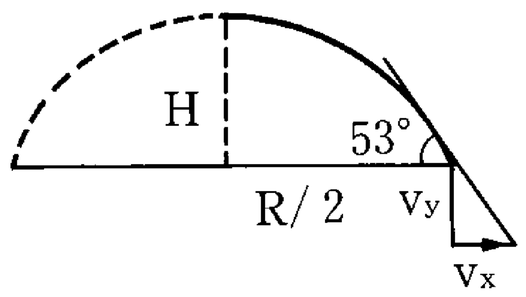
(2)在拋出至達最大高度之時距內，求其平均加速度？

(3)在拋出至落地之時距內，求平均速度？答：(A)45^o；(B)$10m/s^2$ 向下；(C)6m/s 向東

4.某跳遠選手在加速起跑後，以仰角 30° 從起跳線躍出，記錄為 7 公尺，若他的起跳初速增加 10%，則記錄將刷新為若干？ (A)7.8 (B)8.2 (C)8.5 (D)8 (E)9 公尺。答：(C)

5.以 53° 之仰角向拋出一物，則水平射程與最大鉛直位移之比為

(A)4：1 (B)3：1 (C)8：3 (D)16：3 (E)1：1。答：(B)



6.在高 40m 處以 20m/s 斜角 30° 拋出一石，$g=10\ m/s^2$ ，則：(a)幾秒著地？(b)2 秒末之高度與速度？(c)3 秒末之高度與速度大小？(d)著地之速度？

答：(a)4sec；(b)40m，$20\ m/s$ 與水平夾 30° 向下；(c)25m，$10\sqrt{7}\ m/s$；(d) $20\sqrt{3}\ m/s$

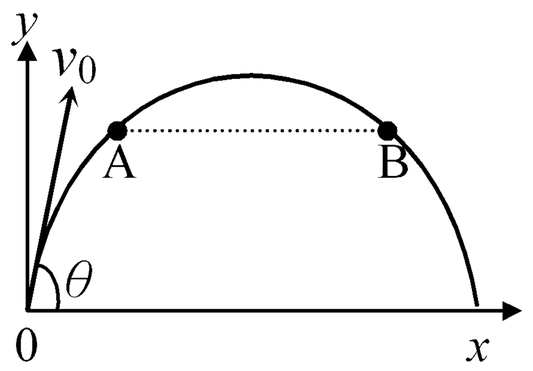
7. 1968 年美國人貝蒙在墨西哥奧運會締造了 9.80 公尺的世界跳遠記錄，假設他在起跳瞬間的速率為 9.50m/sec，且墨西哥市的 g 值為 $9.78\ m/s^2$，則他的成績和不計空氣阻力時的最大可能水平距離相差多少公分？【1997 奧林匹亞初選】答：33cm

8.夫：「哇哩！妳買那麼貴的胸罩幹嘛？妳根本沒什麼胸部嘛！」

妻：「喔！～照你這麼說，那你買內褲的錢也都可以統統省下來啦。」

夫：「……」

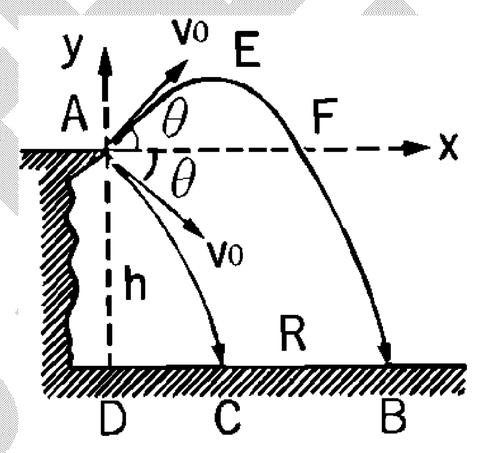
例40. 如圖所示為質量 m 之小石子被以 v_0 的初速度 θ 之仰角斜向上拋出後的運動路徑，小石子通過同一水平高度的 A、B 兩點須時 3 秒，小石子於拋出後 6 秒著地，若其水平射程 OP 等於 60 米，則 A、B 兩點相距多遠？答：30 米



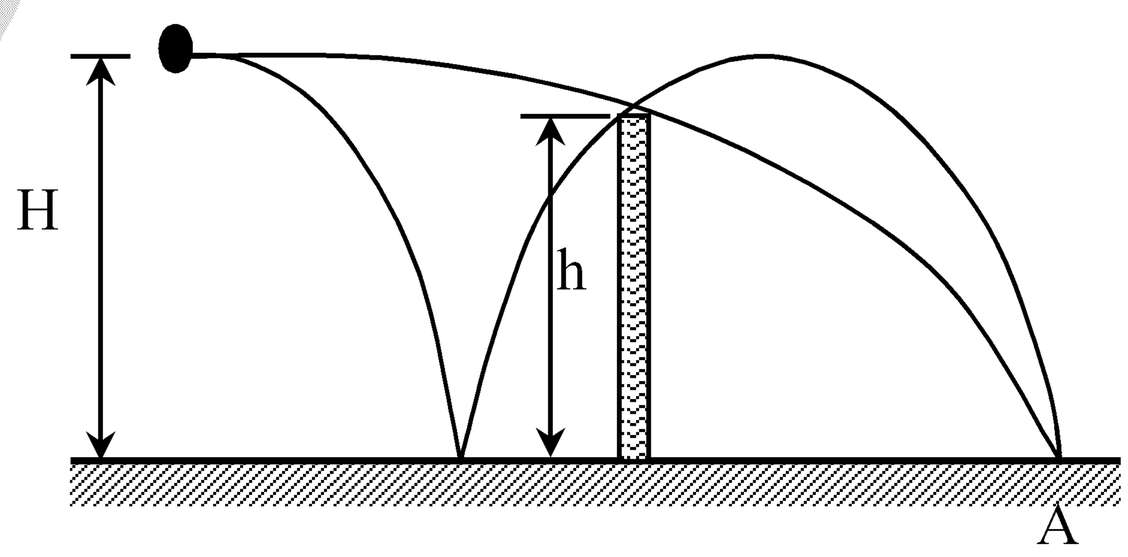
例41. 如圖自 h 高的 A 點將物體 P 以初速 v_o 仰角 θ 拋出而落於地面 B 點，另一物體 Q 同時以初速 v_o 俯角 θ 被拋出而落於地面 C 點。則

(1)求兩物落地時間差 Δt ？

(2)求兩物水平射程差 Δx ？答：(1) $\frac{2v_o \sin\theta}{g}$ ；(2) $\frac{2v_o^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$



例42. 一位網球選手以球拍擊球，使網球沿水平方向飛出。第一顆球落在自己一方場地上後，彈跳起來剛好擦網而過，落在對方場地的 A 點處，如圖所示。第二顆球直接擦網而過也落在 A 點處。設球與地面的碰撞是完全彈性碰撞，且不計空氣阻力，試求這位網球選手擊球點的高度 H 與網高 h 的比，$\frac{H}{h}$ ＝？【92 校內複賽】答：4/3



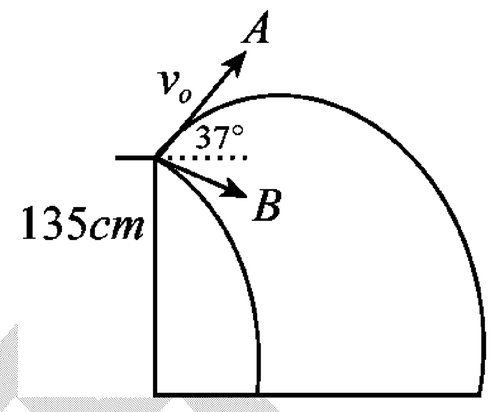
※家庭作業

1.一球 A 以 37°的仰角與 50 公尺／秒的初速度在高 135 公尺之崖頂斜向拋出，假設重力加速度 $g=10$ 公尺／秒^2，若另有一球 B 同時以 37°的俯角與 50 公尺／秒的初速度斜向下拋出，則

(1)2 秒後兩球相距？公尺

(2)兩球落地時間相差？秒

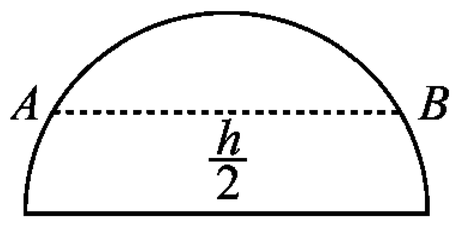
(3)兩球落地點相距？公尺。答：(1)120；(2)6；(3)240



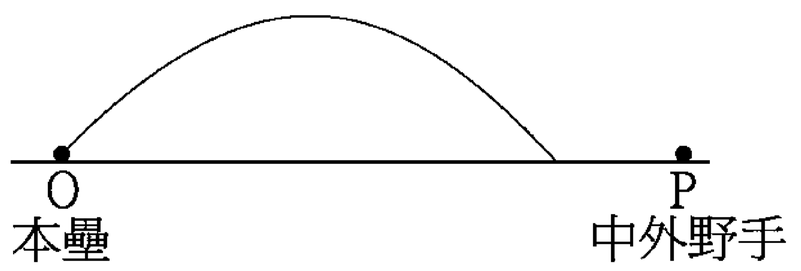
2.在高樓上，以相同初速 v_0 分別以仰角 45°及俯角 45°同時拋出 A、B 兩球，則兩球著地處距離若干？(重力加速度 g)

(A)條件不足無法求出 (B)$\frac{v_o^2}{2g}$ (C)$\frac{v_o^2}{g}$ (D)$\frac{3v_o^2}{g}$ (E)$\frac{2v_o^2}{g}$。答：(C)

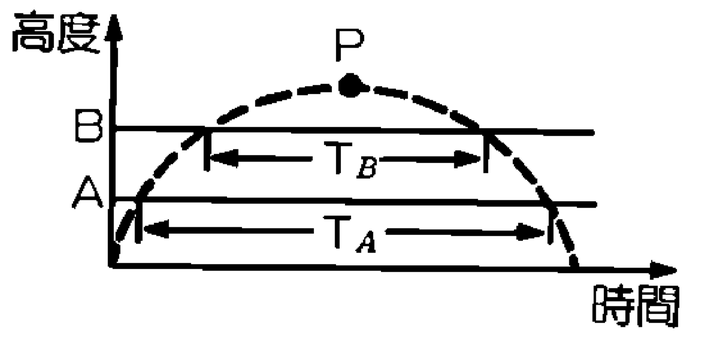
3.由地面斜拋一物，落地時水平射程 R，軌跡最大高度 h，則軌跡中高 $\frac{h}{2}$ 二點 A，B 兩點的距離爲？答：$\frac{R}{\sqrt{2}}$



4.在某次職棒比賽中，打擊手把球打向中間方向，中外野手同時以 8 m/s 的速率衝過去，在球落地前瞬間恰好接殺，若中外野手費時 4 秒，則此球的最大高度爲多少公尺？（假設 g=10 m/s^2） (A)條件不足，無法判定 (B)20 (C)25 (D)40。答：(B)



5.如右圖所示，斜向上拋一物體，測量物體上拋及下落經過水平線 A 的時差爲 T_A，經過水平線 B 的時差爲 T_B，不計空氣阻力，若 h 表 AB 兩水平線的鉛直距離，則該地的重力加速度量值爲若干？答：$g=\frac{8h}{T_A^2-T_B^2}$

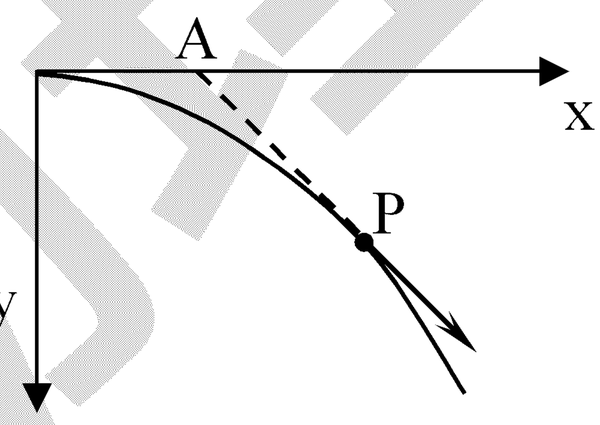


6.一初速爲 v_o 之炮彈從地面上斜向射出後，連續穿過空中的 A 和 B 兩點。若 A、B 兩點距離地面的高度均爲 h，而且假設此炮彈具有最大的水平射程，則 A 與 B 兩點間的水平距離爲____。【1997 奧林匹亞初選】答：$\frac{v_o}{g}\sqrt{v_o^2-4gh}$

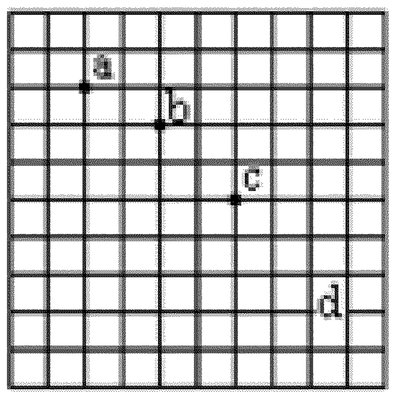
例43.一小球以初速 6.0m/s 斜拋射入空中，已知經歷一秒後，其速度方向垂直於初速度方向，則該小球拋射一秒後的瞬時速度大小爲_____m/s。(設重力加速度 $g=10m/s^2$)

【1999 奧林匹亞初選】答：8

例44.右圖所示是物體做平拋運動的 x-y 圖像，物體從 O 點拋出，x、y 分別爲其水平和鉛直位移，在物體運動的過程中，經某一點 P(x,y) 時，其速度的反向延長線交於 x 軸上的 A 點，則 OA 的長爲__【C】__ (3 分)【93 校內初賽】答：$\frac{x}{2}$

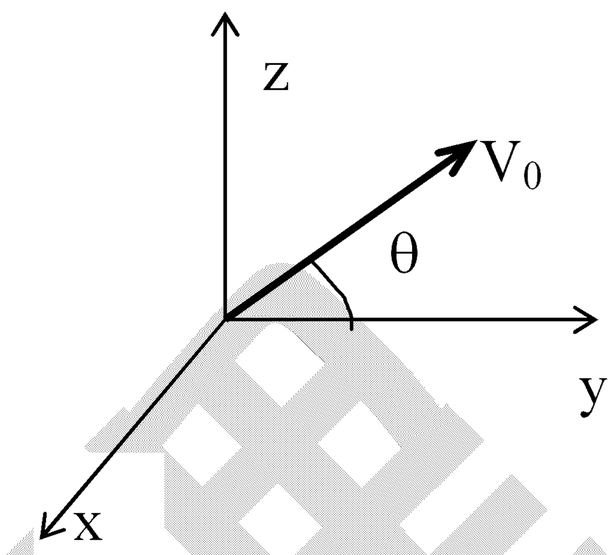


例45.在研究平拋物體運動的實驗中,用一張印有小方格的紙記錄軌跡,小方格的邊長 l=1.25 釐米.若小球在平拋運動途中的幾個位置如圖中的 a、b、c、d 所示,則小球平拋的初速度的計算式爲 v_0=_____(用 l、g 表示),其值是____.(取 g=9.8 米/秒 ^{2}) 【1995 大陸高考】答：

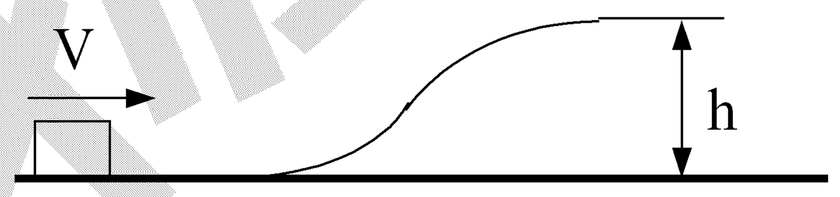


※家庭作業

1.如右圖所示，x-y 為水平地面，一質點從原點 O 處沿 y-z 面斜向拋出。設在 y 方向之初速分量為 $v_0\cos\theta$，在 z 方向之初速分量為 $v_0\sin\theta$，重力在負 z 方向(即鉛直向下)。此質點自拋出後，受一沿正 x 方向之定值橫向力 F(即 F 為常數)。設此質點之質量為 m，重力加速度為 g，則此質點落地時，(a)其位置座標(x，y，z)為_____。(b)落地時的動能較拋出時增加多少？_____。【1996 奧林匹亞初選】答：(a) $\left(\frac{2Fv_0^2\sin^2\theta}{mg^2},\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g},0\right)$ (b) $\frac{2F^2v_0^2\sin^2\theta}{mg^2}$



＊2.一小物塊以速度 V_0=10 米/秒沿光滑地面滑行，然後沿光滑曲面上升到頂部水平的高臺上，並由高臺上飛出，如圖所示。問當高臺的高度 h 多大時，小物塊飛行的水平距離最大？這個距離是多少？（g 取 10 米/秒 ^{2}）【93 校內複賽】答：h=2.5,射程=5



＊3.一小球從距地面高 H 處自由下落，當落下了 y 距離時，與一固定的小斜面產生彈性碰撞，碰撞後小球以原速率水平飛出後掉落地面。若欲使小球落地前的水平位移為最大，則 y=_____。【1997 奧林匹亞初選】答：H/2

＊4.鉛直上拋的炸彈在到達最高點瞬間突然爆裂成許多碎片，假設各碎片朝各不同的方向射出且具有相同初速率 V，則爆裂後 t 秒且碎片皆未著地前，

(1)各碎片所形成的曲線為一球面，此球面之半徑為？

(2)各碎片軌跡的最高點所形成的曲線為一扁橢球面，此橢球之長軸長度為？【93 校內初賽】答：(1) Vt ；(2) $\frac{v^2}{g}$

＊5.在離水平面高 h 處以一定速率 v 拋出一石子，不計空氣阻力，試求應以多大的仰角將石子拋出，才可使其水平射程最遠？【92 校內複賽】答：$\tan^{-1}\frac{v}{\sqrt{v^2+2gh}}$

吳錫玠老師 編授

觀念十三　鉛直速度變化ΔV_y→求 t

一、解題的基本觀念

1. 任何拋體運動，都是以運動的獨立性為基礎，將運動分為

①水平等速：$\Delta x = v_x \cdot \Delta t$

②鉛直等加速：$v_y = v_{oy} - gt$ ；$\Delta y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$ ；$v_y^2 = v_{oy}^2 + 2(-g)\Delta y$

2. 任何題型，都可用以上方程式的組合來解決，重點是你如何依題意去應用。

二、有變化才能解題

1. 這裡所說的變化包括：位置的變化(x，y)&速度的變化(v_x，v_y)

2. 前面所做過的題型就是以 y 的變化來求取時間，再由時間來求其他所有變化

三、利用v_y的變化來解題

1. 利用v_x來求v_y：因為v_x不變(水平等速)，所以我們可以用v_x來當比較的標準

①仰角(或俯角)θ：$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow v_y = v_x \cdot \tan\theta$

②末速v：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2}$

2. 因為鉛直方向是等加速度運動，可以利用v_y的變化來求時間($v_y = v_{oy} + (-g)t$)

或利用v_y的變化來求高度差($v_y^2 = v_{oy}^2 + 2(-g)\cdot\Delta y$)

四、為了維持班上秩序，老師規定凡是上課講話的都要到教室後面罰站，並且把說話的內容大聲說十次。

有一天，上課的時候，小明和鄰座的同學竊竊私語，被老師逮個正著。

老師怒道：「小明，到後面罰站，把你剛剛說的話再大聲說十次。」

小明低著頭走到教室後頭，開始喃喃的低聲說著。

老師怒斥：「大聲一點！讓全班都聽得到！」

小明提 高了嗓子：「老師的拉鍊沒拉……老師的拉鍊沒拉....」

例46.從一塔頂以 v_0 初速度向水平方向投一球，若球落至水平地面時，其速度與地面夾 ϕ 角，求：

(1)塔高？ (2)球著地所需之時間？

答：(1) $\frac{v_0^2 \tan^2 \phi}{2g}$ ；(2) $\frac{v_0 \tan \phi}{g}$

例47.一物自 h 高的塔頂水平拋射，著地時之瞬時速度和水平面成 45°，其水平位移為

(A) $\frac{h}{3}$ (B) $\frac{h}{2}$ (C)h (D)2h (E)3h 。【70 夜大】答：(D)

例48.將一質點自屋頂水平拋出，若不計空氣阻力，則由拋出至位移方向與水平成 45° 所經歷時間 t 及速度方向與水平成 45° 所經歷時間 t’的比為

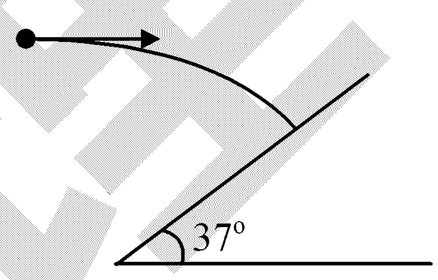
(A)4：1 (B)2：1 (C)1：1 (D)1：2 (E)1：4。答：(B)

※家庭作業

1.一物自高 h 處以 v_0 之水平初速拋出，著地時速度的方向與地面夾角 θ，著地點與拋出點連線和鉛直線夾角 ϕ，則 $\tan\theta \times \tan\phi$ 爲若干？答：2

2.一物沿水平方向以 30m/s 速度拋出，下落 h 高度時，速度與水平夾 30°，下落 h'高度時，速度與水平夾角 60°，則 h：h'=(A)1：2 (B)2：5 (C)1：9 (D)5：3 (E)3：5 。答：(C)

3.以 4.9m/s 的水平初速拋出的小球，在空中飛行一段時間後，恰好垂直地撞在傾角爲 37°的斜面上。可知該小球完成這段飛行的時間是？秒（不計空氣阻力及 $g=9.8\text{m/s}^2$）。答：2/3 sec



4.若一水平拋體著地時之速度與水平夾角 45°，則水平位移與鉛直位移之比爲

(A)1：1 (B)$\sqrt{2}$ ：1 (C)1：$\sqrt{2}$ (D)1：2 (E)2：1 。答：(E)

5.今以水平 v 的初速拋出一物體 (A)在拋出 $\frac{v}{g}$ 時距後，其前進的水平距離與落下的鉛直距離相等 (B)拋出 $\frac{v}{g}$ 時距後，其水平分速與鉛直分速相等 (C)經 $\frac{v}{g}$ 時距的鉛直距離爲 $\frac{v^2}{2g}$ (D)當鉛直分速與水平分速比爲 4：1 時，其鉛直距離與水平距離比爲 2：1 (E)當其水平距離與鉛直距離比爲 1：4 時，其鉛直分速與水平分速之比爲 4：1 。答：(B)(C)(D)

6.以 v_o 的水平初速度拋出一石子，不計空氣阻力，則

(1)在第 2 秒內速度變化量？

(2)速度方向自與水平夾 37° 的角度增至 53° 所經時間爲多少？答：(1)g m/s^2；(2) $\frac{7v_o}{12g}$

7.一球自 20 公尺高之位置以 v_0 初速水平拋出，設不計空氣阻力，且 g=10 公尺/秒^2，結果球著地之速率爲初速之 $\sqrt{5}$ 倍，則 v_0=_____公尺/秒。答：10

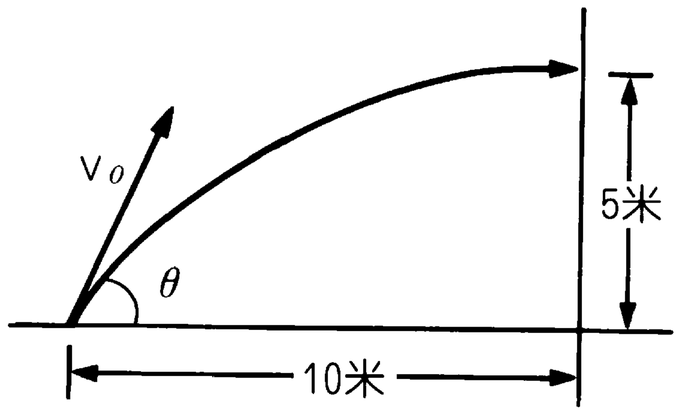
例49. 以初速 v_0 仰角 60° 自地面斜向上拋出一球，經歷多久時間後，球的運動方向與水平成俯角 30°？ (A)$\frac{v_0}{2g}$ (B)$\frac{v_0}{g}$ (C)$\frac{\sqrt{3}v_0}{g}$ (D)$\frac{\sqrt{3}v_0}{3g}$ (E)$\frac{2\sqrt{3}v_0}{3g}$。答：(E)

例50. 一斜向拋射物體，在最大高度時之速度大小為在最大高度$\frac{1}{2}$處速度大小的$\sqrt{\frac{2}{5}}$，則此拋體的仰角為何？(若不計空氣阻力)。答：60°

例51. 如圖所示，在鉛直壁面離壁角 10 米處一點將球斜拋，若球擊中壁面高 5 米處之速度恰與壁面垂直，則：

(1)球自投出迄抵壁面共歷時？

(2)初速 $v_o=$？ 仰角 $\theta=$？



答：(1)1 秒；(2) $v_o=10\sqrt{2}m/s$，$\theta=45°$

※家庭作業

1.一物以v_0之初速斜向拋出，在飛行過程中速度之最小值為$\frac{v_o}{3}$，則物體可達之最大高度為 (A)$\frac{v_o^2}{3g}$ (B)$\frac{v_o^2}{4g}$ (C)$\frac{v_o^2}{6g}$ (D)$\frac{3v_o^2}{8g}$ (E)$\frac{4v_o^2}{9g}$ 。答：(E)

2.一球自地表以v_0之初速，60°之仰角斜向拋出，若不計空氣阻力，當球的速度與水平成30°之瞬間，球離地面的高度應為

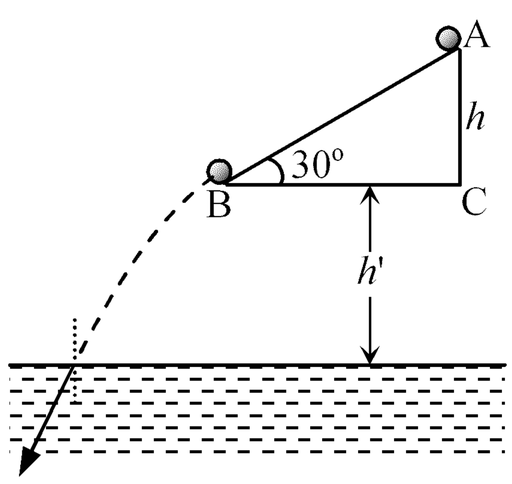
(A)$\frac{\sqrt{3}V_0^{\,2}}{2g}$ (B)$\frac{V_0}{2g}$ (C)$\frac{V_0^{\,2}}{3g}$ (D)$\frac{\sqrt{3}V_0^{\,2}}{g}$ (E)$\frac{V_0^{\,2}}{\sqrt{3}g}$ 。答：(C)

3.將一物體由地面以初速度v_0，仰角$\theta=53^\circ$斜向拋出，則當物體之速度與水平方向夾37°之仰角時，求：

(1)物體距地面高度為若干？

(2)若由拋出至仰角為37°時，費時t_1，由仰角為37°至最高點時，費時t_2，則$\frac{t_1}{t_2}$等於多少？答：(1)$\frac{7v_0^2}{32g}$；(2)$\frac{7}{9}$

4.距水面高h'處有一光滑斜面(斜角$\theta=30^0$)，斜面高為h，一質點由斜面頂端A沿斜面下滑，滑離斜面底端B後，落入水中擊中水面之俯角為60^0，則：



(1)由釋放至落入水面需時？

(2)h'為斜面高度h之若干倍？

(3)落入水面時速度大小？答：(1)$3\sqrt{\frac{2h}{g}}$；(2)2；(3)$\sqrt{6gh}$

5.以初速 v 仰角θ斜向拋出一球，空氣阻力不計，當球的速度與水平夾角是α時 (α<θ) 的速率為_____。答：$\frac{v\cos\theta}{\cos\alpha}$

觀念十四　切線加速度 a_t&法線加速度 a_N→求 t

一、切縣加速度、法線加速度

1. 一般的切線加速度 a_t &法線加速度 a_N（參考 P. 25. 觀念九）

(1)利用內積 $\vec{a}\cdot\vec{v}=|\vec{a}||\vec{v}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|}$

可求得加速度與速度之夾角 θ

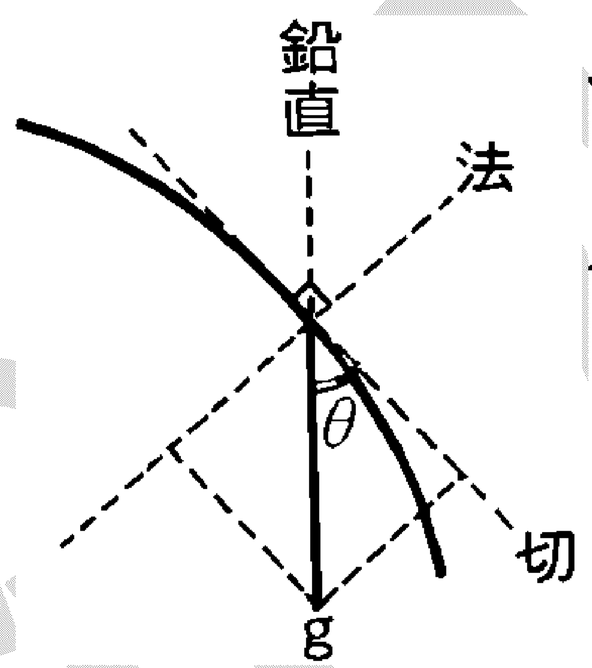
(2)切線加速度 $\vec{a}_t$ 的大小 $=|\vec{a}|\cos\theta$

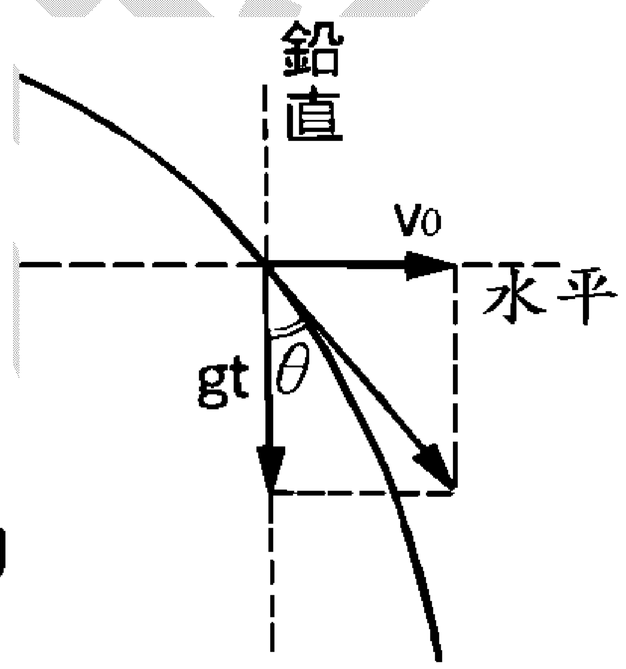
法線加速度 $\vec{a}_N$ 的大小 $=|\vec{a}|\sin\theta$

2. 拋體的切線加速度 a_t &法線加速度 a_N

(1)拋體運動雖為等加速度運動，但如果將加速度沿速度方向分解，則可分解為切線加速度與法線加速度

(2)由右圖可看出，





速度 v 可分解為水平速度 v_x 及鉛直速度 v_y

加速度 g 可分解為法線加速度 a_N 及切線加速度 a_t

在兩者間有一個共同的角度 θ（θ 為加速度與速度之夾角）

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{a_N}{g}=\dfrac{v_x}{v}\\ \cos\theta=\dfrac{a_t}{g}=\dfrac{v_y}{v}\\ \tan\theta=\dfrac{a_N}{a_t}=\dfrac{v_x}{v_y}\end{cases}$$

（式中之 $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ 僅用來觀察比較兩者間對應關係，本身並沒有什麼物理意義）

例52. 將一物體以 4m/s 的初速水平射出，當其速度爲 8m/s 時，則

(1)歷時多久？

(2)切線與法線加速度各爲何？

(3)位移若干？

(4)速度變化量若干？($g=10\,m/s^2$)

答：(1) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 秒；(2) $5\sqrt{3}\ m/s^2$ ；$5\,m/s^2$ ；(3) $\frac{4\sqrt{21}}{5}$ m；(4) $4\sqrt{3}$ m/s

例53. 一物水平拋出，t 秒後其法線加速度與切線加速度之大小相等，則再經幾秒，法線加速度爲切線加速度之半？ (A)t (B) $\frac{t}{2}$ (C) $\sqrt{2}t$ (D)2t (E)3t 。答：(A)

例54. 以 10m/s 之初速在水平方向拋出一物體，不計空氣阻力，當水平位移與垂直位移之比值爲 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 時，此時切線加速度與法線加速度大小之比值爲

(A)1 (B) $\frac{1}{2}$ (C)2 (D) $\sqrt{3}$ 。答：(D)

※家庭作業

1.水平拋物運動初速 $10\,m/s$ ，當其切線加速度爲 $5\ \ m/s^2$ 時，此物已落下(g=$10\,m/s^2$)
(A)1.67m (B)2.5m (C)5m (D)8.66m (E)9.76m。答：(A)

2.以 4.9 m/s 之水平初速拋出一球，當其法線加速度達 4.9 m/s^2 時，球在空中經歷之時間爲：(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (C)$\frac{\sqrt{3}}{6}$ (D)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (E)$\frac{\sqrt{3}}{3}$ sec。 答：(A)

3.某質點自高處水平拋出，第 2 秒末切線與法線方向加速度值相同，且於第 3 秒末著地，求：
(1)拋射點高度？
(2)著地時之水平射程？(g=$10\,m/s^2$)答：(1)45m；(2)60m

4.初速v_0向水平拋出一物，向下作加速度 g 之等加速度運動，則 t 秒末之切線及法線加速度爲若干？答：$a_t=\frac{g^2t}{\sqrt{v_o^2+g^2t^2}}$；$a_n=\frac{gv_o}{\sqrt{v_o^2+g^2t^2}}$

5.一物以 30m/s 之初速作水平拋射，則物體 4 秒末之法線加速度爲
(A)0 (B)2 (C)4 (D)6 (E)8 m/s^2 。【設 g=$10\,m/s^2$ 】答：(D)

6.以初速 29.4m/sec 水平拋物運動，第 4 秒末，其切線加速度爲何？（重力加速度爲 g）
(A)g (B)0.8g (C)0.6g (D)0.5g (E)0.4g。答：(B)

7.物體以水平初速$v_0=\ 20\,m/s$拋出，則拋出後_____秒法線加速度與切線加速度量值相等；此時水平位移與鉛直位移的比值爲_____。(g = $10\,m/s^2$)答：2，2

8.水平拋射物體的水平位移爲垂直位移的兩倍時，其切線加速度與法線加速度比值爲何？
_____。答：1

吳錫玠老師 編授

觀念十五　斜坡

一、利用 $\frac{y}{x}$ 來求時間

1. 前面所做過的題目，皆有明確的 Δy 或 Δv_y。但物體落在斜坡上的題目，因為無法確定落點，

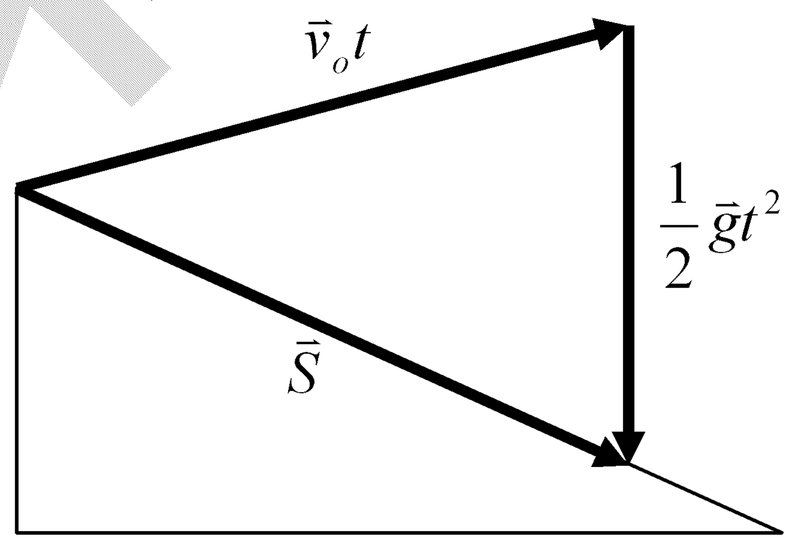
所以找不到明確的 Δy 或 Δv_y

2. 利用 $\frac{y}{x}$ 的比值來求 t

雖然找不到明確的 Δy 或 Δv_y，但斜坡的角度 θ 與位移有 $\tan\theta=\frac{y}{x}$ 的關係

二、利用 $\vec{S}=\vec{v}_o t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$ 來解題

1. 如右圖，$\vec{S}=\vec{v}_o t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$ 是一種向量和的關係，可畫成



一個封閉三角形

2. 利用正弦定律，可求出三邊長與角度的關係

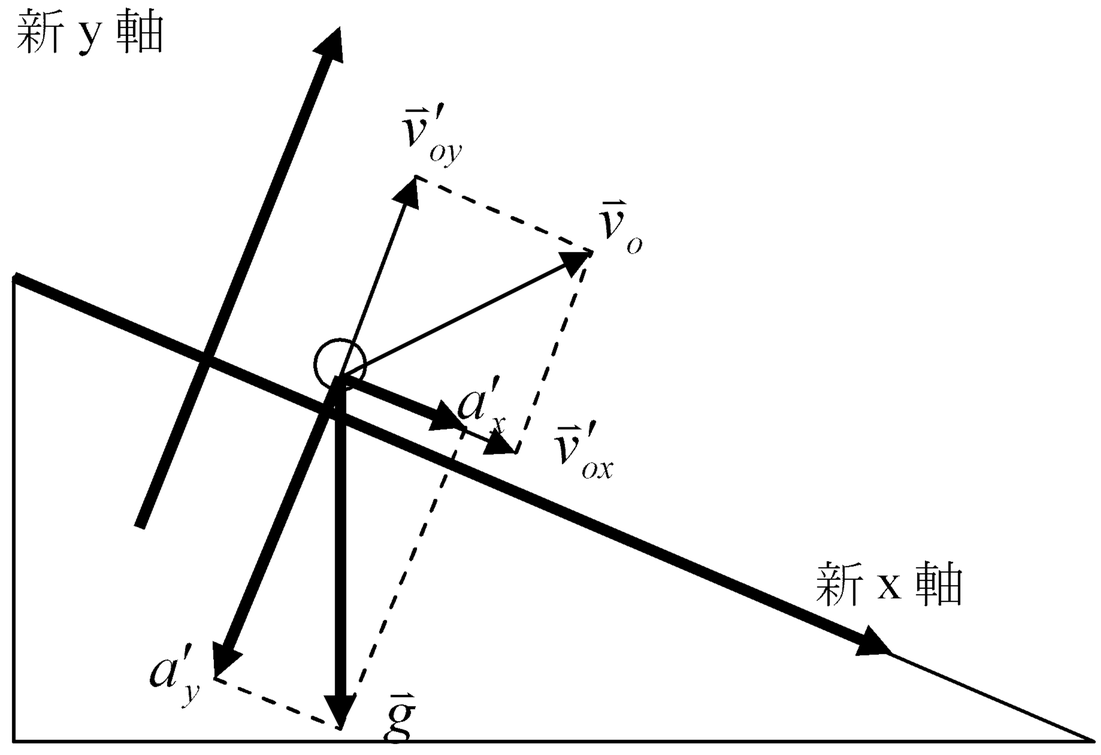
三、改變觀察者(參考座標)

1. 因斜坡上的拋體考慮的是斜坡與物體的關係，可將參考座標改成以斜坡為軸的新參考座標

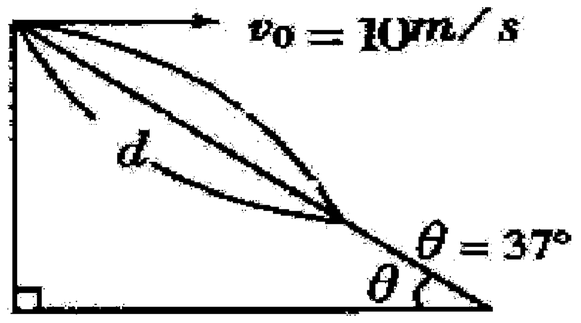
2. 依然遵守運動的獨立性，但

舊作標 $\Rightarrow$ { 水平等速 / 鉛直等加速 }

新座標 $\Rightarrow$ { 新x軸：等加速 / 新y軸：等加速 }



例55.石子自斜角37°之斜面頂以水平初速10 m/s 水平拋出，且g=10 m/s^2 ，則：



(1)經_____s 後彈著斜面。

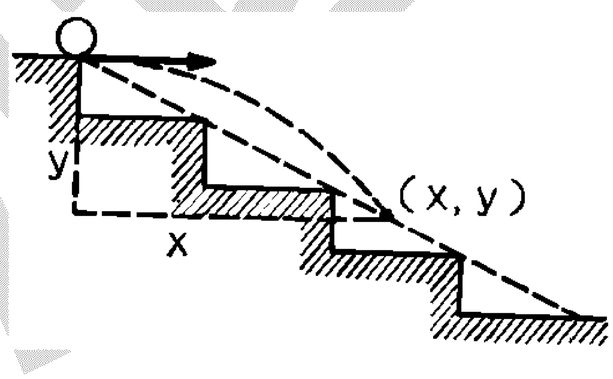
(2)拋出點距離斜面頂之距離 d=_____m。

(3)著斜面之末速爲_____ m/s

(4)著斜面時之加速度量值爲_____ m/s^2

答：(1)1.5；(2)18.75；(3)18.03；(4)10 m/s^2

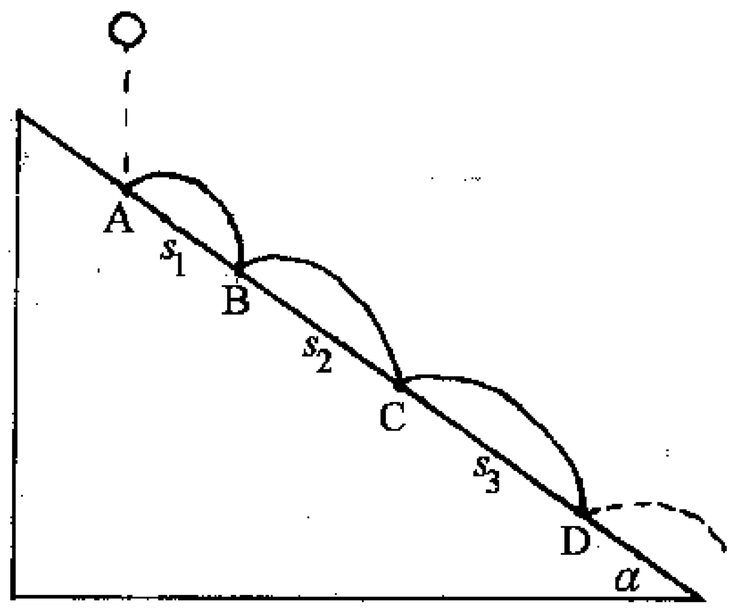
例56.如右圖，梯級均寬爲30公分，高爲25公分，一球由樓梯頂層滾出，其水平速度爲5公尺/秒，求：(g=10 m/s^2)



(1)球將落在第幾階？(2)歷時若干秒？

答：(1)14階；(2) $\frac{\sqrt{70}}{10}$ 秒

例57.一斜面的斜角爲α，一彈性小球垂直下落至斜面後，反覆彈起又掉落，小球碰觸斜面的位置分別以A、B、C、D表示，相鄰兩碰觸點間的距離 S_1、S_2、S_3 構成一數列，試求此數列有什麼規則性？



(A)$S_1 = S_2 = S_3$

(B)S_1、S_2、S_3...呈等比級數的關係

(C)S_1、S_2、S_3...呈等差級數的關係

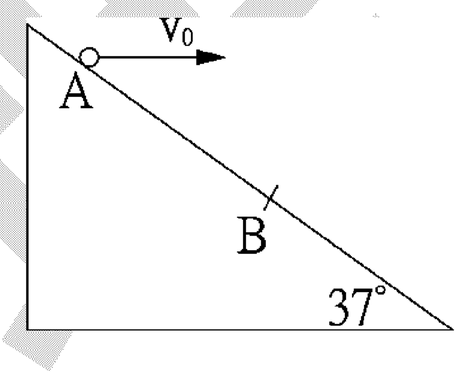
(D)以上皆非【94校內初賽】答：(C)

※家庭作業

1.一石子自傾角 37° 之斜面頂端以初速 10 m/s 水平拋出，若空氣阻力不計，且 g=10 m/s^2 ，求石子擊中斜面時，(1)已歷時多久。(2)落點至拋射點的距離。(3)瞬時速率。(4)瞬時加速度量值。(5)法線加速度量值。

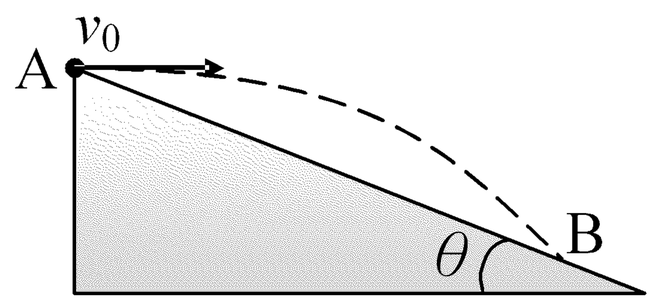
答：(1)1.5s；(2)$\frac{75}{4}$m；(3)$5\sqrt{13}\ m/s$；(4)10 m/s^2；(5)$\frac{20}{\sqrt{13}}\ m/s^2$

2.自 A 點以 20 m/s 的速度水平拋出，如附圖，結果落於斜面上 B 點，若重力加速度為 10 m/s^2，則下列何者正確？ (A)由 A 飛行至 B 歷時 3 秒 (B)A、B 之間的距離為 75 公尺 (C)落於斜面時的水平速度為 20 m/s (D)承(C)，鉛直速度為 30 m/s (E)承(C)，瞬間速度與水平方向夾角的正切值為 1.5。答：全



3.球從樓梯頂滾下，其水平速度為 2 公尺/秒，階梯高 20 cm、寬 25 cm，求：（g ≒ 10 公尺/秒 ^{2}）(1)將擊中那個階梯？ (2)所需之時間？答：(1)3；(2)$\frac{\sqrt{3}}{5}$秒

4.如右圖，自 A 點以 v_0 初速沿水平方向拋出一物而落於 B 點，自由落體加速度以 g 表示，求：(1)所歷時間？ (2)物體沿斜面射程？ (3)物體落於斜面時之速率答：(1)$\frac{2v_0\tan\theta}{g}$；(2)$\frac{2v_0^{\ 2}\tan\theta}{g\cos\theta}$；(3)$\sqrt{1+4\tan^2\theta}\cdot v_0$



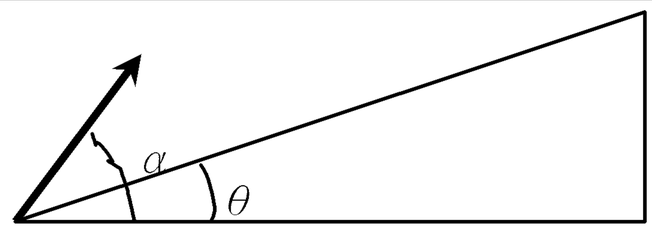
5.一質點以 20m/s 之初速水平拋出，當它的水平位移與鉛直位移之比為 2：1 時，求：(1)速度？(2)俯角？【設 g=10 m/s^2 】答：(1)$20\sqrt{2}\ m/s$；(2)45°

6.有一石階每一階高 20cm，寬 30cm，今一物體自頂階水平拋出 v_o=5 m/s，此物將落於第幾階？ (A)5 (B)7 (C)9 (D)12 (E)14。答：(D)

例58. 以 v_o 初速度自傾斜角 θ 之斜坡下，以 α 的仰角斜拋一物，求：

(1)經若干時間落至斜面上？

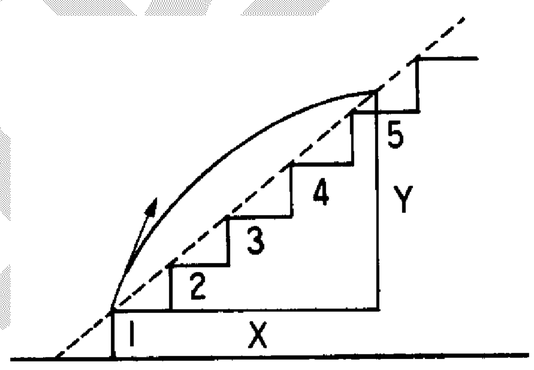
(2)物體在斜面上之位移為何？答：(1) $\frac{2v_o \sin(\alpha-\theta)}{g\cos\theta}$ ；(2) $\frac{2v_o^2 \sin(\alpha-\theta)\cos\alpha}{g\cos^2\theta}$



例59. 有一樓梯，每階高 10cm，寬 20cm，一小石頭由第一階底端以 $5\,m/s$ ，仰角 53° 拋出。若 g=10 m/s^2 ，則

(1)將撞到那一階？(2)拋出至撞擊樓梯需時若干？

答：(1)第 9 階；(2)0.533 秒



例60. 從斜角 θ 之斜坡上的 A 點以速度 v_o 向坡的上端斜拋一彈性球，若球在斜面上的碰撞為彈性碰撞，則

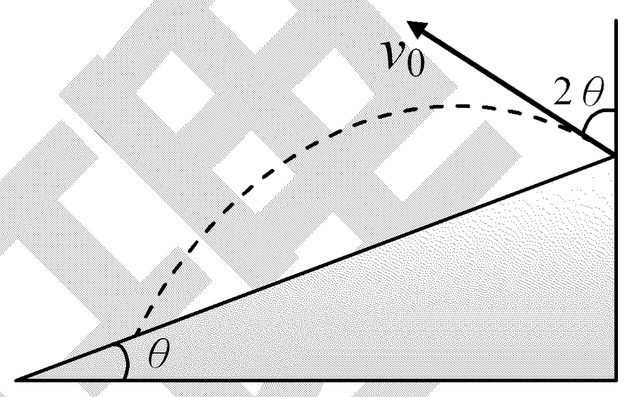
(1)欲使球在斜面上碰撞一次後反彈回原拋出點，初速度 v_o 與斜面的夾角 ϕ 應為若干？

(2)若反彈兩次，初速度 v_o 與斜面的夾角應為若干？【92 校內初賽】答：(1) $\phi = \cot^{-1}(2\tan\theta)$；(2) $\phi = \cot^{-1}(3\tan\theta)$

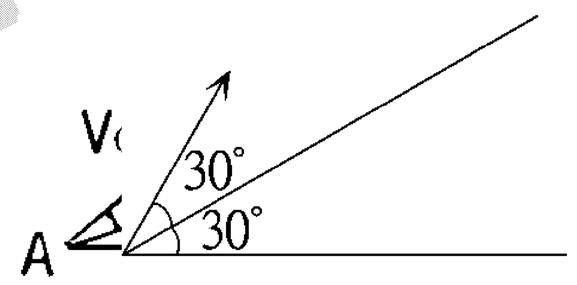
※家庭作業

1.自斜角為 37 度的斜坡底，向斜面上方拋出一物，若初速方向與斜面夾角為 θ，且落在斜面時之速度恰在水平方向，則 $\tan\theta$ 為？答：$\frac{2}{17}$

2.一物體在傾斜角為θ之光滑斜面上，以和鉛直線夾 2θ之夾角、v_0之初速度斜向拋出一球，如右圖。若重力場強度為 g，斜面極長且球可落於斜面上，則由拋出至碰到斜面歷時：(A)$\frac{v_0 \sin\theta}{g}$ (B)$\frac{v_0 \sin\theta}{2g}$ (C)$\frac{2v_0 \cos 2\theta}{g}$ (D)$\frac{2v_0 \sin 2\theta}{g}$ (E)$\frac{2v_0}{g}$ 。答：(E)

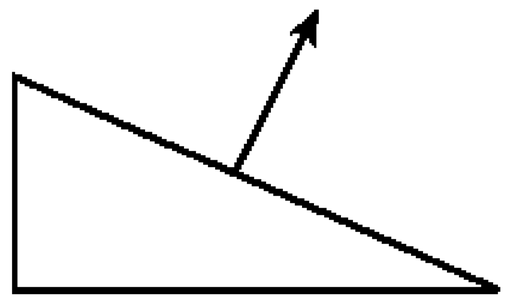


3.如圖，一球自傾斜角30°之斜面上 A 點以初速 v_0，仰角60°斜向拋射，落到斜面 B 點，若重力加速度為 g，則(1)球飛行時間為何？(2)物體在斜坡上的射程為_____。答：

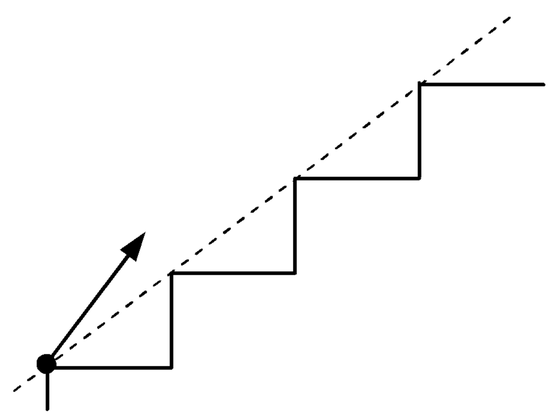


(1)$\frac{2v_o}{\sqrt{3}g}$；(2)$\frac{2v_0^2}{3\,g}$

4.一球由斜角 30°的斜面上拋出，且落點仍在斜面上，已知球拋出的初速為 10 公尺／秒，方向與斜面垂直。若重力加速度為 10 公尺/秒^2，則小球之落點與出發點間的距離為何？(A)$\frac{75}{4}$ (B)$\frac{40}{3}$ (C)$\frac{50}{3}$ (D)$\frac{40}{\sqrt{3}}$ (E)20 米。答：(B)



5.有一石階，每一階高 30 cm，寬 40 cm，自最低階以仰角 53°，初速 10 m/s 斜拋一球，不計空氣阻力，g = 10 m/s^2，此球將落在第幾階？(A)9 (B)11 (C)13 (D)15 (E)17 。答：(B)



觀念十六　空中相撞

一、空中相遇

1. 空中相遇所指的是兩個東西同時出現在同一位置，意即

$\Rightarrow x_A(t)=x_B(t)$ 且 $y_A(t)=y_B(t)$

2. 因兩物體在空中的加速度均為(-g)，意即可利用相對運動，將兩物之加速度相消掉，使一物靜止，另一物做等速直線運動

3. 既然在空中相遇，所以物體之高度 y 需大於 0。

二、有個老美到台灣來渡假，一天他在用餐時間，

他先點了一隻龍蝦，當服務生準備把他吃剩的龍蝦殼收走時

他問：『你們如何處理吃剩的龍蝦殼？』

服務生回答：『當然是丟掉丫』

美國人說：『nonono！在我們美國，我們將吃剩的龍蝦殼送到工廠加工，做成蝦餅，然後賣到你們台灣來！』

之後，當老美吃完橘子時，服務生準備把橘子皮收走時，

美國人又問：『你們如何處理吃完的橘子皮？』

服務生回答：『當然是丟掉丫！』

美國人說：『nonono，在我們美國，我們將吃完的橘子皮送到工廠加工，做成果醬，然後賣到你們台灣來！』

等到美國人要到櫃台結帳，口裡嚼著口香糖…

美國人問：『你們如何處理吃完的口香糖呢？』

服務生回答：『當然是丟掉丫』

美國人說：『nonono，在我們美國，我們將吃完的口香糖送到工廠加工，做成保險套，然後賣到你們台灣來！』

這時服務生問他：『那你們要如何處理用過的保險套呢？』

美國人回答：『當然是丟掉!』

服務生說：『nonono，在我們台灣，我們將用過的保險套送到工廠加工，做成口香糖，然後賣到你們美國去！』

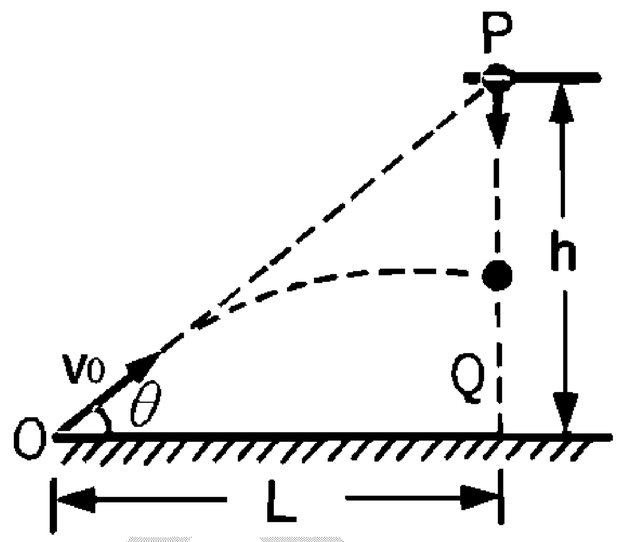
例61.如圖某物 P 原靜止於高 h 處，今自地面 O 點以初速 v_o 發射子彈欲命中 P 的同時，P 自由落下，求：

(1)θ 角應如何選取才能命中？

(2)子彈出發後經幾秒命中 P？

(3)子彈初速的大小 vo 應如何限制才有機會命中 P？

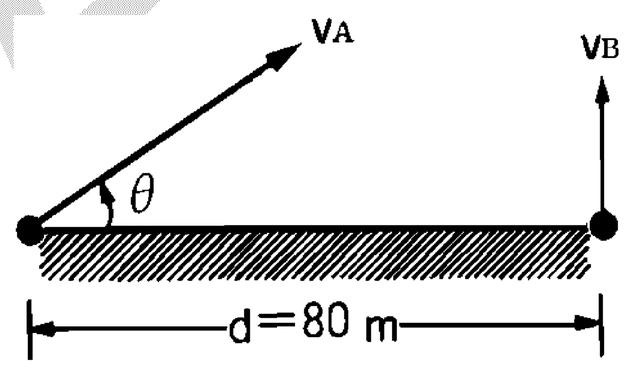
(4)子彈命中該物時，物體之速度大小為？



(5)子彈命中該物時，若子彈係沿水平方向運動，則 v_o 為若干？答：(1) $\tan\theta=\frac{h}{L}$；

(2) $t=\frac{\sqrt{L^2+h^2}}{v_o}$；(3) $v_o>\sqrt{\frac{g(L^2+h^2)}{2h}}$；(4) $\frac{g\sqrt{\ell^2+h^2)}}{v_0}$；(5) $\sqrt{\frac{g(\ell^2+h^2)}{h}}$

例62.如右圖，若兩質點 A、B 初速各為 50m/s、30m/s，同時由同一水平面出發，相距 80m，若 A 質點為斜拋，B 質點為鉛直拋射，g=10 m/s^2，則：



(1)A 質點之拋射角 θ 為若干時，二質點方能在空中相遇？

(2)相遇時質點距地高度若干？

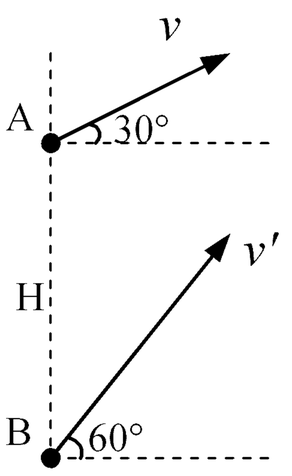
(3)兩質點相距 d 若干時，才可能於運動到最高點相遇？

(4)兩質點相距 d 若干時，才可能在空中相遇？

答：(1)37°；(2)40m；(3)120m；(4) $0<d\le 240$

例63.在下圖中，質點 A 在質點 B 鉛直上方 H 處，以初速 v 與水平成 30°的仰角拋出；質點 B 同時在地面與水平成 60°的仰角拋出，不計空氣阻力，重力加速度 g，則：(1)A、B 二質點由拋出至相遇共歷時若干？

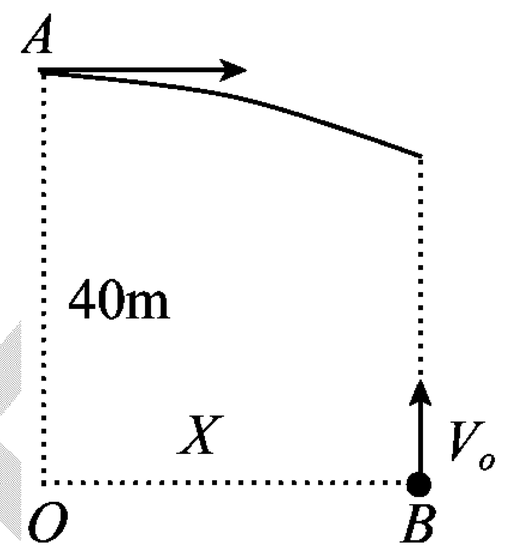
(2)A、B 二質點能在空中相遇，v、g、H 的關係為何？



答：(1) $\frac{H}{v}$；(2) $v>\sqrt{\frac{2gH}{3}}$

※家庭作業

1.小球 A 在地面上 O 點之上方高 40m 處，以 5m/s 之水平初速拋出，同一瞬間，另一小球 B 在地面上距 O 點為 X 處以 v_0 之初速鉛直上拋，若他們均在同一鉛直面內運動，又 2 秒後它們恰可相接，則 v_0 之值為？m/s，又 X＝？m（g＝10m/s^2）。答：20、10



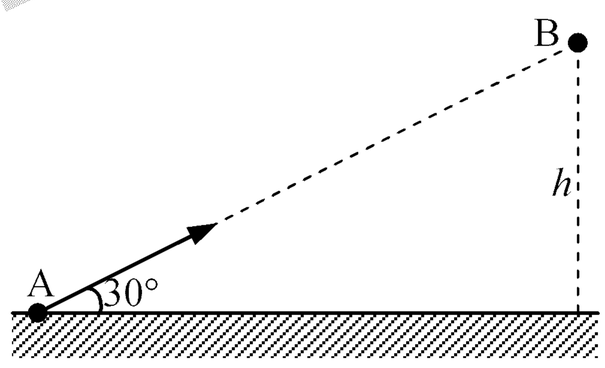
2.一球在平地上以某初速，仰角為 60°拋出，一石子在球的正上方高度為 h 處，同時以初速 v_0，仰角為 30°拋出，忽略空氣阻力，並假設兩物會相撞，則球的初速為(A) v_0　(B) $\sqrt{3}\,v_0$　(C) v_0　(D) $2\,v_0$　(E)$3v_0$。承上，拋出後到兩物相撞所經過的時間為若干？ (A) $\sqrt{3}\,h/v_0$ (B) $\sqrt{2}\,h/v_0$ (C)$3\,h/v_0$ (D)$2\,h/v_0$ (E)h/v_0。答：(B)；(E)

3.如圖，B 離地面高度為 h，當 A 自地面以初速度 v_0 仰角 30°射向 B 球同時，B 球自由下落，下列敘述何者正確？(不計空氣阻力)

(A)B 看 A 的相對速度為 v_0 接近 B

(B)B 看 A 運動軌跡為一拋物線

(C)若 $v_o > \sqrt{2gh}$，則 A 必可擊中 B



(D)同(C)之問題 A、B 兩球相遇時刻為拋出後 $\dfrac{2\sqrt{3h}}{v_0}$

(E)若 A、B 兩球相遇時，A 球恰達最高點，則 v_0=$2\sqrt{gh}$。答：(A)(C)(E)

4.一槍以發射角各為α及α'先後發射，若$\alpha > \alpha'$，發射初速均為 v_o，兩彈能在空中相撞，則發射時間相距 (A)$\dfrac{2{v_0}^2}{g}$　(B)$\dfrac{v_0}{g}$　(C)$\dfrac{2v_0}{g}(\dfrac{\sin(\alpha-\alpha')}{\cos\alpha+\cos\alpha'})$　(D)$\dfrac{v_0}{g}\dfrac{\sin(\alpha-\alpha')}{\cos\alpha-\cos\alpha'}$。答：(C)

5.丫強：「喂，跟女人結婚有甚麼用？」

丫鮭：「有個鳥用。」

丫強：「那男人為甚麼要離婚呢？」

丫鮭：「因為不想幹了… 」

觀念十七　斜拋公式

一、斜拋運動常用公式

1. 最大高度：$H=\dfrac{v_o^2\sin^2\theta}{2g}$

2. 飛行時間：$T=\dfrac{2v_o\sin\theta}{g}$

3. 水平射程：$R=\dfrac{2v_o^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\dfrac{v_o^2\sin 2\theta}{g}$

①$\theta=45°$時，水平射程最大。

②$\theta=45°$時，$R=4H$【$\because R=\dfrac{v_o^2}{g},H=\dfrac{v_o^2}{4g}$】

③若兩物體之初速$v_1=v_2$，仰角$\theta_1+\theta_2=90°$，則$R_1=R_2$

4. 以上公式不需要背，但須能自行迅速推導出來

二、四個男子相約一起開車遠行去露營。

在路上，口吃的男子結結巴巴的說：我..我...我..我...前座的男子聽的不耐煩，就說：「有什麼事你就快說，不然就閉嘴！」口吃的男子就安靜下來不說話了。

到了目的地，大夥兒興奮的下車準備到候車箱拿帳棚。

這時，口吃男子說話了：「我...我我....」大夥又不耐煩的問他到底要說什麼。

口吃男子說：「剛剛是要跟你們說...我...忘了帶帳棚！」

大夥氣憤不已罵他怎麼不早講，他就說：「我剛剛要跟你們講，可是你們叫我閉嘴，所以我就不講了。」

敗興的一夥人只再返回家裡拿帳棚，一路上抱怨不已。

就在這個時候，口吃男子又說：「我..我...我..我...」，前座的男子聽得又不耐煩，就說：「你到底要講什麼啦！要就說出來，不然就閉嘴！」口吃的男子只好再度閉嘴安靜下來。

好不容易快開到家，大家心想趁天還沒黑之前，趕快回到家把東西搬一搬上路。

就在路上，口吃男子又說話了：「我...我...我..我...」，眾人終於耐不住性子，很生氣的問他到底要說什麼！？

口吃男子終於說：「我..我..我...我騙你們的啦！！」

例64.一物自地面斜向拋出，欲使其水平射程爲最大高度之 3 倍，則拋出時之仰角爲
(A) 53° (B) 37° (C) 30° (D) 45° (E) 60° 。答：(A)

例65.以一定之初速，作兩次斜向拋射，其最大高度分別爲 H_1 及 H_2，若兩次水平射程相等，則此射程爲_____。答：$4\sqrt{H_1H_2}$

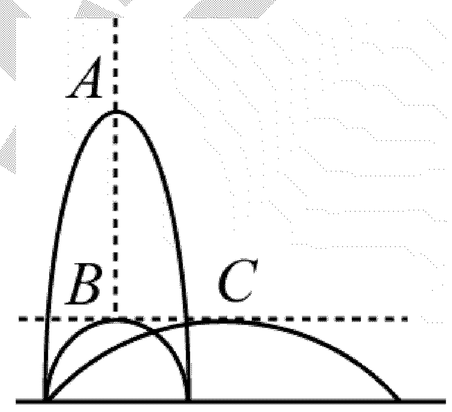
例66.投擲鉛球的選手，要在向前跑步的過程中，將鉛球投出，使其射程最遠（忽略空氣阻力，及人身高的影響）。設選手跑步速度爲 $\vec{V}_0$。投射鉛球相對於選手的速度爲 $\vec{V}_r$，鉛球相對於地面的速度爲 V，則 (A) $\vec{V}=\vec{V}_o+\vec{V}_r$ (B) $V_r^2=V^2+V_o^2-\sqrt{2}V_o\cdot V$ (C)手以小於 45° 之仰角投出 (D)水平射程爲 $\frac{v_r^{\ 2}}{g}$ (E)球飛行過程中離地面最大高度爲 $\frac{v^2}{4g}$。【72 日大改】答：(A)(B)(E)

※家庭作業

1.不計空氣阻力，物體以相同的初速，分別以仰角θ、$(\frac{\pi}{2}-\theta)$與45°拋出，其飛行過程中最大高度分爲H_1、H_2與H，則$H_1+H_2=$_____H。答：2

2.若以相同的速率，分別以仰角θ_1及θ_2將小球由地面斜向拋出後，小球水平射程均爲R，但最大高度分別爲h_1及h_2，則$\theta_1+\theta_2=$？；$h_1h_2=$？答：90°；$\frac{R^2}{16}$

3.圖爲A、B、C三小球在同一鉛直面同時拋出之軌跡，已知高度比$H_A:H_B:H_C=2:1:1$，射程比$R_A:R_B:R_C=1:1:2$，則飛行時間比＝？ (A)2：1：1 (B)1：1：2 (C)$\sqrt{2}$：1：1 (D)1：1：1。答：(C)



4.以v_o之初速將物體以斜向拋出，所能達之最大水平射程爲R，則以相同之初速率將物體斜向上拋出，但水平射程僅爲$\frac{R}{2}$時，其拋射角應爲何？答：15°或75°

5.在水平地面上斜拋兩物體，其初速分別爲v及2v，仰角分別爲θ_1及θ_2，不計阻力，而$\theta_1>\theta_2$，且$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$，若兩者之水平射程分別爲$R_1$及$R_2$，則$R_1$與$R_2$之關係爲 (A)$4R_1=R_2$ (B)$2R_1=R_2$ (C)$R_1=R_2$ (D)$R_1=2R_2$ (E)$R_1=4R_2$。答：(A)

6.一物斜向上拋，水平射程和最大高度相等。設拋射角和地面成θ角，則：(A)$\tan\theta=4$ (B)$\tan\theta=2$ (C)$\sin\theta=4$ (D)$\cot\theta=4$ (E)$\cot\theta=2$。【71 夜大】答：(A)

7.以相同的初速，30°與60°的仰角，分別從地面拋射二物，則： (A)水平射程之比爲1：1 (B)上升最大高度之比爲1：$\sqrt{3}$ (C)達最大高度時，瞬時速率之比爲$\sqrt{3}$：1 (D)飛行時間之比爲1：$\sqrt{3}$ (E)全程最小速率之比爲$\sqrt{3}$：1。答：(A)(C)(D)(E)

觀念十八　拋體的軌跡方程式

一、軌跡方程式 $y=\tan\theta\cdot x-\dfrac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}x^2$

證明：$\begin{cases} x=v_o\cos\theta\cdot t & \\ y=v_o\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2 & \end{cases}$

由①得 $t=\dfrac{x}{v_o\cos\theta}$

代入②得 $y=\tan\theta\cdot x-\dfrac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}x^2$

1. 以上方程式是以拋出點為座標系的原點
2. v_o 代表初速，θ 代表仰角
3. 拋物線的標準式 $y=ax^2+bx+c$，最常見的解法就是軌跡上任三點座標代入，求 a、b、c
4. 我們上面所證的方程式是以原點為出發點，也就是必通過 $(0,0)$，所以 $y=ax^2+bx+c$ 中之 $c=0$，方程式中只剩 a、b 兩個未知數，所以只需再找 2 個條件

二、題型 $\Rightarrow$ 由初速&仰角，求軌跡方程式

1. 解題方法如上方證明

三、題型 $\Rightarrow$ 通過軌跡上某一點，求初速或求仰角

1. $\begin{cases} \text{軌跡上一點座標} \\ \text{初速}v_o \end{cases}\Rightarrow$ 求仰角 θ，求軌跡方程式
2. $\begin{cases} \text{軌跡上一點座標} \\ \text{仰角}\theta \end{cases}\Rightarrow$ 求初速 v_o，求軌跡方程式
3. 軌跡上兩點座標 $\Rightarrow$ 求軌跡方程式

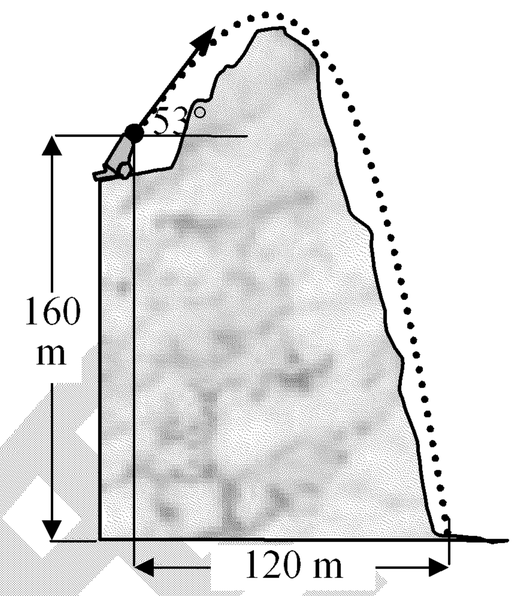
四、題型 $\Rightarrow$ 軌跡方程式，求初速、仰角、飛行高度、飛行時間、射程

1. 利用比較係數法，可得 $\tan\theta$ 與 $\dfrac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}$ 的質，經化簡可得仰角 θ 與初速 v_o
2. 直接由方程式找出射程與最大高度，再求出其他
3. 軌跡的斜率 $=\dfrac{dy}{dx}$，再將 $x=0$ 代入，可求出拋出時仰角之 $\tan\theta$

例67. 一砲台以仰角 53°發射一砲彈，恰可越過前方之高山，如右圖所示 (重力加速度 g = 10 m/s^2) ，試求：

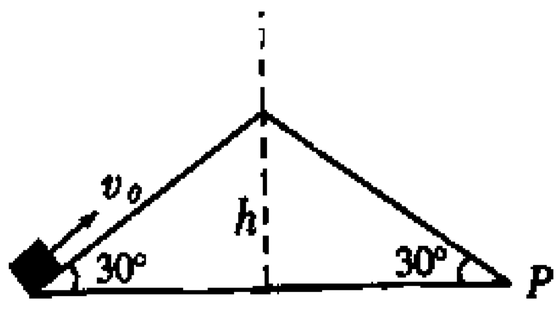
(1)砲彈自發射到落地共經歷若干時間？

(2)砲彈發射的初速度爲何？答：(1)8 秒；(2)25m/s



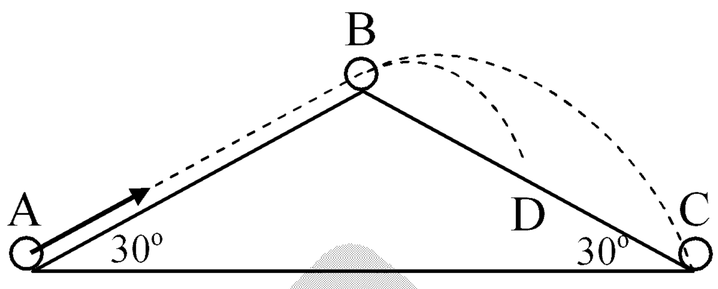
例68. 以仰角θ初速 40 公尺/秒射出一子彈，恰可越過 40 公尺遠，70 公尺高的塔頂，則 tanθ 之值爲何？【g=10 m/s^2】 答：3 或 5

例69. 如圖，爲光滑斜面，今以 v_0 自斜面底拋出，欲著地點在 p，斜面高 h，則 v_0 須爲若干？ 答：$\sqrt{3gh}$【亦可使用 y/x 型】

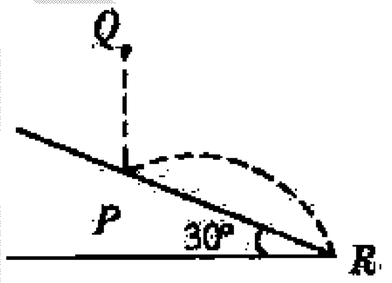


※家庭作業

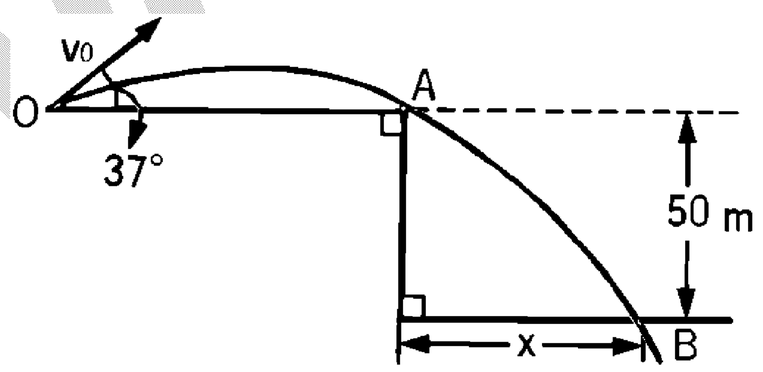
1.當一物體以 v_1 的初速度沿光滑楔形斜面，由 A 點滑至 B 點後，恰落於 C 點，若以 v_2 初速度滑上恰落於 BC 的中點 D 處，求 $v_1{}^2 : v_2{}^2$ ＝？答：6：5



2. P 在斜角30° 的斜面上，於 P 點鉛直上方 Q 處有一質點自由落下，與斜面彈性碰撞後(自由落體的末速等於斜向拋射的初速)，恰落於斜面底 R 處，若 $\overline{PR}=2l$，重力加速度 g，物由 Q 經 P 落於 R 共需時若干？答：$3\sqrt{\frac{l}{g}}$



3.右圖自 O 點以初速 v_0 仰角37°，斜拋掠過崖邊 A 點而著落崖底 B 點，崖高 50 米，且 OA=60m，若 g=10 m/s^2，求：



(1)初速至少需若干才能飛抵崖底？

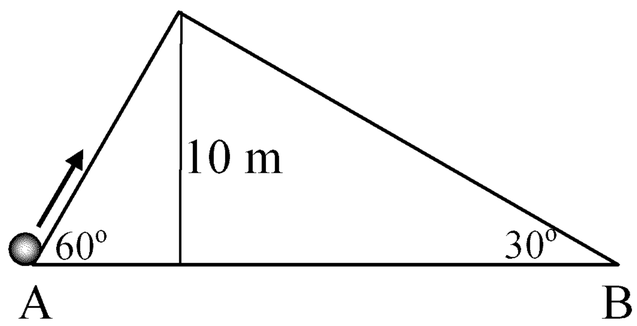
(2)恰掠過 A 後，再經若干秒著地？

(3)x 值爲若干？答：

(4)自 O 拋出後經若干秒著地？答：(1)25m/s；(2)2sec；(3)40m；(4)5sec

4.一學生在水平地面上，以手推出鉛球。若重力加速度爲 g，鉛球的拋射仰角爲 θ，初速爲 $\sqrt{2gh}$，離手時的高度爲 h，落地時的水平射程爲 $2\sqrt{2}$ h，則 $\tan\theta =$ _____。(2002 奧林匹亞初選)答：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.如圖，左右二斜面均爲光滑，高度 h 爲 10 m，一鋼珠以某初速自左側斜面底端 A 點上滑，通過頂點後作斜向拋射，重力加速度 g 爲 10 m/s^2，若鋼珠恰落於右側斜面底端 B 點處，則鋼珠的初速應爲若干 m/s？答：$5\sqrt{14}$



例70. 一無頂貨車在水平軌道上以 4.0 公尺/秒的速度進行，一人在車上以 24 公尺/秒之初速鉛直上拋一球。若以 x 表球之水平位移，y 表球之鉛直位移，拋出點爲原點，則地面上之觀察者所見球之運動路徑的方程爲何？(g = 10 公尺/秒 ^{2}) 答：$y = 6x - \frac{5}{16}x^2$

例71. 由水平地面某點斜拋一石子，不計空氣阻力，距石子拋出點水平距離爲 40 米時，石子高度爲 20 米，當水平距離 60 米時石子擊中地面：

(1)以拋射點爲坐標原點，寫出此石子的軌跡方程式？

(2)若拋射時仰角 θ_0 ，則 $\tan\theta_0$ 之值爲？

(3)拋射時水平初速度？

(4)拋射時鉛直初速度？

(5)軌跡頂點高度？

(6)當石子水平移 10 公尺時，高度？石子速度大小？。

答：(1) $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{40}x^2$ ；(2) $\tan\theta_0 = \frac{3}{2}$ ；(3) 14 m/s；(4) 21 m/s；(5)22.5m；(6)12.5m，19.6m/s

例72. 一物自地面拋出，不計空氣阻力，其軌跡方程式爲 $x^2 - 20x + 20y = 0$ ，(式中 x，y 均以 m 爲單位)，設 g=10m/s ^{2} ，則此物 (A)初速率 (B)拋射時仰角 (C)所達最大高度 (D)水平射程 (E)飛行時間　各若干？

答：(A) $10\sqrt{2}$ m/s；(B) 45° ；(C)5m；(D)20m；(E)2sec

※家庭作業

1.一質點其位置 $\vec{r}$ 與時間 t 的關係爲 $\vec{r}(t)=(10t)\vec{i}+(-5t^2+10t)\vec{j}$ (MKS 制)($\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 爲 x、y 軸上的單位向量)，此質點的最大水平射程爲_____公尺。答：20

2.設一斜向拋射的物體，軌跡方程式爲 $x^2-4x+4y=0$ ，(x、y 單位爲公尺，g=10 m/s^2)，則：(1)初速？(2)拋射角？(3)水平射程？(4)最大高度？

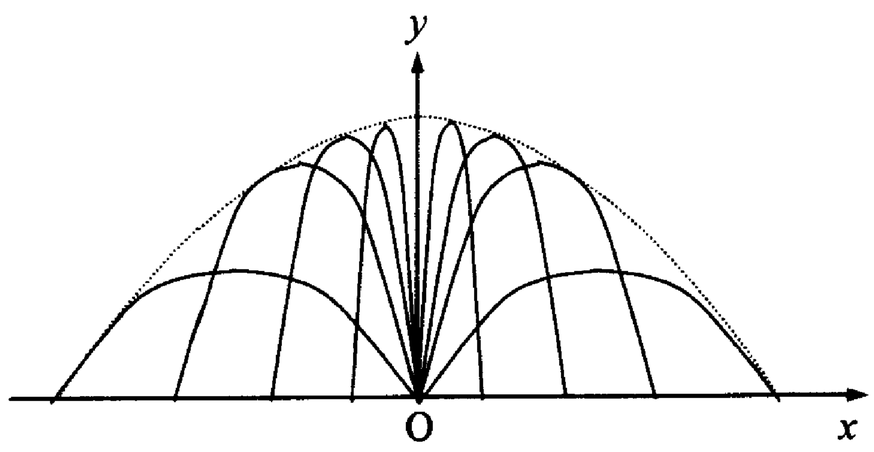
答：(1) $2\sqrt{10}$ ；(2) $45°$ ；(3)4 公尺；(4)1 公尺

3.若一物作斜向上拋運動，其軌跡方程式爲 $y=ax-bx^2$ ，則其運動過程中： (A)初速度大小爲 $\sqrt{\frac{(1+a^2)g}{2b}}$ (B)空中來行時間爲 $\sqrt{\frac{2a^2}{b}}$ (C)最大高度爲 $\frac{a^2}{4b}$ (D)水平射程爲 $\frac{a}{b}$ (E)落地速率爲 $\sqrt{\frac{(1+b^2)g}{2a}}$ 。答：(A)(C)(D)

4.一球由高度 h 的塔頂上，向上斜向拋出時，已知其軌跡方程式爲 $y=ax^2+bx+h$，其中 $a<0$、$b>0$，則該球拋出時仰角的正切值爲？其離地最大高度爲？答：b、$h-\frac{b^2}{4a}$

5.設 X 軸爲水平方向，Y 軸爲垂直方向，今自 X=0，Y=0 處斜拋出一物體，其坐標(X 公尺，Y 公尺)之軌跡方程式爲 $2x^2-3x+4y=0$。該物體初速度之水平分量及垂直分量分別爲多少 m/sec？($\sqrt{9.80}=3.13$) (A)3.13 和 2.71 (B)4.90 和 1.84 (C)3.13 和 2.35 (D)12.5 和 9.39。【74 夜大】答：(C)

＊6.考慮在公園裡的一座噴水池，位於池中央的噴水頭爲半球形，其上佈滿許多噴水孔，可使水以同一速率 v 從各個角度和方向噴出，形成水幕，如下圖所示。試求水幕的最大高度和其圓形底面直徑的比值爲何？_____。若從通過噴水頭的鉛直切面來看，該水幕邊（即包跡）的曲線方程式爲何？_____。(2005 奧林匹亞初選)答： $\frac{1}{4}$ ， $y=\frac{v^2}{2g}-\frac{g}{2v^2}x^2$



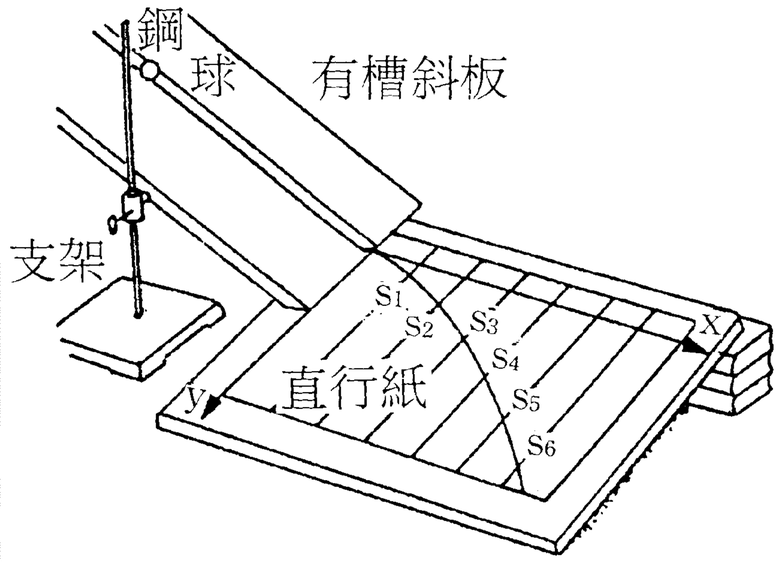
觀念十九　斜面的拋體實驗

一、斜面上的運動

可將些面上的運動分為 $\begin{cases} x\text{軸} \Rightarrow \text{等速} \\ y\text{軸} \Rightarrow \text{等加速，} a = g \cdot \sin\theta \end{cases}$，其中 θ 為斜面的斜角

二、斜面的拋體實驗

1. 因一般空中的斜拋，很難紀錄運動的軌跡，所以利用斜面上的斜拋來觀察運動軌跡
2. 將鋼珠由有槽斜板上滑下，入射平行 x 軸，模擬水平拋體
3. 在直行紙下墊一張複寫紙，小鋼珠滾過後，可在直行紙上印出軌跡
4. 實驗誤差最主要來自於入射方向不水平



三、有一天....小明跟甲,乙,和丙:我問你們一個問題喔...

甲 乙 丙:好阿~~

小明:有三隻毛毛蟲排成一列....第一之毛毛蟲說我後面有一隻毛毛蟲第二隻也說我後面有一隻毛毛蟲第三隻後面已經沒有毛毛蟲了可是他也說我後面有一隻毛毛蟲我問你們這是位什麼呢???

甲:喔!我隻到因為三隻毛毛蟲站在鏡子前面

小明:不對!!!毛毛蟲如果站在鏡子前面就有六隻毛毛蟲了ㄟ....不要亂講

乙:喔~~~我隻到了啦~~因為三隻毛毛蟲走成圓形的~~~

小明:不對!!題目明明說三隻毛毛蟲排成一列...怎麼會走成圓形的呢???

丙:阿!!我知道了....因為第三隻毛毛蟲有近視眼....

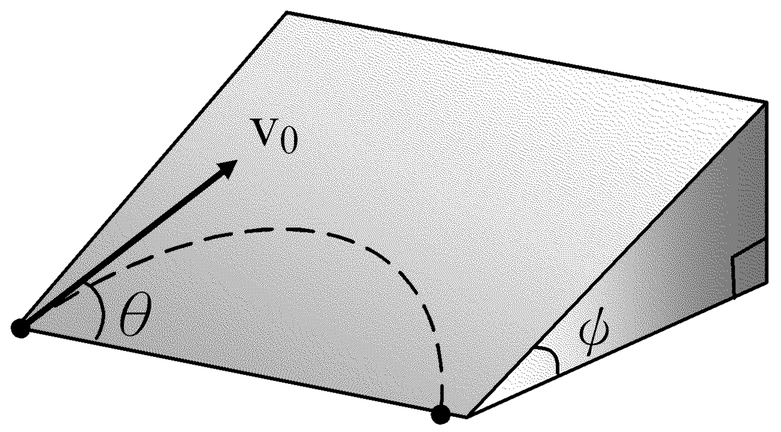
小明:不對!!!!毛毛蟲如果會有近視眼那以後我們到眼科那邊檢查視力就會看到一大堆毛毛蟲在排隊....

甲 乙 丙:那答案到底是什麼ㄋ????

小明:答案是第三隻毛毛蟲

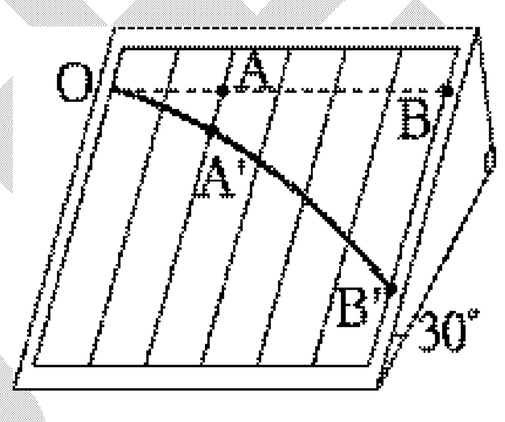
說謊話!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

例73. 如右圖，一質點在傾斜角為ψ之斜面上，以θ角斜向拋出，求此質點：(1) 飛行時間為若干？ (2) 最大高度為若干？ (3) 水平射程為若干？



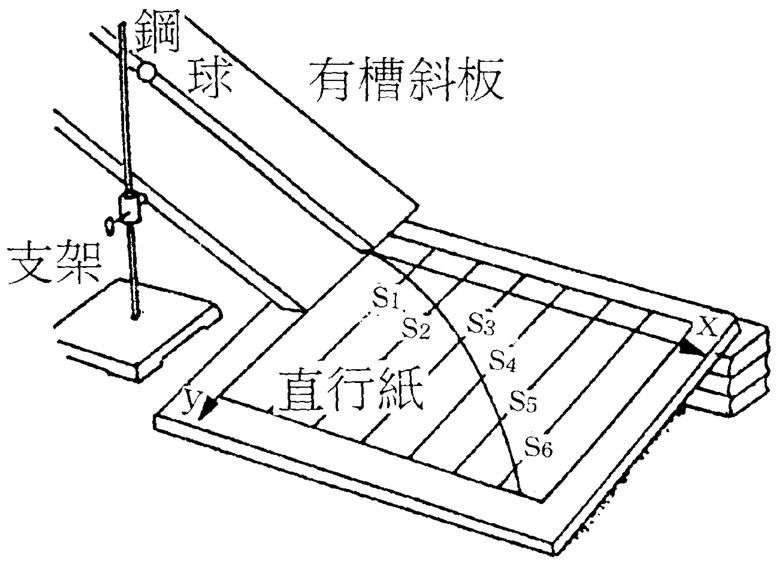
答：(1) $\frac{2v_0 \sin\theta}{g\sin\varphi}$ ；(2) $\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$ ；(3) $\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g\sin\varphi}$

例74.「拋體運動實驗」中，若忽略板面與鋼珠之摩擦力，在等距直行紙上得到附圖之軌跡：(1)若 $\overline{AA'}$ ＝1cm，則 $\overline{BB'}$ 長應為若干公分？(2)又鋼珠自 O 點水平射出之初速度 $\vec{v}_o$ 之量值為多少 cm/s？(格之間距為 0.5cm，又令 g＝10 m/s^2)



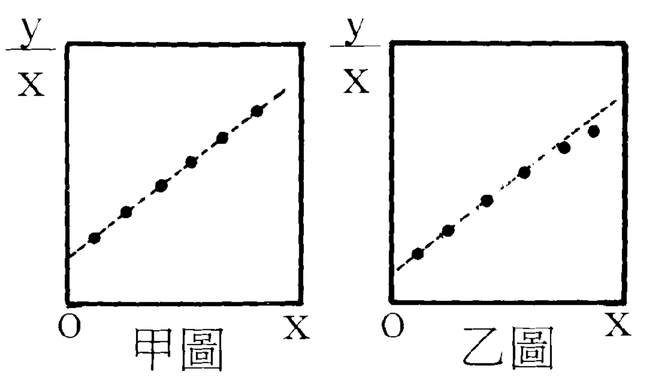
答：(1)9cm；(2)$5\sqrt{10}$ cm/s

例75. 在「拋體運動」實驗中，鋼球自槽溝某一高度滑下，在直行紙得一軌跡，如圖所示。根據拋體運動的理論，若 x 方向沒有加速度，而 y 方向有加速度，則物體從一原點 O 出發，其位移與時間 t 的關係為 x ＝c_0t，y＝$c_1t+c_2t^2$。其中 c_0，c_1，c_2 為常數。



(1)試問如何將鋼球的軌跡直接記錄在直行紙上？

(2)甲、乙兩生各自做此拋體實驗，並測量直行紙上 S_1，S_2 等點的座標值(x，y)，得出 $\frac{y}{x}$ 對 x 的圖形，如甲、乙兩圖所示；圖中虛線為直線。試問：甲圖直線不通過原點，原因何在？



(3)要使直線通過原點，應如何調整甲生的裝置？

(4)乙圖在 x 漸大時，圖形向下偏離直線，原因何在？

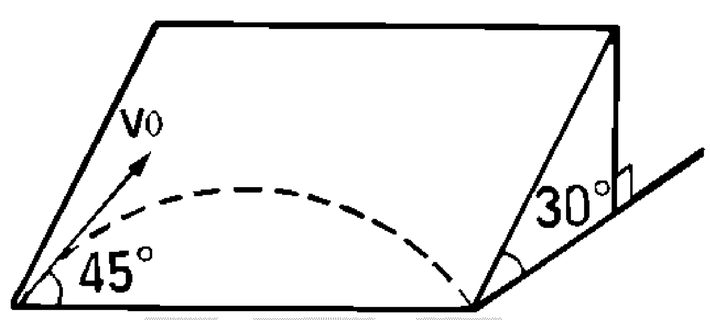
(5)要使實驗結果成一直線，應如何調整乙生的裝置？【87 日大】【答】

※家庭作業

1.一巨大光滑平面與地平面成30°之夾角，某人自斜面之底邊以 19.6m/s 之初速與底邊成45°之夾角，將一小球沿斜面拋出，則其

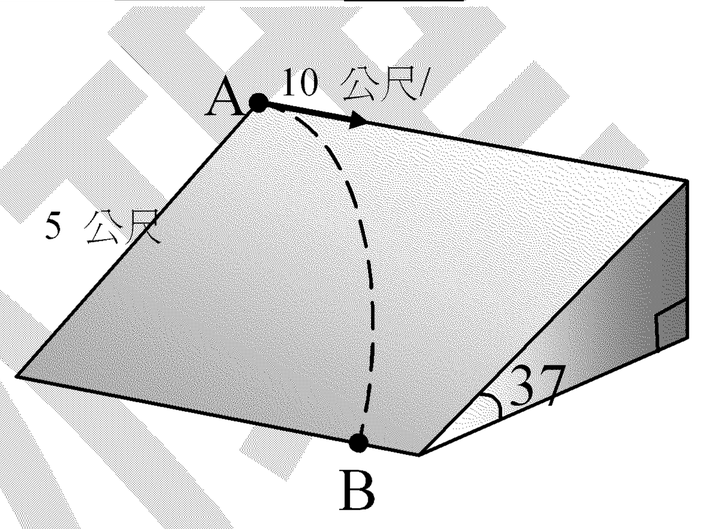
(a)落回底邊與拋出點之距離爲何？

(b)自拋出至落回底邊歷時若干？答:(1)78.4m;(2)5.64sec



2.如右圖，一質點自光滑斜面上 A 點水平射出，初速度爲 10m/s ， ($g \fallingdotseq 10\ m/s^2$) 求：

(1)抵 B 點之時間？(2)速率？答：(1)$\sqrt{\frac{5}{3}}$ 秒；(2) $4\sqrt{10}$ m/s

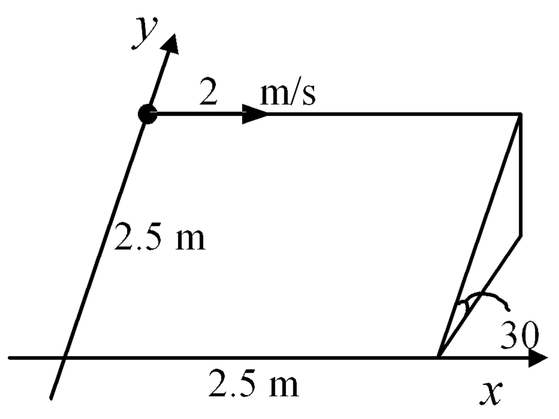


3.一物沿一仰角爲30°之光滑斜面底部，以 10m/s 之初速沿斜面運動。另一物以 10m/s 之初速，仰角30°斜拋而出，則兩者到達最高點之時間比爲何？答 4：1

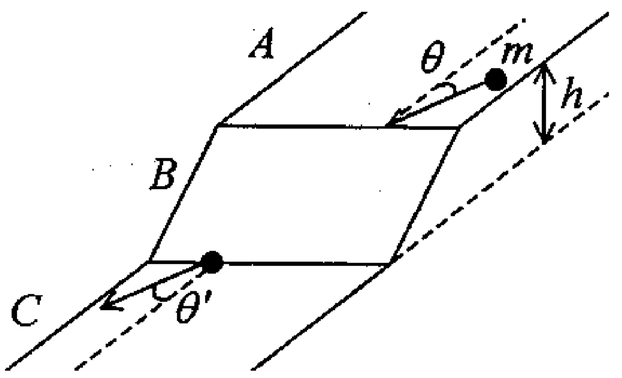
4.如右圖，由斜面頂左端以 2 m/s 的初速水平拋出鋼珠：

(1)抵達底邊時在 x 方向位移？

(2)其軌跡方程式？答：(1)2m；(2)$y = 2.5 - \frac{5}{8}x^2$



5.如圖所示，一質量爲 m 的小物體在水平面 A 上，以速度 v，入射角θ，經斜面 B 滑落至另一水平面 C。A 和 C 兩水平面之間的鉛直落差爲 h。假設此 A、B、C 三個平面皆光滑，則當小物體在 C 面上滑行時，偏離法線的角度θ'=___。



【1995 奧林匹亞初選】答：$\sin^{-1}(\frac{v\sin\theta}{\sqrt{v^2+2gh}})$

6.由傾斜角 30°、高度爲 1.25 公尺的斜面頂，以 2 公尺每秒之初速度沿斜面水平拋出鋼珠，求：(1)抵達底邊時之水平位移爲若干？ (2)軌跡方程式爲何？(設以拋出點之斜面底爲座標原點)答：(1) 2 公尺；(2) $y = 2.5 - \frac{4.9}{8}x^2$

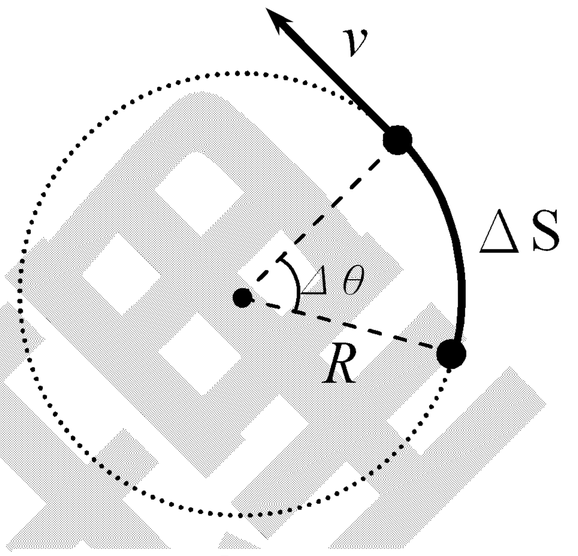
觀念二十　等速圓周運動

質點在光滑平面的圓周上以等速率運動，稱為等速率圓周運動。

1. 週期 T：質點轉動一圈所經歷的時間，單位為秒。

2. 頻率 f：每秒內質點所旋轉的圈數，單位為 Hz＝r. p. s. ＝圈/秒

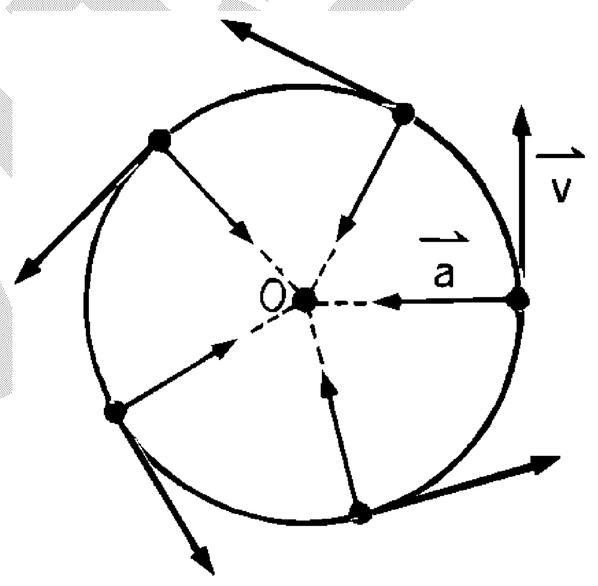
3. 角位移 $\Delta\theta$：由圖中 A 到 B 點所轉的角度，單位為弳或弧度(rad)。



1 圈 $= 2\pi$ rad $= 360°$

4. 角速度 ω（又稱角頻率）：描述轉動的快慢，為單位時間對圓心所轉動的角度，單位為弳/秒(rad/s)。$\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

5. 速率 v：$v = \dfrac{\Delta l}{\Delta t} = \dfrac{2\pi R}{T} = \omega R$



6. 速度：質點作等速率圓周運動時，速度量值保持不變，但速度方向隨時間不斷改變，在圓周運動的過程中，質點的速度方向即為切線方向。

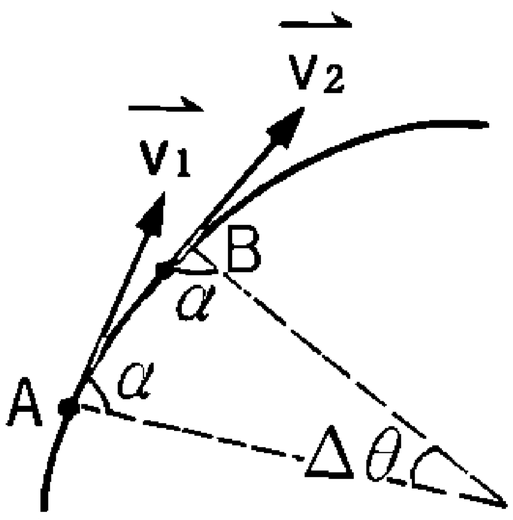
7. 加速度：當質點由 A 移至 B 點時，對圓心所轉過的角度為 $\Delta\theta$，經歷的時間為 Δt，則速度變化量 $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$，其中 $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$，所以 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、$\Delta\vec{v}$ 構成一等腰三角形，且 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 的夾角為 $\Delta\theta$，所以

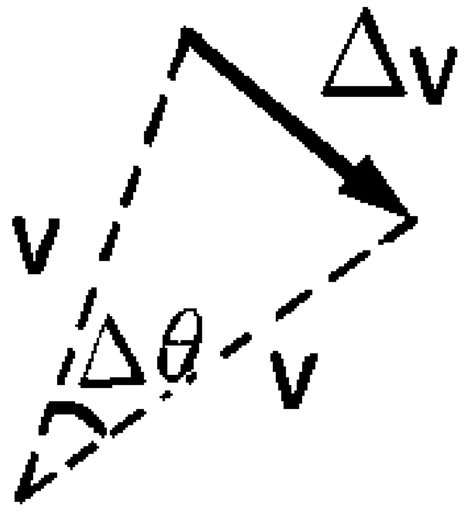
$\Delta v = v \times \Delta\theta$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \times \Delta\theta}{\Delta t} = v\omega$$

$$a = v\omega = \frac{2\pi v}{T} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

加速度恆指向圓心，稱為向心加速度。



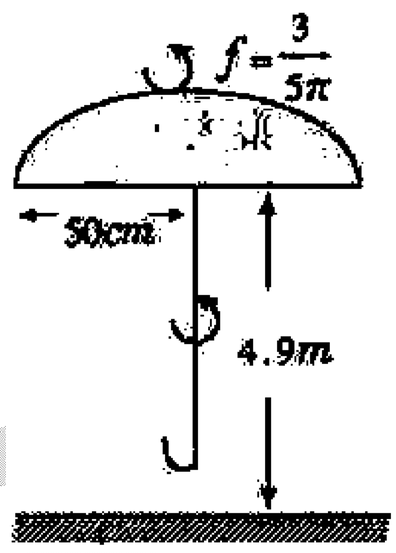


8. 水平面等速率圓周運動亦為等角速率圓周運動，平均速率＝瞬時速率＝速度的大小。

9. 等速率圓周運動屬於變加速度、變速度、受變力作用，加速度、速度、受力的大小均不改變，只有方向改變。

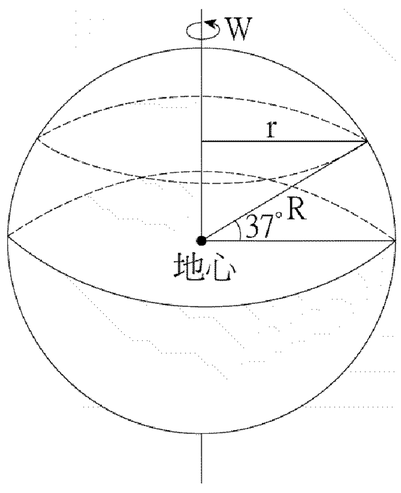
10. 向心力突消失時，物體將沿切線方向飛出。

例76. 如圖所示，50 cm之斜傘在高出地面 4.9m 處，以穩定頻率 f= $\frac{3}{5\pi}$ r.p.s. 繞鉛直軸轉動。設傘緣上有足夠之水滴，而沿切線方向濺出。則 (a) 水滴在地面上所成之軌跡為何？ (b)此軌跡之曲率半徑為何？



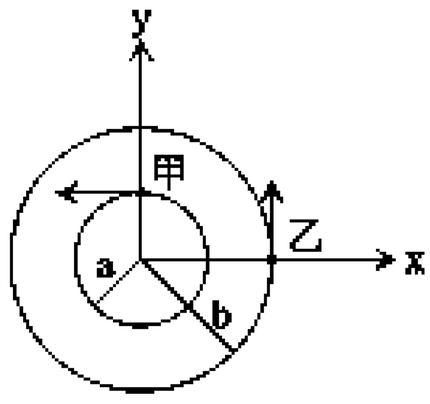
答：(a)圓；(b) $\frac{\sqrt{61}}{10}$ 公尺

例77. 在北緯 37° 的物體，其隨地球自轉的切線速度是赤道處的_____倍。答：$\frac{4}{5}$



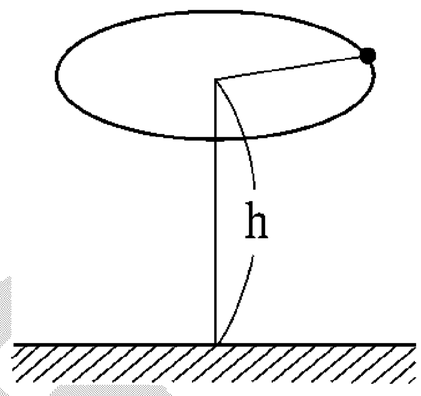
例78. 有甲、乙兩質點分別在半徑為 a 及 b 的同心圓上做等速率圓周運動，其向心加速度均為 a_c。若在某一瞬間質點甲的速度方向為朝 −x 方向，質點乙的速度方向為朝 +y 方向(如圖所示)，則在此瞬兩質點的相對速度之量值為_____。【89 日大改】

答：$\sqrt{a_c(a+b)}$



※家庭作業

1.某人以細繩綁住石頭，使石頭在 h 高度的水平面作週期$\frac{5}{6}\pi$秒的等速率圓周運動，如附圖，若細繩突然斷裂，石頭經 1 秒落地，且落地點距離某人的水平距離爲 6.5 公尺，則石頭作等速率圓周運動的半徑爲多少公尺？ (A)2.5 (B)3.2 (C)4 (D)4.6。答：(A)



2.一物作等速圓周運動，繞一半徑爲 6 公尺的水池一周，需時 3 秒，求：
(1)週期 T？(2)頻率 f？(3)角速度ω？(4)線速度 v？(5)加速度 a？
答：(1)3sec；(2)$\frac{1}{3}$Hz；(3)$\frac{2\pi}{3}$rad/s；(4)4πm/s；(5)$\frac{8\pi^2}{3}$m/s^2

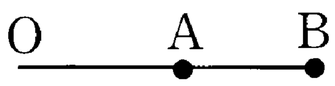
3.某雨傘傘面高度爲 4.9 米，半徑爲 1.5 米，旋轉之角速度爲 4/3 弧度/秒，試求邊緣飛出的雨滴在地面上所圍成的面積。答：6.25π

4.假定雨傘之傘面完全水平，旋轉時其上水滴會產生運動，選出下列正確的敘述。 (A)留在傘面上之水滴受一向心力 (B)邊緣水滴較中央水滴所受之向心力爲大 (C)水滴離開傘緣之一剎那方向沿傘緣切線方向 (D)水滴離開後軌跡爲一拋線 (E)雨傘轉得越快，水滴落地所需時間越長【68 日大】答：(A)(B)(C)(D)

5.一掛鐘秒針長 5cm，其針尖作等速圓周運動，則：
(1)由 12 點走到 12 點 45 秒的平均速度量值爲_____cm/s。
(2)12 點 45 秒時之加速度量值爲_____cm/s^2。答：(1)$\frac{\sqrt{2}}{9}$；(2)$\frac{\pi^2}{180}$

6.下列有關等速率圓周運動的敘述，何者正確？ (A)因爲等速率，所以加速度爲零 (B)屬於變速度運動 (C)屬於變加速度運動 (D)週期不變，半徑增倍則速率減半 (E)$\frac{1}{4}$週期內的速度變化量值是瞬時速率的 2 倍。答：(B)(C)

7.如附圖，一輕棒繫質量爲 4：5 之 A、B 二球，以另一端點爲圓心作等速圓周運動，其半徑爲比 1：2，則二球角速率比爲_____；向心加速度比爲_____。答：(1)1：1；(2)1：2



例79. 某鐘秒針長 5cm，求 (1)0 秒到 20 秒針尖的位移？ (2)0 秒到 20 秒針尖的平均速度？ (3)0 秒到 20 秒針尖的平均速率？ (4)20 秒末的瞬時速度？ (5)0 秒到 20 秒的速度變化？ (6)0 秒到 20 秒針尖的平均加速度？答：(1) $5\sqrt{3}$ cm；(2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm/s；(3) $\frac{\pi}{6}$ cm/s；(4) $\frac{\pi}{6}$ cm/s；(5) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ cm/s；(6) $\frac{\sqrt{3}\pi}{120}$ cm/s^2

例80. 質點以等速率 v 在半徑爲 r 的圓周上運動，下列敘述何者正確？ (A)切線加速度爲零 (B)法線加速度量值爲 $\frac{v}{r^2}$ (C)經 $\frac{1}{4}$ 圓周的平均速率爲 v (D)經 $\frac{1}{4}$ 周的平均速度量值爲 $\frac{v}{4}$ (E)經 $\frac{1}{4}$ 周的平均加速度量值爲 $\frac{2v^2}{\pi r}$。答：(A)(C)

例81. 一質點作等速率圓周運動，向心加速度爲 a，試求 $\frac{1}{3}$ 週期之平均加速度。答：$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}a$

※家庭作業

1.一質點作等速率圓周運動，向心加速度量值為 a，則其$\frac{1}{4}$週期內的平均加速度量值為_____。答：$\frac{2\sqrt{2}a}{\pi}$

2.一質點作半徑 R 之等速率圓周運動，在$\Delta t=\pi$ 的時距內其運動方向改變60^{o}，其：

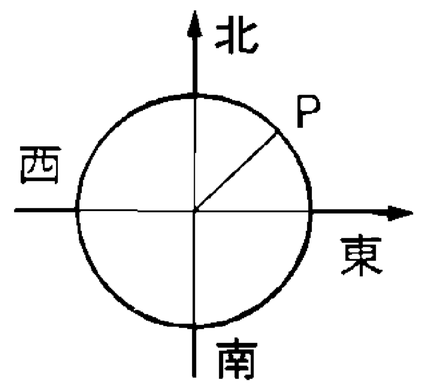
(1)週期為？

(2)平均速度為？

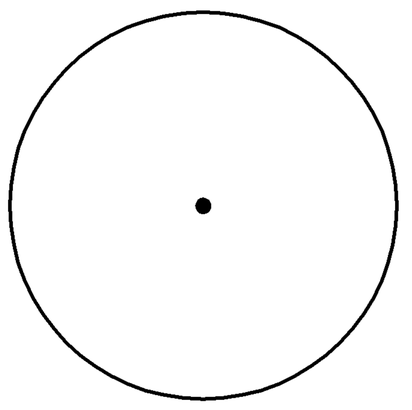
(3)平均加速度為？

(4)向心加速度為？答：(1) 6π ；(2)$\frac{R}{\pi}$ ；(3)$\frac{R}{T}$ ；(4)$\frac{R}{9}$

3.一物體在水平面上作等速率圓周運動，其軌道半徑為$\frac{5}{\pi}$米，週期為 20 秒，設此物體自圖中 P 點沿順時針方向開始運動，則此物體在 (1)第 5 秒至第 10 秒的平均加速度大小？ (2)第 5 秒至第 10 秒間的位移大小？答：(1)$\frac{\sqrt{2}}{10}$；(2)$\frac{5\sqrt{2}}{\pi}$



4.一時鐘的秒針長 10cm，當其從 0 秒位置移動至 20 秒位置的時間間隔內，秒針尖端平均加速度的量值為何？其瞬時加速度的量值為何？答：$\frac{\sqrt{3}\pi}{60}$；$\frac{\pi^{2}}{90}$



5.質量 m 之物體作半徑 R，週期 T 之等速率圓周運動，當其旋轉 1/4 周時 (A)速度變化量之大小為$\frac{2\pi R}{T}$ (B)平均加速度大小為$\frac{2\pi^{2}R}{T^{2}}$ (C)任一瞬間之速率為$\frac{2\pi R}{T}$ (D)任一瞬間之向心加速度量值為$\frac{4\pi^{2}R}{T^{2}}$ (E)任一瞬間之切線加速度量值為$\frac{4\pi^{2}R}{T^{2}}$。答：(C)(D)

例82. 一物體在光滑的水平面上繞定點作半徑 1.2 公尺之等速圓周運動，在 $\frac{\pi}{12}$ 秒內物體的運動方向改變 $60°$，則此運動的週期爲_____秒，瞬間加速度大小爲_____ m/s^2。答：$\frac{\pi}{2}$，19.2

例83. 已知地球地球半徑約 6400 公里，則

(1)赤道上，地球自轉的角速度約爲多少弧度/秒？自轉切線速率爲多少公尺/秒？向心加速度的大小？

(2)北緯 60^o 處，地球自轉的角速度約爲多少弧度/秒？自轉切線速率爲多少公尺/秒？向心加速度的大小？答：(1) 7.3×10^{-5}；467；0.0341 m/s^2；(2) 7.3×10^{-5}；233；0.0171 m/s^2

例84. 一質點沿 x–y 平面作等速率圓周運動，其質點位置向量爲 $\vec{r}(t)=8\cos(5\pi t)\vec{i}+8\sin(5\pi t)\vec{j}$（M. K. S.制），試問：

(1)軌跡方程式爲_____。

(2)週期爲_____秒。

(3)軌道切線速率爲_____ $m/\sec$。

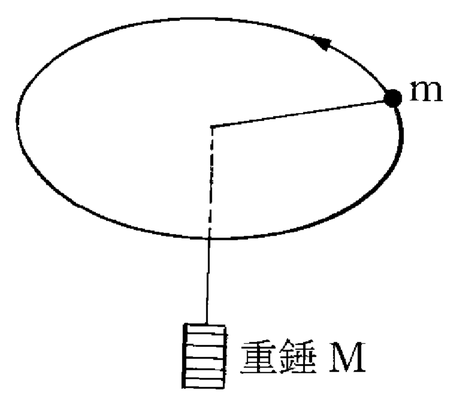
(4)加速度量值爲_____ $m/\sec^2$（以π表示之）。

答：(1) $x^2+y^2=64$；(2) $\frac{2}{5}$；(3) 40π；(4) $200\pi^2$

※家庭作業

1.兩車分別在半徑 R_1 與 R_2 的兩圓形軌道上繞同一中心作圓周運動： (A)若週期相同，則速率比爲 R_1/R_2 (B)若週期相同，則向心加速度比爲 R_1/R_2 (C)若速率相同，則向心加速度比爲 R_2/R_1 (D)若速率相同，則角速度比爲 R_2/R_1 (E)若角速率相同，則向心加速度比爲 R_1/R_2。答：(A)(B)(C)(D)(E)

2.小石子以輕繩繫住作水平面等速率圓周運動，如圖，重錘的質量M，若欲維持原半徑而速率減半，則重錘質量應減少____。答：$\frac{3}{4}$M



3.某物在水平面上作週期 T，向心加速度爲 a 的等速率圓周運動，則其切線速率爲_____。答：$\frac{aT}{2\pi}$

4.設地球爲正球體且半徑爲 R，自轉週期爲 T，下列敘述何者爲正確？ (A)地球上任意一點對地軸的角速度都相同 (B)赤道處的自轉切線速度爲 $\frac{2\pi R}{T}$ (C)赤道處的向心加速度爲 g (D)緯度 60° 處自轉的切線速度爲 $\frac{\pi R}{T}$ (E)緯度 60° 處的向心加速度爲 $\frac{g}{2}$ 。答：(A)(B)(D)

5.假設地球自轉變快，使得赤道處的向心加速度等於重力加速度，則地球上的「一天」，將變爲多少？ (A)84.5 分鐘 (B)16.9 小時 (C)169 分鐘 (D)13.4 小時 (E)22.6 小時。答：(A)

6.一物作等速圓周運動，半徑爲 2 公尺，5 秒內轉 20 圈，則下列何者正確？ (A)$\omega=8\pi$ rad/sec (B)T=4sec (C)速率 $v=16\pi$ m/s (D)向心加速度=$128\pi^2 m/s^2$ (E)其位置方程式爲 $\vec{r}=2\cos(8\pi t)\vec{i}+2\sin(8\pi t)\vec{j}$ 。答：(A)(C)(D)(E)

7.有一質點在 xy 平面上運動，物體上的座標爲 $X=R\cos(\omega t)$，$Y=R\sin(\omega t)$，t 爲時間，R 爲半徑、ω爲角速度。求：(1)物體的運動軌跡；(2)其速度；(3)其加速度大小。
答：(1)圓(2)$R\omega$(3)$R\omega^2$

吳錫玠老師 編授

觀念二十　曲率半徑

一、曲線運動與曲率圓

任何曲線皆可切割為許多小段，每一小段都有一個對應的曲率圓，物體在該小段的運動可視為曲率圓上圓周運動的一部份

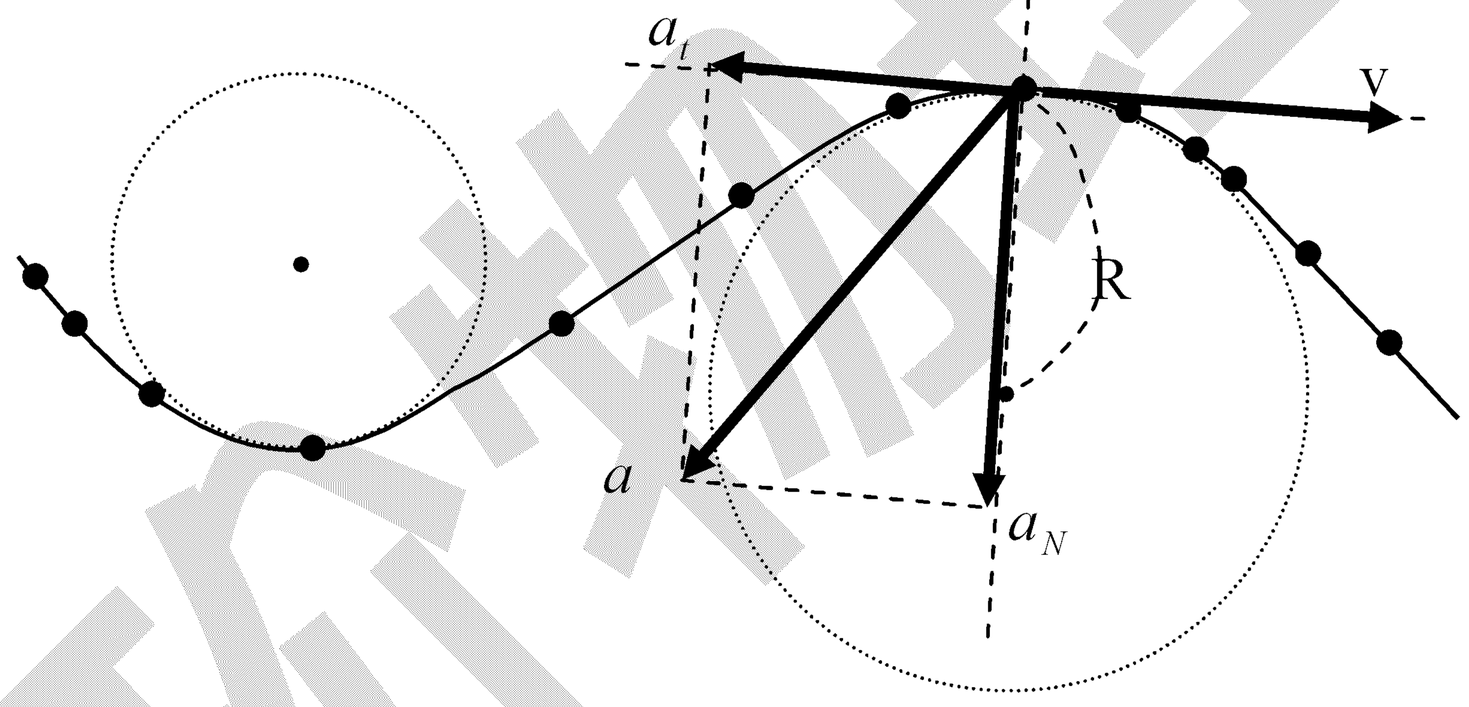
二、曲率半徑

1. 如前面所提的，切線管快慢、法線管方向，

能夠讓物體作圓周運動的，必是法線加速度。

2. 如右圖，向心加速度

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N}$$



三、「大陸科技部下令所有學術網絡不准再傳北極熊拔毛的冷笑話，所有公私立網絡 BBS 站長見到此反動笑話應立刻刪砍。原因如下：

1.『拔毛』字眼充斥反動思想。　污辱了我們過去的偉大導師領袖與英明舵手毛主席；

2.『北極熊』常暗指俄羅斯。　此笑話有意挑起中俄間的矛盾和鬥爭，為已修好的中俄關係投下負面變數；

3. 此笑話來自台灣。　是台灣反動特工人員為激化上述矛盾，欲陷祖國於動蕩的子須烏有之反動輿論！國家科技部誠摯地向使用電腦網絡的廣大人民群眾警告與呼籲：此後再傳此笑話者將依『反革命罪』與『散播謠言罪』論處。國家科技部也將持續監視各網絡，防止這些牛鬼蛇神的反動毒草言論自由氾濫，也請各位人民群眾潔身自愛持續抓好自己的政治覺悟與警覺，並對反革命份子給予毫不留情的全面打擊與鬥爭，為祖國的團結與統一做出貢獻！」

例85.以v_o之初速，沿仰角θ之方向，拋出一球。設球飛行時之重力場強度g為定值，則(1)球在路徑最高點處之運動情況相當於一圓周運動，而該圓之半徑為：＿＿＿＿，(2)拋出瞬間之法線加速度量值為＿＿＿＿。【79夜大】答：(1)$\frac{(v_0\cos\theta)^2}{g}$；(2)gcosθ

例86.取水平向右為+x向方，鉛直向上為+y方向，今將一小球以$25\,m/s$的初速，53°的仰角斜向拋出，試求：(g=$10\,m/s^2$)

(1)軌跡方程式？(2)最高點處運動軌跡的曲率半徑。

答：(1)$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{45}x^2$；(2)R=22.5m

例87.自地面分別以相同初速度斜拋兩石子，不計空氣阻力，若第一石子拋射角θ，第二石子拋射角與θ互為餘角。水平射程分別R_1，R_2，最大高度分別H_1，H_2，飛行時間分別t_1、t_2、頂點處曲率半徑分別r_1、r_2，則下列各關係中何者正確？(A) $R_1=R_2$　(B) $H_1/H_2=\tan^2\theta$ (C) $t_1/t_2=\tan\theta$　(D) $r_1/r_2=\cos^3\theta$　(E) 若$\theta>45°$，則$R_1=R_2$但$t_1>t_2$，$H_1>H_2$。答：(A)(B)(C)(E)

※家庭作業

1.斜向拋出一球，當其速率爲 v、仰角爲 θ 時，求：

(1)切線加速度爲何？

(2)法線加速度爲何？

(3)曲率半徑爲何？答：(1)$g\sin\theta$ ；(2)$g\cos\theta$ ；(3)$\frac{v^2}{g\cos\theta}$ 。

2.不計空氣阻力，質點由地面與水平成 θ 角拋出，當質點運動軌跡達最高點時的曲率半徑與拋出位置的曲率半徑比爲 (A)$\sin\theta$ (B)$\cos\theta$ (C)$\sin^3\theta$ (D)$\cos^3\theta$ 。答：(D)

3.下列敘述何者正確？(A) 等速率曲線運動質點切線加速度必爲零，而法線加速度必不爲零。 (B) 變速度直線運動質點切線加速度必不爲零而法線加速度必爲零。 (C) 作等速率曲線運動的質點，曲率愈大處，質點的加速度值愈大。 (D) 作等加速度曲線運動質點，其切線與法線加速度值保持一定。 (E) 作圓周運動質點，加速度方向恆指向圓心。答：(A)(B)(C)

4.質點沿一螺旋線由內而外作等速率運動，求：

(1) 切線加速度爲何？

(3) 法線加速度漸？

(4) 加速度漸？答：(1)0；(2)小；(3)小。

5.有一母女坐著計程車回家。

當她們經過某某路段，正是有名ㄉ紅燈區，一個個打扮妖豔的「阻街女郎」開始站在路邊做生意。

正值青春期的女兒看了就好奇的問：「那些女人站在路旁幹什麼?」

媽媽爲了不影響女兒幼小純真的心靈，

便回答說：「那些女人在等老公。」

這時多嘴的計程車司機在一旁搭腔：「笑死人了，誰都嘛知道那些女人是妓女。」

媽媽很生氣的瞪了司機一眼。

女兒接著問：「媽媽，那!妓女會不會生小孩?」

媽媽冷冷的道：「當然會阿! 要不然誰來開計程車。」...

觀念二十一　相對運動

一、參考坐標

以觀察者為參考點之座標。不同的參考座標對同一運動質點有不同的描述。

二、相對運動

1. A 對 B 的位移(即 B 見 A 的位移)：$\vec{d}_{AB}=\vec{d}_{AO}-\vec{d}_{BO}=\vec{d}_{AO}+\vec{d}_{OB}$

B 對 A 的位移(即 A 見 B 的位移)：$\vec{d}_{BA}=\vec{d}_{BO}-\vec{d}_{AO}=\vec{d}_{BO}+\vec{d}_{OA}$

$\vec{d}_{AB}=-\vec{d}_{BA}$(量值相等，方向相反)

2. A 對 B 的速度(即 B 見 A 的速度)：$\vec{V}_{AB}=\vec{V}_{AO}-\vec{V}_{BO}=\vec{V}_{AO}+\vec{V}_{OB}$

B 對 A 的速度(即 A 見 B 的速度)：$\vec{V}_{BA}=\vec{V}_{BO}-\vec{V}_{AO}=\vec{V}_{BO}+\vec{V}_{OA}$

$\vec{V}_{AB}=-\vec{V}_{BA}$($\vec{V}_{AB}$ 與 $\vec{V}_{BA}$ 量值相等，方向相反)

3. $\vec{a}_{AB}=\vec{a}_{AO}-\vec{a}_{BO}=\vec{a}_{AO}+\vec{a}_{OB}$

三、若遇到有關船行走的問題：

〝船速度〞＝〝航速〞$\equiv \vec{v}_{船，水} \neq \vec{v}_{船，地}$

(註：$\vec{v}_{船，地}$ 會以"船對地的速度"詳述之)

同理…

〝飛機航速〞$\equiv \vec{v}_{飛機，空氣} \neq \vec{v}_{飛機，地}$

四、有一天

在某法律大學

老師正在考學生刑法

老師問：「什麼叫做詐騙罪」？

學生：「你考試不讓我及格就叫詐騙罪」

老師嚇了一跳，覺得莫名奇妙，為什麼不讓學生及格就犯了詐騙罪？豈有此理！

老師生氣的問：「為什麼？」

學生說：「因為刑法中明定『利用他人的無知使其蒙受損失的』就犯了詐騙罪，我們的考試就是利用他人的無知啊」

老師：「@!#$~#!@$#^((_&%|_+){:?>}

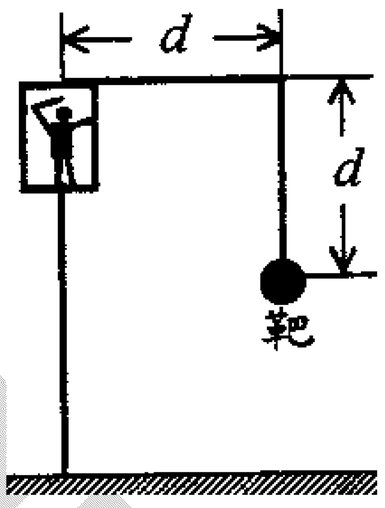
例88.甲、乙兩人同時分別自 A、B 二點出發，作等速運動。A 點在 B 點西方 100m，
(1)甲向東以 4m/s 前進，乙向北以 3m/s 前進，求甲看乙的運動為何？
(2)甲向東以 6m/s 前進，乙以 5m/s 向東偏北 53° 前進，求二人何時最接近？其最近距離為若干？答：(1)5m/s，西偏南 37°；(2)12sec，80m

例89.甲球在距地面高 50 公尺處自由落下，同時在甲球正下方的平地上之乙球以 25 公尺/秒的初速，53 度仰角斜向拋出。不計空氣阻力，而重力加速度為 10 m/s^2。
(a)於運動過程中，甲球看乙球的運動軌跡為何？
(b)甲、乙兩球相距最近的距離為多少公尺？
(c)經幾秒兩球相距最近？答：(a)直線；(b)30 m；(c)1.6 s

例90.一架飛機在高空以 180km/h 的等速度，沿一直線水平飛行。機上搭載有兩名跳傘員 A 和 B，準備在空中表演特技。A 先從飛機上自靜止跳落，兩秒後 B 接著跳落，但兩者的傘具暫時皆不張開，而在空中自由下降，回答下列問題(不考慮空氣阻力的影響，重力加速度 g=10m/s^2)：
(1)在 A 跳落 6 秒後，A 和 B 之間相距為多少公尺？
(2)當 B 剛跳落時，A 利用一彈射裝置將一球體以 25m/s 的初速(相對於 A)對準 B 射出，則經幾秒後，B 可以接到球？這時 A 和 B 之間相距多遠？
(3)承上題，若 A 將此球體以同速改向水平方向射出，則 A 所見該球體的運動軌跡為何？又 B 所見者為何？【1998 奧林匹亞初選】
答：(1)100m (2)4 秒，100m (3)水平直線，斜向下之直線

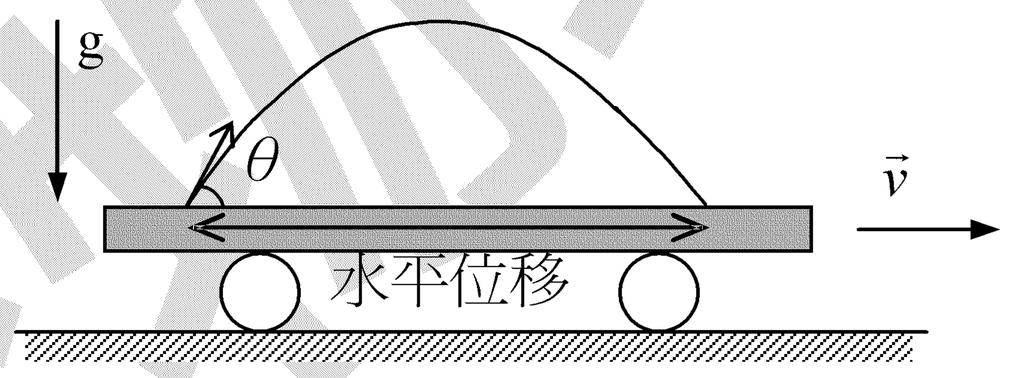
※家庭作業

1.在一遊樂活動中，有人搭乘自由落下的滑車，如右圖所示。若搭車的人手持一球，在滑車自由落下的過程中，投中距起始位置的水平與垂直距離均為 d 的靶，就可獲獎。若球以初速 v(相對於人)水平拋出，則投球者應在滑車開始下落多久時，拋出手中的球，才可擊中靶？(以 v.d.和重力加速度 g 表示之)。又球速 v 的最小值為何？【1999 奧林匹亞初選】答：



$\sqrt{\frac{2d}{g}}-\frac{d}{v}$，$\sqrt{\frac{gd}{2}}$

2.平板車在水平面上以速度 $\vec{v}$ 向右做等速運動，車上有一小球由板車地板上向右上方被拋出，如圖所示。小球相對於板車之初速大小等於車速，方向與車速方向夾 θ 角，且 tanθ= 4/3。小球初速、重力加速度及車速三者位在同一平面上。小球被拋出後，因受重力影響，又落回車上。若不計空氣阻力，則下列敘述中，哪些正確？



(A)車內觀察者所觀測到小球的運動軌跡為一段拋物線

(B)車外觀察者所觀測到小球的運動軌跡為一段拋物線

(C)車外觀察者所觀測到小球停留在空中的時間較車內觀察者為短

(D)車內觀察者所觀測到小球運動的最大高度(從地板算起)，是車外觀察者的 8/3 倍

(E)車內觀察者所觀測到小球的水平位移是車外觀察者的 3/8 倍【94 指考】

3.設有二質點分別以 $1m/sec^2$ 之等加速度自原點向正北及正東開始運動，2 秒後二質點之距離為 (A)$\sqrt{2}$ m (B)2m (C)$2\sqrt{2}$ m (D)3m (E)4m。【66 日大】【答】(C)

4.將兩質點 A 與 B 同時從塔頂以相同的初速 v_0 拋出。A 以仰角 30°斜向拋出，B 作鉛直下拋，則 t 時間後(t 小於 B 著地所須時間)，A、B 兩質點間的距離為？答：$\sqrt{3}v_0t$

5.在某高度處同時拋射兩物，一物自由落下，另一物以初速 v，仰角 θ 拋出，忽略空氣阻力，重力加速度為 g，則在拋射後第 t 秒末，兩物(均未著地)相距

(A)vt (B)$vt\sin\theta$ (C)$vt\cos\theta$ (D)$vt-(gt^2/2)$ (E)$vt\sin\theta-(gt^2/2)$。答：(A)

例91.某人以 u 之速率向東走，覺得雨滴垂直落下，當速率增爲 2u，則見雨滴與鉛直線成 45°迎面落下，則雨滴之速度爲何？答：$\sqrt{2}u$，向東45°俯角

例92.設風自西南吹向東北，某人乘車以$\sqrt{2}$倍風速之速率前進，感覺風係自正北方吹來，則車前進之方向爲 (A)正西偏南30° (B)正南偏西30° (C)正南偏東30° (D)正東偏北30° (E)正北偏東30°。【日大】答：(E)

例93.一油輪以 16km/hr 向南偏西 43°航行，此時風吹向北偏西 40°，若船上人見冒出之煙飄向北偏東13°，求風速爲何？答：10km/hr

※家庭作業

1.若人騎車以 10m/sec 向東覺得雨鉛直落下，若人速改為 20m/sec 向東覺得雨與鉛直成 30° 射來，則雨的速度之大小為？

(A)$10\sqrt{2}$ (B)$10\sqrt{3}$ (C)$5\sqrt{2}$ (D)$\frac{10}{\sqrt{3}}$ (E)20 m/sec。答：(E)

2.小明靜止時，發現雨垂直落下，接著小明以 3m/s 的速度向前衝，發現雨以 30°的仰角迎面而下，求雨落下來的速度(A)3 (B)$3\sqrt{3}$ (C)$\sqrt{3}$ (D)$\frac{3}{2}$ (E)$3\frac{\sqrt{3}}{2}$ 米/秒。答：(C)

3.某人向北方以速度 v 前進，覺得風自東方以速度 v 吹來，則對靜止的人而言，風的方向是 (A)向東 (B)向東北 (C)向東南 (D)向西南 (E)向西北。【日大】答：(E)

4.一車以 20km/hr 等速度向東行駛，見車前國旗飄向正南方；若車速改為 30km/hr，則見旗飄向南偏西 45°，求風速？答：$10\sqrt{5}$ km/hr，東偏南 $\tan^{-1}\frac{1}{2}$

5.話說數千年以前，無論是公狗或者是母狗小便時，都是用蹲著的。
直到唐朝，事情才有了轉變.....
唐太宗大家聽過吧！他老人家養了一對北京狗，
有一次唐太宗上華山祭天，帶了這一對去.....
祭到一半時，母狗突然內急，於是便跑到一棵樹後解決，
在祭天時這是非常不敬的行為，因此惹惱了玉帝，玉帝命令雷公打了一個雷，
正好打在樹上，樹倒了，壓死了母狗，公狗看了以後非常害怕.....
從此以後，公狗每次在樹下小便時，
都會伸出一隻腳，用力頂著樹，以免樹倒下來壓到自己.....

例94.(1)一船橫越一東西向之河流，若航速 5m/sec，水速 10m/sec 向東，欲達北岸時被偏離的距離最少，則：(a)航向？(b)對地之速度？

(2)若航速 10 m/s ，水速 5 m/s 向東，欲達北岸且偏離最少，則：

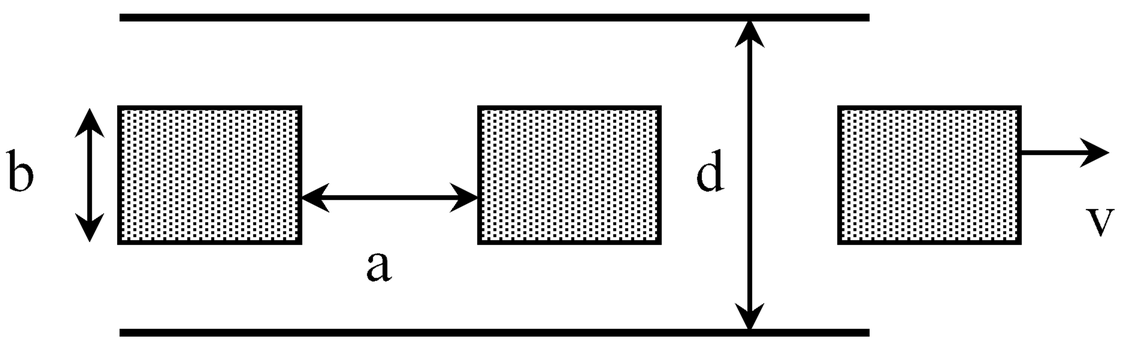
(c)航向？(d)對地之速度？答：(1)(a)西偏北 60° m/s；(b) $5\sqrt{3}$ m/s 東偏北 30°；(2) (c)

正北偏西 30°；(d) $5\sqrt{3}$ m/s，正北方

例95.寬 100m 之河中央有一船，船夫發現下游 150m 處爲瀑布，則船夫擬渡河之最小速度爲何方不致滑落瀑布下，已知流速 5m/sec？

(A)0.5 (B)1.6 (C)1 (D)1.5 (E)1.2m/sec。答：(B)

例96.在寬度爲 d 的街上有一連串汽車以速度 v 魚貫通過，已知汽車的寬度爲 b，兩車間的距離爲 a，如圖所示。一行人沿某一直線穿過此街而不被車撞到，試求此人所需的最小速度大小及通過的時間。【92 校內複賽】

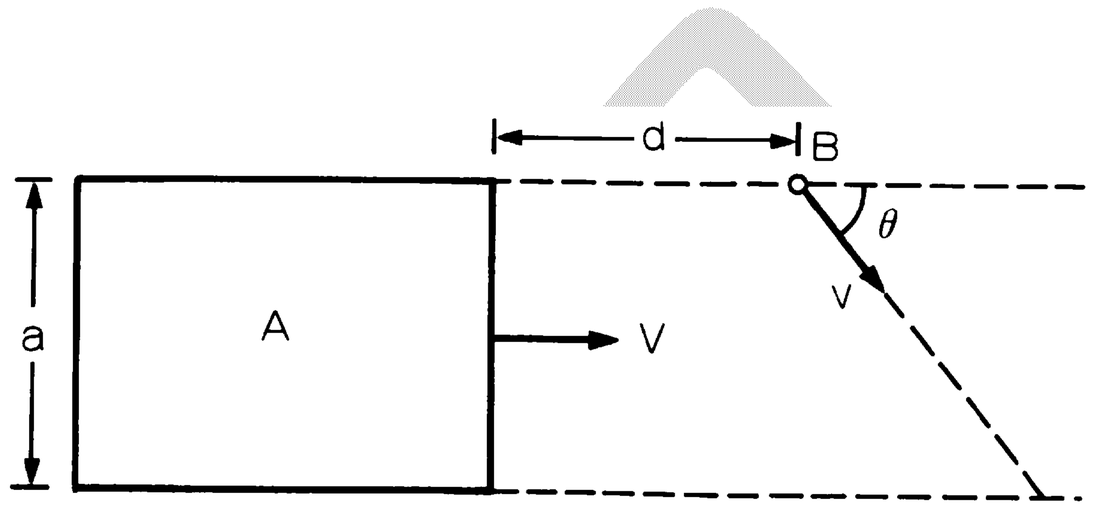


答：$v\times\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$；$\frac{d}{v}\times\frac{a^2+b^2}{ab}$

※家庭作業

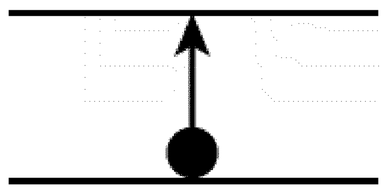
1.河寬 1km，河水流速 3 km/hr，某人在靜水中划船速率爲 4km/hr，此人將船身保持與河岸垂直划往對岸，所須時間爲多少小時？ (A)$\frac{1}{4}$ (B)$\frac{1}{5}$ (C)$\frac{1}{6}$ (D)$\frac{1}{7}$。答：(A)

2.如圖，A 車以等速度 V 行駛，車身寬度 a，距離車前 d 處有一行人 B，以 v 定速度沿車行方向夾θ角斜行穿過馬路，倘若θ爲任意銳角，則欲使行人無害通過馬路時，v 之最小值爲



(A)$\frac{V\cdot d^2}{a^2+d^2}$ (B)$\frac{V\cdot a^2}{a^2+d^2}$ (C)$\frac{V\cdot d}{\sqrt{a^2+d^2}}$ (D)$\frac{V\cdot a}{\sqrt{a^2+d^2}}$ (E)$\frac{V\cdot ad}{a^2+d^2}$。答：(D)

3.一球以速度 v 橫越靜止的輸送帶時，所需時間爲 t；今啓動輸送帶，使其以速度 v 向右方移動，而小球相對於輸送帶仍以 v 垂直輸送帶運動時，則小球通過輸送帶的時間爲



(A)t (B)$\sqrt{2}t$ (C)$\frac{t}{\sqrt{2}}$ (D)$2t$ (E)$\frac{t}{4}$。答：(A)

4.有二隻海龜.一公一母.在海灘上做愛.

做完後公龜跟母龜說：明年的今天我們一樣約在這裡好嗎?

母龜說：好...

後來公龜就走了.....

時間過的好快約定的日子就快到了公龜等不及

就早一天來到約好的地方.只見母龜早以比公龜先到..

公龜高興的過去和母龜說：母龜沒想到你比我還迫不及待的想見面

母龜很生氣的告訴公龜：他媽的哩!去年做完愛你既然忘了把我翻過來..害我整整曬了一年的太陽