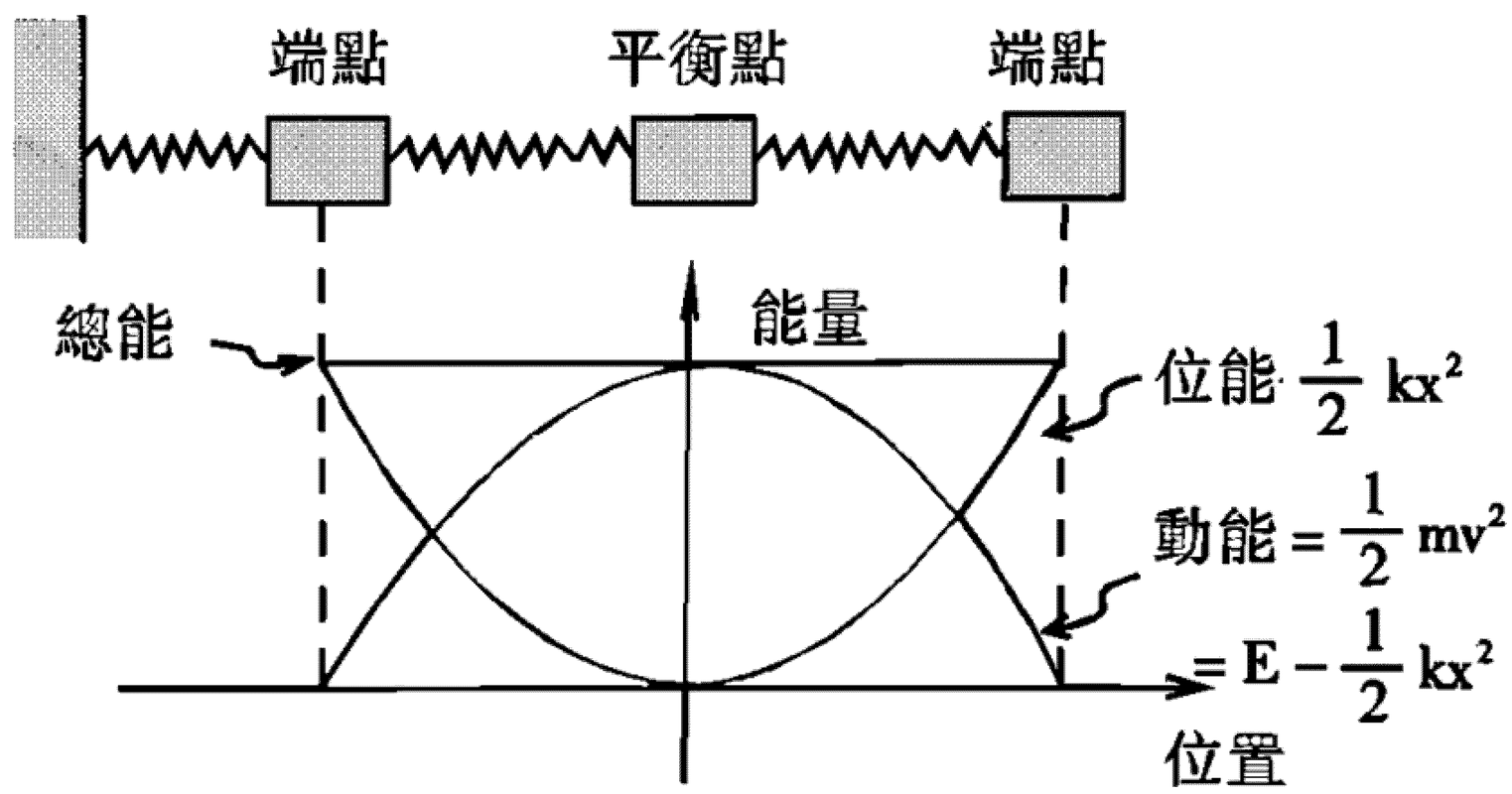
PHYSICS

第七章

功與能



_____年 _____班 _____號

姓名：_____

吳錫玠老師 編授

觀念一　動能

一、動能

1. 動能定義：物體因運動而具有的能量稱為動能。以 E_k 或 K 表示。

2. 動能公式：$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

3. 動能單位：

	質量 m	速度 v	動能 E_k
M.K.S.制	kg	m/s	焦耳 $J = kg \cdot m^2/s^2$
C.G.S.制	g	cm/s	爾格 $erg = g \cdot cm^2/s^2$

（註：1 焦耳＝10^7 耳格）

4. 動能性質：

(1)動能是純量，無方向性，恆為正值。

(2)動能隨參考座標而異，因為 v 乃相對於參考座標的速度。

二、動能與動量的關係：

(1)動能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 為純量，動量 $\vec{P} = m\vec{v}$ 為向量。

(2) $\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mv^2 \\ P = mv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_k = \frac{P^2}{2m} \\ P = \sqrt{2mE_k} \end{cases}$

Pf：$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{P^2}{2m}$

$P = \sqrt{2mE_k}$

三、動能與向心力的關係：

$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mv^2 \\ F_c = \frac{mv^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_k = \frac{F_c \cdot r}{2} \\ F_c = \frac{2E_k}{r} \end{cases}$

吳錫玠物理

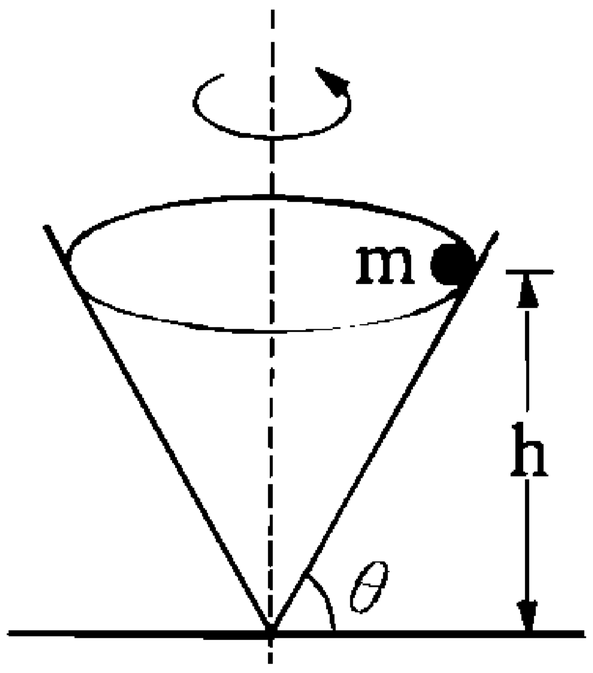
例1. 一物體作半徑為 R 的等速圓周運動，若其動能為 E_k，則其向心力為

(A) $\frac{E_k}{R}$ (B) $\frac{2E_k}{R}$ (C) $\frac{E_k}{R^2}$ (D) RE_k (E) R^2E_k 。答：(B)

例2. 質量 m 的人造衛星，繞質量 M 之行星作半徑為 r，速率為 v 之等速率圓周運動；若其向心力為 f，萬有引力常數為 G，則其動能為

(A) $\frac{1}{2}fr$ (B) $\frac{1}{2}mv^2$ (C) $\frac{GMm}{2r}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{fGMm}$ (E) $\sqrt{\frac{fr}{GMm}}$ o 答：(A)(B)(C)(D)

例3. 一中空之圓錐其軸鉛直，錐面與地面夾θ角，有一質點質量 m，在錐內距離錐底之鉛直高度 h，沿光滑錐面等速旋轉，如右圖，則此質點之動能為何？答：$\frac{1}{2}mgh$



老鷹物理

※家庭作業

1.一質量 m 的物體以半徑 R，作等速率圓周運動，向心力為 f，則：(A)動能恆為 fR/2 (B)動量大小恆為 $\sqrt{mfR}$ (C)旋轉 1/3 週，動能變化 $\sqrt{3}$ fR (D)同(C)，動量變化大小為 $\sqrt{3mfR}$ (E)物體恆受衝量作用，但沒有獲得功。答：(A)(B)(D)(E)

2.質量為 m 之物，繫於長 L 之繩之一端，以另一端為軸，做等速率圓週運動，頻率為 f。試求：(1)動量大小？(2)動能？(3)轉 1/4 圈之動量變化大小？(4)轉 1/4 圈之動能變化大小？(5)轉一圈向心力所作之功？

答：(1) $2\pi mlf$ ；(2) $2\pi^2 ml^2 f^2$ ；(3) $2\sqrt{2}\pi mlf$ ；(4)0； (5)0

3.某物體質量 m，作週期為 π，加速度為 a 的等速率圓周運動，則物體的動能為何？

答：$\frac{1}{8}ma^2$

4.物體質量 m 在圓周上，作等速率圓周運動，其動能為 E_k，若作用在物體上的向心力為 F，則其旋轉半徑為： (A) $\frac{E_k}{R}$ (B) $\frac{E_k}{2F}$ (C) $\frac{2E_k}{F}$ (D) $\frac{E_k}{2m}$ (E) $\frac{\sqrt{2mE_k}}{F}$ 。答：(C)

5.地表人造衛星受向心力 F= $\frac{GMm}{R^2}$ ，則 (a)所受重力若干？(b)動能若干？(C)速率若干？

答：(a) $\frac{GMm}{R^2}$ ；(b) $\frac{GMm}{2R}$ ；(c) $\sqrt{\frac{GM}{R}}$

6.長 1 米之繩繫一質量為 1kg 之石，使石保持每秒 4 轉之轉速在水平面上旋轉，則：(A)石之動能為 $32\pi^2$ 焦耳 (B)石所受向心力為 $64\pi^2$ 牛頓 (C)石每轉一周向心力作功 $32\pi^2$ 焦耳 (D)若轉動頻率不變，而半徑加倍，則需再作功 $96\pi^2$ 焦耳 (E)若轉動頻率加倍，而半徑不變，則作功為 0 焦耳。答：(A)(B)(D)

7.LP 超大猜 1 個國家？ 答案:南韓

例4. 不計空氣阻力，一斜向拋射之物體，當其切線速度之仰角為 45° 及 30° 時，拋射物體的動能之比值為： (A)$\frac{3}{2}$ (B)$\frac{3}{\sqrt{2}}$ (C)2 (D)$\frac{9}{2}$ (E)$\frac{3}{4}$ 。答：(A)

例5. 地面上以θ之仰角，斜向上拋一質量為 m 之物體，拋出時之動能為 E_{ko} ，不計空氣阻力，物體飛行至頂點時：(A)動能為 $E_{ko}\cos\theta$ (B)動量為 $\sqrt{2mE_{ko}}\cos\theta$ (C)重力所作之功為 $-E_{ko}\sin^2\theta$ (D)重力對物體之衝量為 $\sqrt{2mE_{ko}}\sin^2\theta$ (E)所受重力為 mg。答：(B)(C)(E)

例6. 一靜置於地面上質量為 M 的球形炸彈，當其爆炸時，均勻往各方向炸散成許多同質量的碎片(各碎片的初速都相等)。若已測得碎片散佈的半徑為 R，試求此炸彈的爆炸能量？(以已知量表示之)【1996 奧林匹亞初選】答：$\frac{MgR}{2}$

巴總物理

※家庭作業

1.將物體以動能 K、仰角 60° 斜向拋出，則當運動方向爲俯角 30° 時之動能爲 (A)$\frac{1}{3}$K (B)$\frac{1}{2}$K (C)$\frac{1}{5}$K (D)$\frac{1}{\sqrt{2}}$K (E)$\frac{1}{\sqrt{3}}$K 。答：(A)

2.將質量 m 的物體以初速 v 鉛直上拋，則此物體自上拋迄至落回地面： (A)動量變化爲 0 (B)所受衝量 2mv 向下 (C)其動能變化爲 mv^2 (D)所受重力作功爲 0 (E)重力對此物有衝量作用；但作總功爲 0 。答：(B)(D)(E)

3.從地面鉛直向上拋出一物體，在上升和下落過程中不計空氣阻力，小球兩次經過離地 h 高的某點時，小球具有： (A)相同的速度 (B)相同的加速度 (C)相同的能量 (D)相同的動能 (E)相同的動量。答：(B)(C)(D)

4.有一個質量爲 m 的圓盤平放在一水平面板上，圓盤中心放置一小塊質量可以忽略不計的烈性炸藥。當圓盤爲靜止時，引燃炸藥，結果使圓盤炸成 n 個質量相等的小碎塊，每一碎塊皆循著圓盤中心的輻射方向，沿水平面射出。現在將同樣的圓盤以高速度 v_o 向正東方向水平地擲出，隨後迅速以前述的方式引爆火藥，爆炸後發現至少有一小碎塊向正西方向射出。由此一事實可以推論此火藥爆炸後，所釋放出的能量至少爲何？【2003 奧林匹亞初選】答：$\frac{1}{2}mv_o^2$

5.丫萍到果菜市場買菜，提著大包小包走在攤位間，聽到身後兩位菜商正數著鈔票在聊天。其中一位以充滿幸福的口吻感慨說：「我無論按怎颱風下雨，每天一定早上三四點起床，辛苦苦打拼，攏是爲著這四個孩子。你看你看，這四個小孩有多可愛！」

想像一位愛孩子的父親，把孩子的相片帶在身邊，辛苦努力工作之餘，便拿出來慰藉自己一番，多麼感人啊！

丫萍忍不住回頭，想用他的微笑來稱許他的慈愛。

回頭只見一位菜商正拿著一把千元鈔票，秀給另一位菜商看：「你看你看，就是頂頭這四個孩子，讓我每天打拼工作的。」

ps:1000 元台幣上的圖案是 4 個孩子

丫萍：嗯.....我也是爲了這四個孩子.....

例7. 一物動能 E_k，動量 P 則：

(A)速率為 $\frac{E_k}{P}$ (B)速率為 $\frac{2E_k}{P}$ (C)速率為 $\frac{P^2}{2E_k}$ (D)質量為 $\frac{P^2}{2E_k}$ (E)質量為 $\frac{E_k}{2P}$ 。

答：(B)(D)

例8. 有兩質點，質量分別為 m_1 和 m_2，動能為 E_{k1} 和 E_{k2}，動量大小為 $\vec{P}_1$ 和 $\vec{P}_2$，若動量大小相等($P_1 = P_2$)，又 $m_1 > m_2$，則下列關係中正確的是那一個？(A) $m_1E_{k1} > m_2E_{k2}$ (B) $m_1E_{k1} = m_2E_{k2}$ (C) $m_1E_{k1} < m_2E_{k2}$ (D) $m_1E_{k2} > m_2E_{k1}$ 。【75 夜大】答：(B)

吳銘物理

※家庭作業

1.某物體動量為 P，動能為 E_k，則其質量為何？

(A) $\frac{P^2}{2E_k}$ (B) $\frac{2E_k}{P^2}$ (C) $\frac{P}{2E_k}$ (D) $\frac{2E_k}{P}$ (E) $\frac{E_k}{2P}$ 。答：(A)

2.下列情形，何者可能存在？ (A)一物體具有能量，但不具有動量 (B)一物體具有動量，但不具有動能 (C)一物體不具有動量，亦不具有動能 (D)一物體速率增大時，其動量亦增大 (E)一物體質量大，但動量小 。答：(A)(C)(D)(E)

觀念二　位能.

一、保守力&非保守力的定義：

1. 保守力：

(1)力的觀點：力為位置的函數，不受其他因素影響。(如：重力，彈力，靜電力…)

(2)功的觀點：

保守力所作的功僅與起點及終點位置有關，而與所經路徑無關

保守力沿一封閉路徑繞一圈對運動質點所作之功恆為零

2. 非保守力：

(1)力的觀點：力不為距離的函數，而受所經路徑或速度….的影響

(2)功的觀點：

非保守力所作的功與所經路徑有關

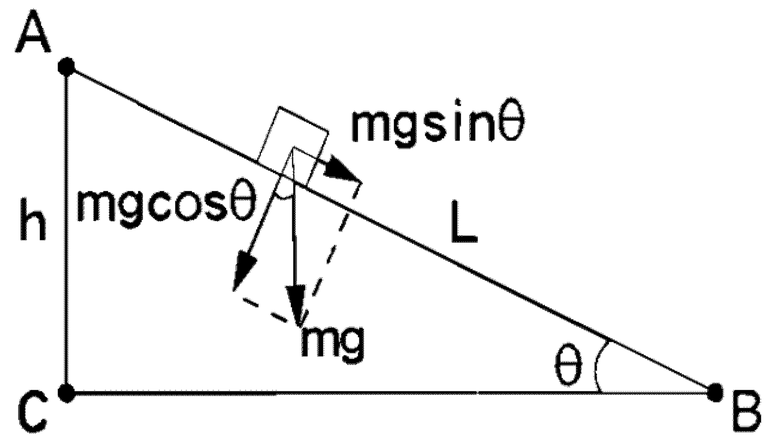
非保守力沿一封閉路徑繞一圈對運動質點所作之功不為零

二、保守力的例子：

1. 重力

(1)質量為 m 的質點從一斜角為θ、長度為L的斜面上滑下，重力對質點所作的功

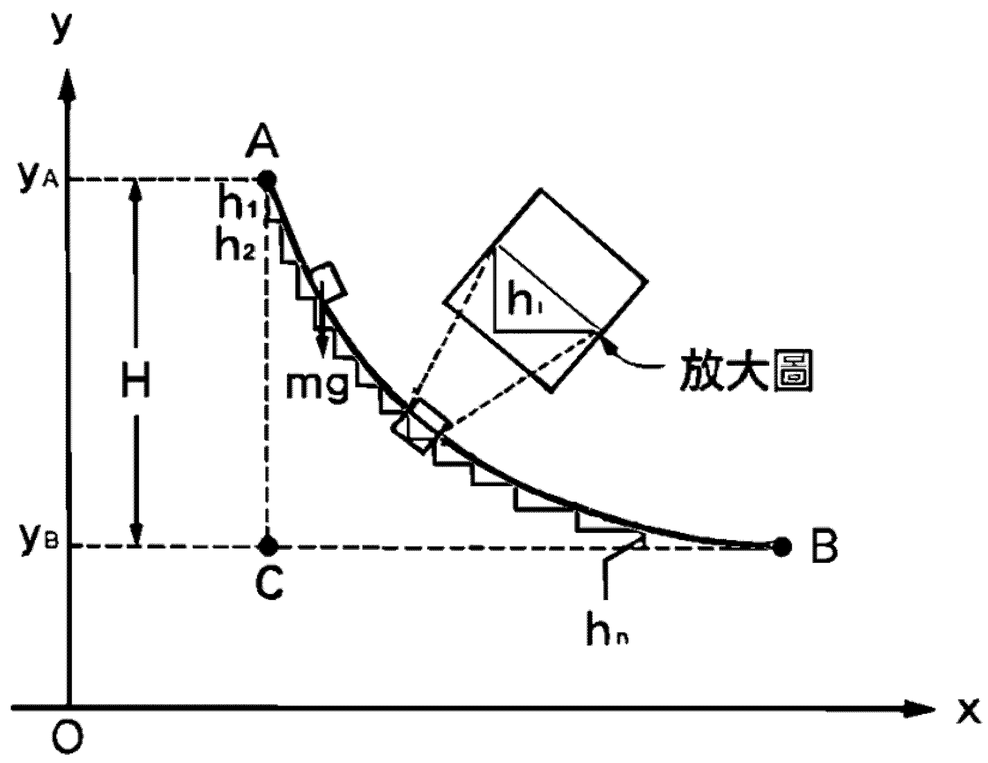
$$W_g = \vec{F}\cdot\vec{S} = mg\cdot L\cdot\cos(90°-\theta) = mgL\sin\theta = mgh$$



當質點從斜面的頂端 A 點滑至底端 B 點時，重力對質點所作的功

$W_g = mgh$，此值僅和 A、B 兩點之間的鉛直高度有關。

(2)質量為 m 的質點在重力場中沿一任意的曲面(或曲線)運動，將該曲面分成許多小段，每一段皆類似圖中所示的斜面，設第 i 段斜面的鉛直高度為h_i，質點在經過這一段斜面時，重力所作的功為$W_i = mgh_i$。當質點從 A 點移至 B 點時，重力對該質點所作的總功



$$W_g = W_1 + W_2 + W\cdots\cdots + W_n$$

$$= mgh_1 + mgh_2 + \cdots\cdots + mgh_n$$

$$= mg(h_1 + h_2 + \cdots\cdots)$$

$$= mgH$$

此值僅和 A、B 兩點之間的鉛直高度有關，和所經路徑的形狀無關。

吳錫玠物理

2. 彈力

(1)彈簧的恢復力對物體所作的功，僅和彈簧的起始和最後的長度變化量有關，也是屬於保守力。

(2)彈簧的彈性位能是其長度變化量的函數，彈性力(即彈簧的恢復力)對物體所作的功

$W_S(A \to B) = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2)$，僅和彈簧的起始和最後的長度變化量有關，和其形變的過程或所經的路徑無關。因此彈性力也是屬於保守力。

三、保守力的特性：

1. 保守力所作的功可用位能的形式表示之，位能只是物體位置的函數。

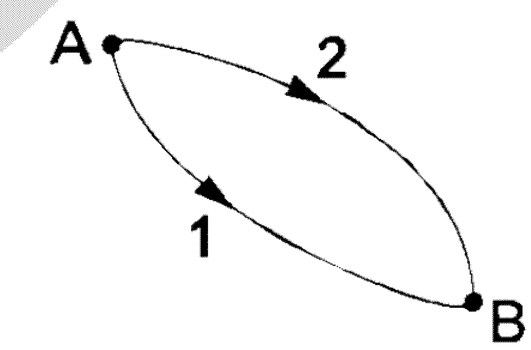
(1)重力所作的功，可寫為$W_g = -\Delta U_g$，重力位能$U_g(y) = mgy$。

(2)彈性力所作的功，可寫為$W_S = -\Delta U_S$，彈性位能$U_S(x) = \frac{1}{2}kx^2$。

2. 沿物體的運動路徑為一任意的封閉迴路，則保守力對該質點所作的功為零。

(1)沿不同路徑移動：一質點從 A 點分別沿著路徑 1 和路徑 2 移至 B 點，

則重力對該物體所作的功皆相等，$W_g(A \to B)_1 = W_g(A \to B)_2$

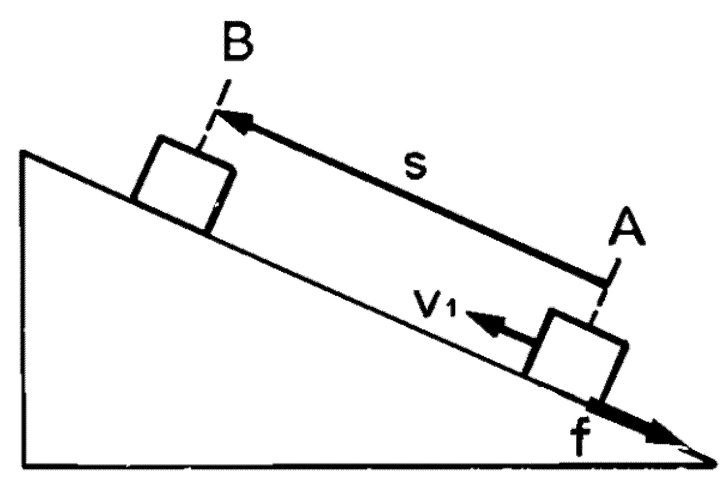


(2)物體的運動路徑為封閉迴路 A→B→A：

將路徑 2 的行進方向反轉，則因重力的方向不變，但位移的方向和前者相反，故$W_g(A \to B)_2 = -W_g(B \to A)_2$。因此在重力場中若將物體從 A 點出發經路徑 1 移至 B 點，再經由路徑 2 返回 A 點，構成一封閉的迴路，則重力對該物體全程所作的總功為

$W_g(A \to B)_1 + W_g(B \to A)_2 = 0$。

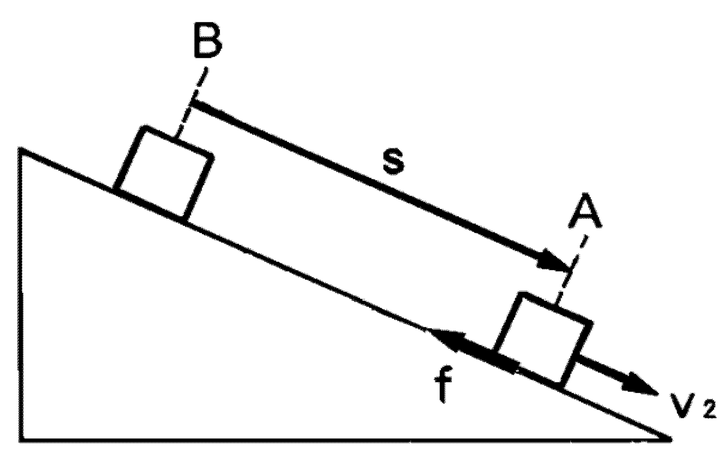
四、非保守力的特性



(1)木塊在斜面上運動時，受有一定值的滑動摩擦力 f，在木塊上滑時，摩擦力所作的功為$W_1 = -fs$。

(2)在木塊下滑時，摩擦力所作的功為$W_2 = -fs$。

(3)木塊從斜面上的 A 點上滑至 B 點後，再下滑至 A 點，構成一封閉的運動路徑，摩擦力所作的總功為$W = -2fs$，不等於零，而和木塊所經的路徑長有關。所以摩擦力不是保守力，稱為非保守力。



一、位 能：

1. 位能的定義：系統由於位置或形狀發生改變，所儲存的能量稱之，如重力位能、彈力位能、電位能(高三課程)等等。

2. 位能的大小：外力反抗保守力等速移動所作的功。

3. 位能的種類：

(1)斥力位能：由於斥力作用而具有之位能。使兩物體靠近須外力作功，故距離愈小，位能愈大；反之，距離愈大，位能愈小。

(2)引力位能：拉開兩物體須外力作功，故距離愈大，位能愈大；反之，距離愈小，位能愈小。

4. 位能的單位

	位能	動能	功
M.K.S.制	焦耳 Joul	焦耳 Joul	焦耳 Joul
C.G.S.制	爾格 erg	爾格 erg	爾格 erg

二、地表附近的重力位能

1. 地表附近的重力位能 $U_g = mgh$

pf：在地表附近，物體所受之重力可是為定值

由位能的定義可得：重力位能＝外力 F 反抗重力 mg 等速移動所作的功

故將物體向上移動 h 所改變的位能

$\Delta U = 外力\vec{F} \cdot \vec{h} = mgh$

2. 關於重力位能必須釐清之觀念：

(1)「mgh」只能用在地表附近(均勻重力場)：

地表附近是指距地面高度 h，而且此高度 $h << R_e$(地球半徑)，

在此附近地球的重力場可視為定值(或者說可視為是一個均勻重力場)，因此物體在移動過程中所受到的重力才可視為定值(＝mg)，一旦離地面較遠了，物體所受到的重力必須以 $F = \dfrac{GMm}{r^2}$ 來計算，此時重力就不再是定力，因此重力位能也不能再用 mgh 來表示了。

(重力位能的普遍形式將在後面的觀念十說明)

(2)位能是『相對』的：

在物理研究上，我們所討論的位能僅是位能的變化，且位能是一種相對的量而非絕對的，所以嚴格地說，我們只能說某物體的位能在 A 處比在 B 處多多少，而不能說物體在某處的位能為多少，除非我們規定了零位面。

吳錫玠物理

①「零位面」的概念：

位能是一種比較的值，我們所訂定用於比較位能的比較標準平面稱為零位面。若以地表某處為重力位能的零位面，即以該處位能為零之意。零位面可以任意選定，一般在計算地表之重力位能時常定地面為零位面。

②不同零位面之重力位能：

如下圖，我們若選定不同位置作為重力位能之零位 面，則同一處位能之值將有所不同：

1. 若以地面為零位面，則

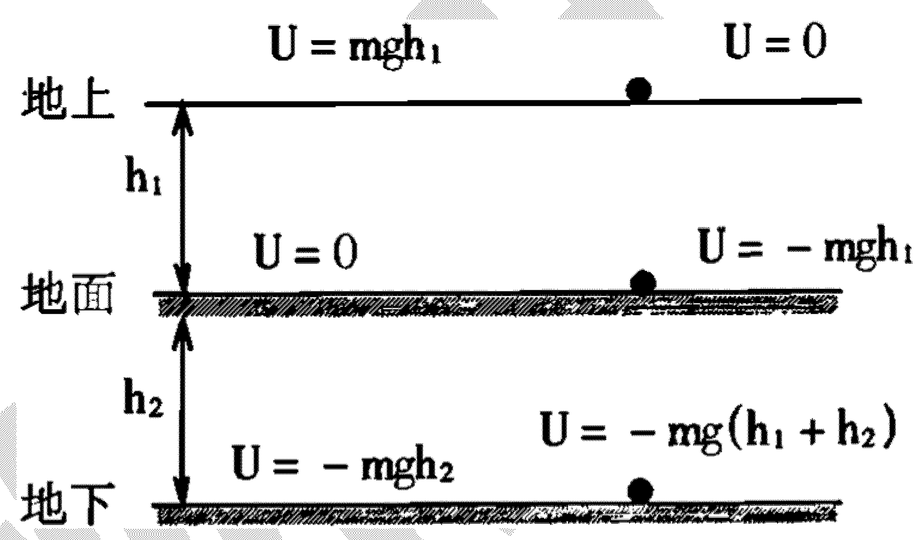
比地面高 h1 處的位能應為 $U = mgh_1$

比地面低 h2 處的位能應為 $U = -mgh_2$

2. 若以比地面高 h1 處為零位面，則

地面處的位能應為 $U = -mgh_1$

比地面低 h2 處的位能應為 $U = -mg(h_1 + h_2)$



【註】在地表附近重力位能的計算一般是取地面為零位面，而在離地表較遠處(例如人造衛星)或在計算星球間之重力位能時則常以∞處(無窮遠處)為零位面(將在後面章節討論)。

(3)位能是屬於『系統』的：

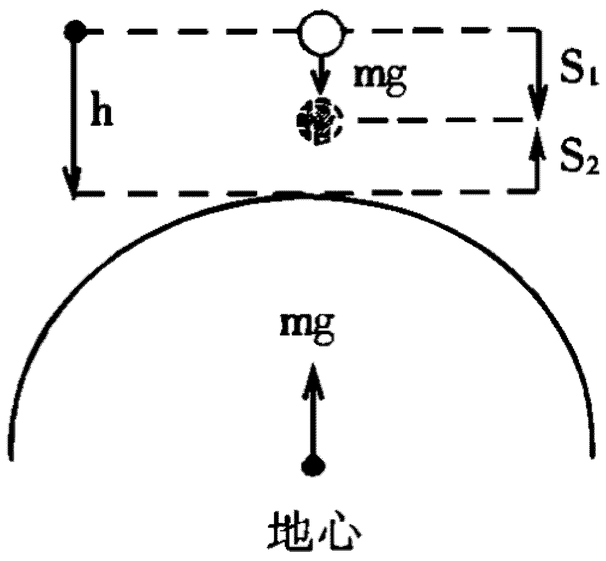
重力位能是物體 m 與地球 M 彼此間所共同其有的。如圖，當物自由落下時，因物與地球互相吸引，兩者受力均為 mg，各自移動 S_1 及 S_2，全部重力做功 $W = mgS_1 + mgS_2 = mgh$。但因

$S_1 : S_2 = M_e : m$ （M_e 為地球質量），

則 $S_1 = \dfrac{M_e}{M_e + m} h \cong h$ （$\because M_e >> m$）

故此位能 mgh 可看成全部為物體 m 所具有。

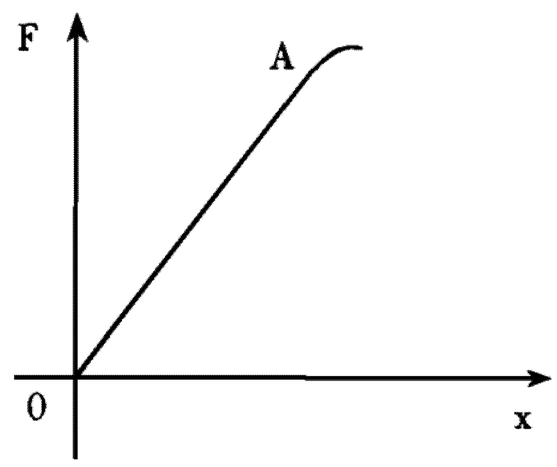
在高 h 處質量 m 物落下系統損失的重力位能為 mgh，它將轉變為物體與地球的總動能。但因地球質量太大，故分配到之動能甚小，可以忽略。故說此位能為物體所具有，大小為 $U = mgh$



三、彈力位能

1. 虎克定律：彈性體在彈性限度內，彈力 $\vec{F}$ 與變形 $\Delta\vec{x}$ 成正比。

公式: $\vec{F} = -k \cdot \Delta\vec{x}$



【註】

(1)彈簧的彈力又稱為彈簧恢復力。

(2)對於彈簧而言，形變量是指伸長量或壓縮量。

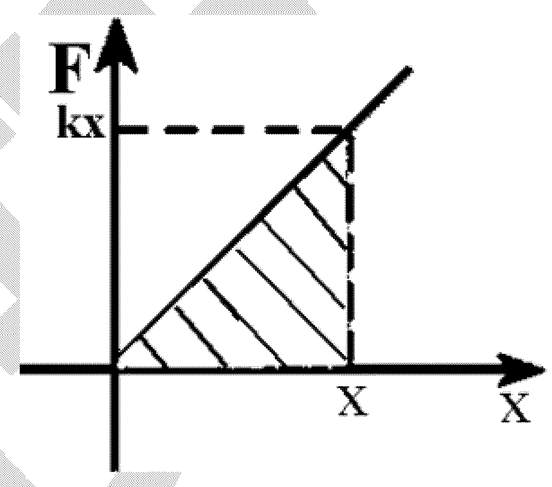
(3)虎克定律的向量表示式 $\vec{F} = -k\vec{x}$，此時之「$\vec{F}$」指的是彈力(而非外力)，而「$\vec{x}$」指的是位置向量。

(4)並非所有的彈性體均適用虎克定律，能符合虎克定律的彈簧稱為線性彈簧；不符合者稱為非線性彈簧。

2. 彈簧之彈力位能：

(1)當施力使彈簧產生形變時，外力必須克服彈力對彈簧作功，所作的功則以一種位能的形式儲存於彈簧中，稱為彈簧的 彈力位能。

(2)因為彈力與形變量成正比，外力克服彈力對彈簧作功時，是屬於變力作功，必須由 F-x 圖圖形下面積求得，如右圖，故



當施力 F(變力)將彈簧緩緩地拉長時，所需的外力 F 隨著彈簧慢慢伸長也由零慢慢地增加。

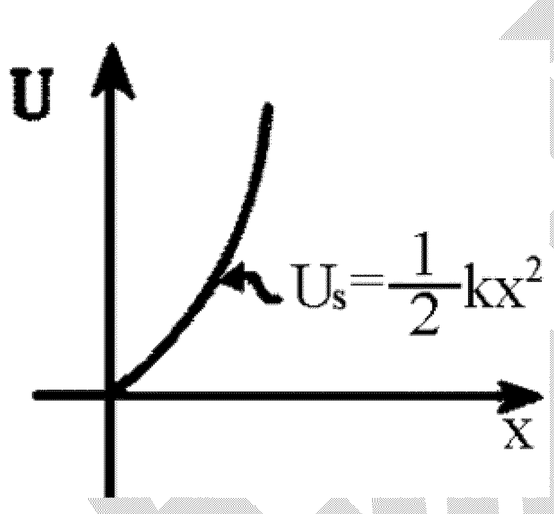
當拉到使彈簧伸長量 x 之時，所需的外力 F＝kx，如圖所示。

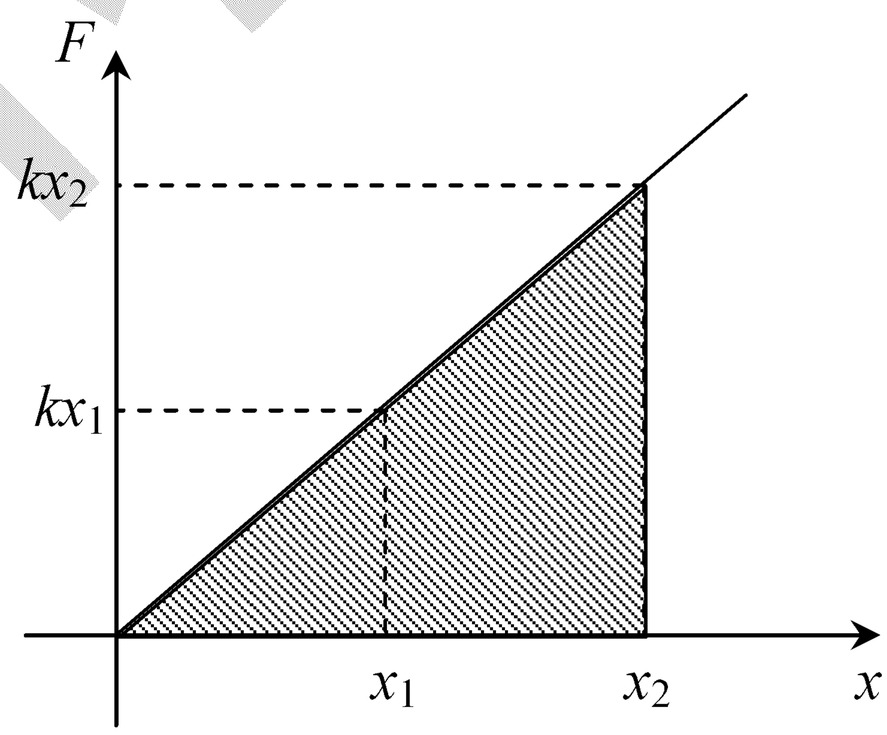
外力作功為圖中斜線部分的面積，因此

$$\Delta U_S = W = \frac{(kx)\times x}{2} = \frac{1}{2}kx^2$$

所作的功＝彈簧增加的彈力位能 ΔU_S

因此彈簧的彈力位能 $U_S = \frac{1}{2}kx^2$。彈力位能 U_S 隨 x 變化之關係如下圖所示：



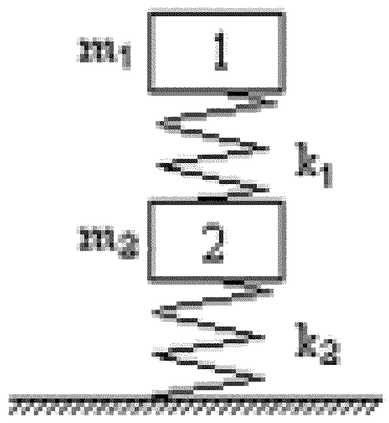


(3)若施力將彈簧從伸長量 x_1 拉長至 x_2 時，所作的功為 W＝F-x 圖圖形下面積(梯形)

$$= \frac{kx_1 + kx_2}{2} \times (x_2 - x_1) = = \frac{1}{2}k(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

$= U'_S - U_S = \Delta U$ (增加的彈力位能)

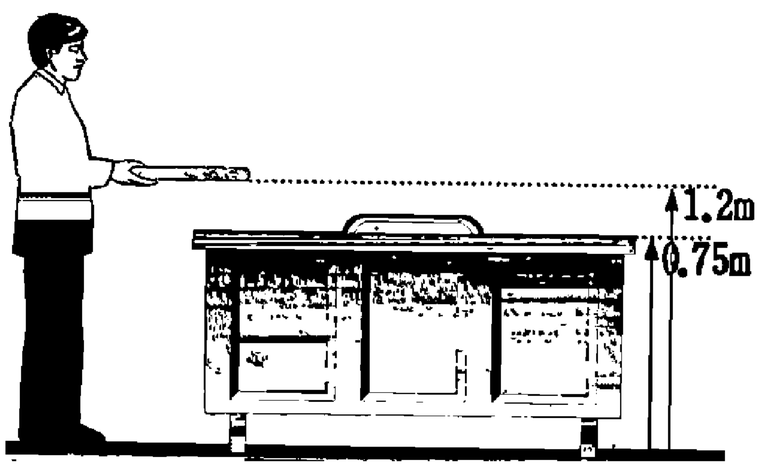
例9. 如圖所示，倔強係數爲 k_1 的輕質彈簧兩端分別與質量爲 m_1 、 m_2 的物塊 1、2 拴接，倔強係數爲 k_2 的輕質彈簧上端與物塊 2 拴接，下端壓在桌面上(不拴接)，整個系統處於平衡狀態。現施力將物塊 1 緩慢豎直上提，直到下面那個彈簧的下端剛脫離桌面，在此過程中，(1) 物塊 1 的重力勢能增加多少？(2)物塊 2 的重力勢能增加多少？【1996 大陸高考】



答：(1) $m_1 g(\frac{m_1+m_2}{k_1}g+\frac{m_1+m_2}{k_2}g)$ ；(2) $m_2 g(\frac{m_1+m_2}{k_2}g)$

※家庭作業

1.某人拿著物理課本站在桌子旁邊，如圖所示。課本的質量爲 100g，若分別以通過地面、桌面以及手掌的水平面作爲重力位能的參考面，則課本的重力位能各爲多少？答：(1)1.18J；(2)0.44J；(3)0



2.在美國尼加拉瀑布每秒大約有 5.5×10^6 kg 的水下落 50m，則每秒下落的水中有多少位能轉變爲動能？答：2.7×10^9 J

3.成功嶺上，晚上安全士官站安全。

一個新兵起床報備上廁所，進廁所後，很久都沒有出來。

安官就很奇怪，怕是要逃兵，就去廁所看一看，他很小心的去看，發現那新兵還在上，再靠近一點，還發現他在喃喃自語。

安官更好奇了，就偷偷的靠近，想聽一聽他在說什麼。

那小兵在說：「孩子們，不是爸爸不要你，實在是找不到媽媽！」

例10. 彈簧秤的刻度由 0 到 1000 牛頓的長度爲 0.1 公尺，(1)這個彈簧秤的力常數？(2)當掛上 200 牛頓的重物時，彈簧的位能？答：(1)$10^4 N/m$ ；(2)2J

※家庭作業

1.某輕質彈簧被拉長 x_o 時，彈力位能爲 U；今將此彈簧壓縮 $\frac{x_o}{2}$ 時，彈力位能爲：

(A) $\frac{1}{2}$ U (B) $\frac{1}{4}$ U (C)2U (D)4U 。答：(B)

2.某輕質彈簧拉長 x 時，施力所作之功爲 W，今再拉長 2x，則彈簧的彈性位能增加若干？(在彈性限度內) (A)8W (B)9W (C)6W (D)5W 。答：(A)

類 5.閃電俠和隱形人是好友，有一天閃電俠上街，看到巷子裡有一個女人兩腳開開不知道在幹嘛，他想機不可失，就以閃電的速度衝過去把那女人嘿咻，事後又以閃電的速度跑掉了....

過了幾天超人碰見閃電俠，對他說：『嘿～你知道隱形人住院了嗎？』

閃電俠就跑去醫院看隱形人，發現他下半身纏滿繃帶：『天啊！你是怎麼搞成這樣子的？』

隱形人：『唉...前幾天我變隱形在巷子裡跟一個女人 XX，忽然不知道什麼東西從後面捅了我的屁股幾百下.....』

吳錫玠物理

觀念三　力學能守衡

※力學能守恆

$$W_{非保守力} = \Delta E$$

若 $W_{非保守力} = 0$

則 $\Delta E = 0$

$\Rightarrow E_{k1} + U_1 = E_{k2} + U_2 = E =$ 定值

說明：

1. 力學能守衡的條件：$W_{非保守力} = 0$

2. 此定理可由質點推廣至系統，即：若一獨立系統中 $W_{非保守力} = 0$，則系統的力學能總和為一定值。

3. 由於力學能守恆定律僅涉及物體在起始和最後狀態的動能和位能，且兩者皆為純量，在處理力學問題時非常有用。利用這個定律，不需要知道力的作用過程，仍然可以預測物體的運動結果。

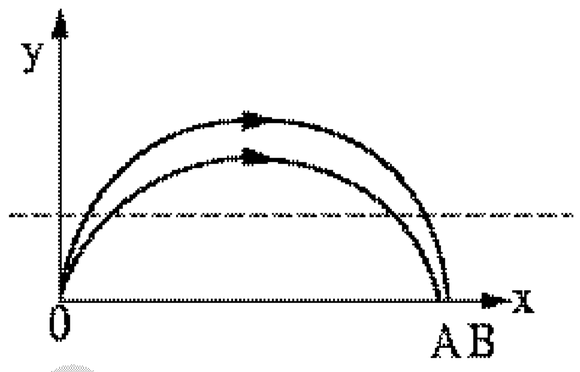
4. 有非保守力作功時系統之力學能不守恆：
   當有非保守力作功時系統之力學能不守恆，即使此非保守力是內力仍然如此，
   非保守力所作之功與系統力學能變化之關係如下

$$E_{k1} + U_1 + W_{非保守力} = E_{k2} + U_2$$

5. 有非保守力作功時系統之總能量仍守恆
   在一個孤立的系統中，能量可以從一種形式轉變為另一種形式，但系統的總能量保持不變。
   若系統有非保守力作用時，則系統的力學能不守恆，但其總能量仍然守恆，遵守能量守恆定理。

李領物理

例11. 有質量相等的 A、B 二球，以相同的初速度做斜向拋射，其拋射角分別爲37°及53°，拋射軌跡如圖所示，若在忽略空氣阻力的情形下，則這二球在同一高度處（圖示虛線處）的動能比值 $\frac{K_A}{K_B}$ = ? (A)1 (B)$\frac{25}{64}$ (C)$\frac{5}{8}$ (D)$\frac{25}{12}$ (E)條件不足。答：(A)



※家庭作業

1.一個皮球從高度ℓ處自由落下到地面後又反彈跳起，設忽略所有的摩擦效應，則下列之敘述中，哪些是正確的？ (A)這是一個週期運動 (B)這是一個簡諧運動 (C)反彈之高度爲ℓ (D)皮球的動能與重力位能之和在任何時刻均相同 (E)在運動期間內，皮球動量之大小爲一常數。【74 日大】答：(A)(C)

2.有關「位能和能量守恆定律」的敘述，何者正確？ (A)保守力所作之功可用位能的形式表示之 (B)合力對物體所作之功，等於各分力對物體所作之功的代數和 (C)多質點的系統中，系統的重力位能等於組成質點間重力位能之代數和 (D)保守力對物體所作之功與物體的運動路徑無關 (E)若質點的運動路徑爲一任意的封閉迴路，則保守力對該質點所作之功爲零。答：全

3.從地面鉛直向上拋出一物體，在上升和下落過程中不計空氣阻力，小球兩次經過離地 h 高的某點時，小球具有： (A)相同的速度 (B)相同的加速度 (C)相同的力學能 (D)相同的動能 (E)相同的動量。答：(B)(C)(D)

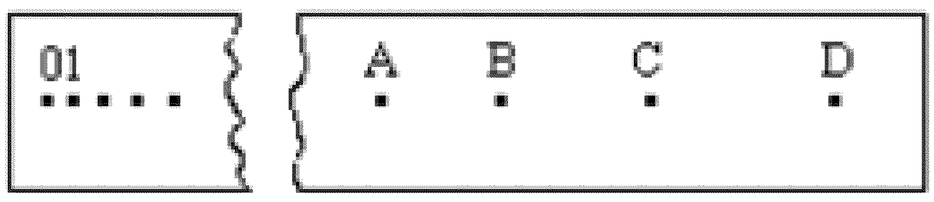
4.將一質量 m 之物體以 $\frac{1}{2}mv^2$ 之動能鉛直向上拋射，若重力加速度之量值爲 g，則正確的敘述爲(不計空氣阻力) (A)物體可上升之最大距離爲 $\frac{v^2}{2g}$ (B)當物體達到最高點時的瞬間，物體受力爲零 (C)物體下降至原拋射點時，其速度的量值爲 v (D)物體拋出時與落回至原拋射點時的動量相同，符合動量守恆定律 (E)物體的總力學能在整個運動過程中不變。【76.日大】答：(A)(C)(E)

吳錫玠物理

例12. 自地面將質量爲 m 之物體以動量 p 鉛直上拋，若不計空氣阻力，則當其距地面爲最大高度之$\frac{1}{4}$時，其動能爲若干？答：$\frac{3P^2}{8m}$

例13. 單位長度質量爲ρ之鋼索無限長，一端繫質量 m 之球將其以v之速度上拋，則鋼索可上升長度若干？答：$\frac{-mg+\sqrt{m^2g^2+\rho gmv^2}}{\rho g}$

例14. 在"驗證機械能守恒定律"的實驗中，已知打點計時器所用電源的頻率爲 50 赫，查得當地的重力加速度 g=9.80 米/秒 2，測得所用的重物的質量爲 1.00kg，實驗中得到一條點跡清晰的紙帶，把第一個點記作 0，另選連續的 4 個點 A、B、C、D 作爲測量的點.經測量知道 A、B、C、D 各點到 0 點的距離分別爲 62.99cm、70.18cm、77.76cm、85.73cm。根據以上資料，可知重物由 0 點運動到 C 點，(1)重力勢能的減少量？(2)動能的增加量？(取 3 位有效數字)【1996 大陸高考】答：(1)7.62J；(2)7.56J

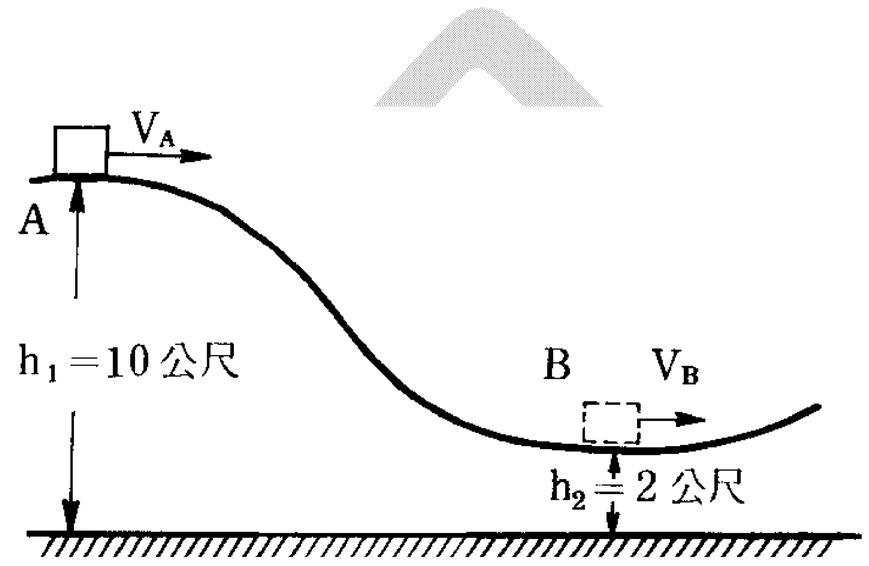


張榮珍物理

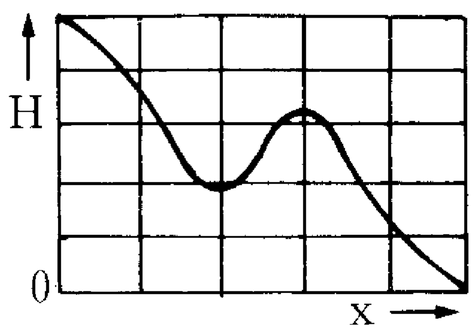
※家庭作業

1.有一質點在光滑的斜面上端(斜面長為 L)。當質點由靜止滑下行走至 L/3 點與 L 點的動能各為 $E_{1/3}$ 及 E_0，則 $E_{1/3}$／E_0 為 (A)$\frac{1}{3}$(B)$\frac{2}{3}$ (C)$\frac{1}{9}$ (D)$\frac{4}{9}$ (E)1。【69 夜大】答：(A)

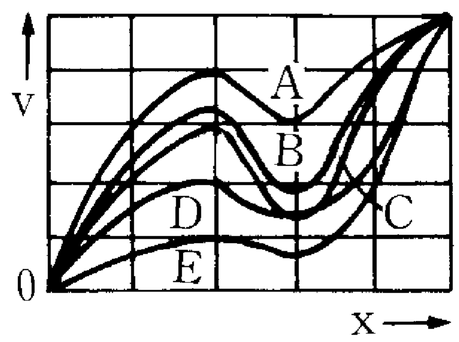
2.如圖，一物體由 A 點以 3.00 公尺/秒的速率，沿光滑表面滑下，當物體行至 B 點時，物體的速率為 (A)11.3 公尺/秒 (B)12.9 公尺/秒 (C)13.8 公尺/秒 (D)14.5 公尺/秒 。【80 三專】答：(B)



3.右圖(一)為一空中飛車的軌道(H 為高度，x 為水平位置)。今飛車由最高點出發，初速為零，並不計一切摩擦力，則飛車在軌道上每一點之速率 v 為圖(二)之： (A)曲線 A (B)曲線 B (C)曲線 C (D)曲線 D (E)曲線 E 。【66 日大】答：(A)



圖(一)



圖(二)

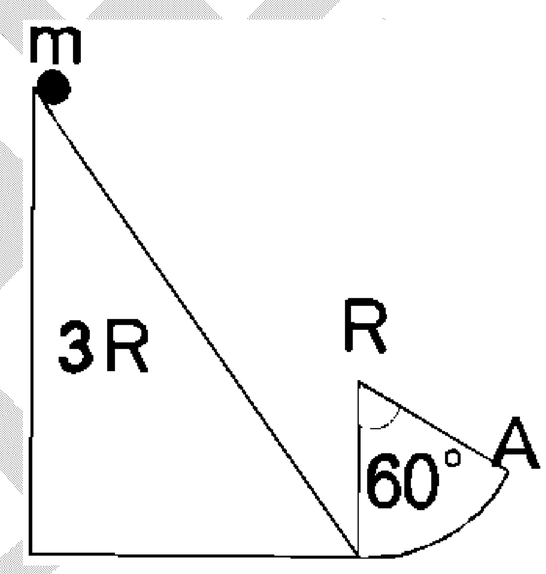
4.質量為 m 的物體以速度 v_o 從地面鉛直上拋，當它拋到離地面 h 高處，它的動能和位能正好相等，這個高度為： (A)$\frac{v_0^2}{g}$ (B)$\frac{v_0^2}{2g}$ (C)$\frac{v_0^2}{4g}$ (D)$\frac{2v_0^2}{g}$ (E)$\frac{4v_0^2}{g}$ 。答：(C)

5.自地面將長度 L、質量為 m 之均勻繩子，一端繫質量為 M 的小球。不計空氣阻力，將球以 v 之初速從地面鉛直上拋，假設繩子能夠全部離開地面時，球能夠上升的最大高度 h 為若干？答：$\frac{Mv^2+mgL}{2(M+m)g}$

6.垂直往上拋射之物體，經過 4 秒鐘後掉落至地面，則 (A)拋射後 3 秒時，物體的高度為最大高度之一半 (B)物體初速為 9.8 米/秒 (C)物體到達最高度之一半時，其動能與位能相等 (D)物體到達最高度為 19.6 米 (E)若有空氣阻力，則物體之初速與末速之大小相等。(以地面為零位面) 答：(C)(D)

例15. 將一物自地面以初速 v，53° 之仰角斜向拋出，則當物體之速度與水平方向成 37° 角時，物體距地面之高度為何？(不計阻力)答：$\dfrac{7v^2}{32g}$

例16. 一質量 m 之物體自一距地高 3R 之光滑斜面頂點靜止滑下，經半徑 R 之光滑圓曲面之 A 點射出，如右圖示，則此物所能達到之最大高度為若干？答：$\dfrac{19}{8}R$



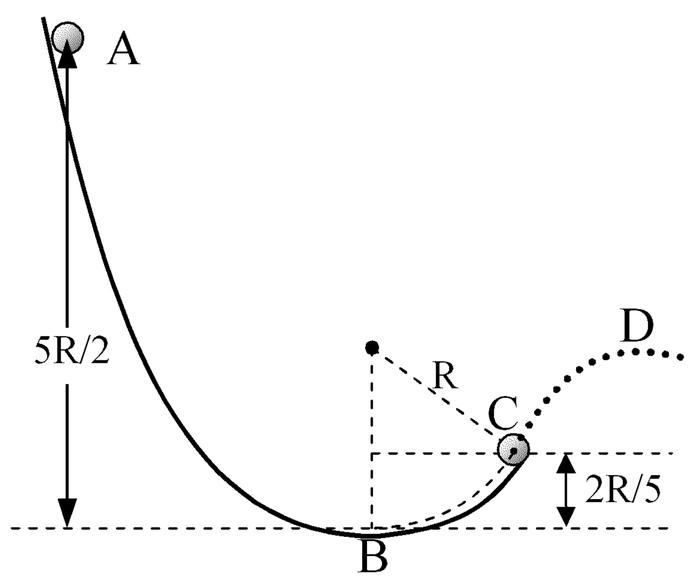
※家庭作業

1.質量 m 的鋼球由 A 點靜止釋放，沿光滑的軌道面下滑，經最低點 B 後以圓軌道(半徑 R)由 C 點射出作斜拋，在斜拋過程中，離地面最高點為 D，則：

(1)於 B 時，軌道面施於鋼球之正向力？

(2)離開 C 點後，離地面最高點 D 的高度？

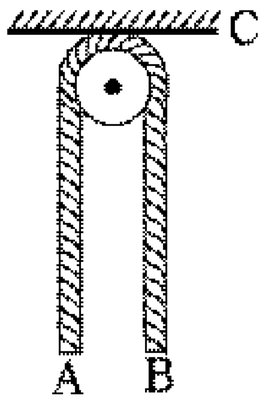
答：(1)6mg；(2)218R / 125



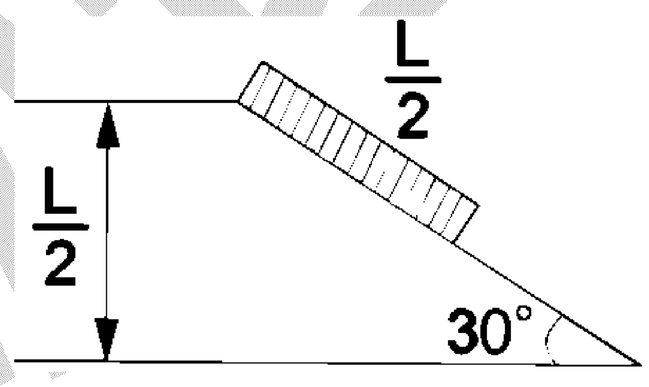
2.不考慮空氣阻力，某物在水平地面上以初動能 K，作拋射仰角 60° 的斜拋，當物體的運動方向與水平成 30° 時之動能為若干？答：$\dfrac{1}{3}K$

3.斜向拋射時，物體在最大高度時的速度大小是在最大高度一半時之 $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$，則物體拋射角若干？答：60°

例17. 質量 m、長為 L 之均勻長繩 AB，將其跨過光滑釘子之兩端，使其左右兩端之繩等長，今將繩之 A 端拉下少許，則繩開始下滑，求繩恰離開釘子時之速度為何？答：$\sqrt{\dfrac{gL}{2}}$

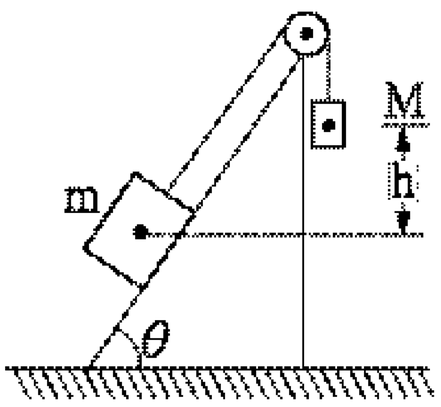


例18. 斜角 30° 之光滑斜面長 L，置一長 $\dfrac{L}{2}$ 之繩子，沿斜面下滑，則至繩之 $\dfrac{1}{2}$ 離開斜面而抵光滑水平面時的瞬時速度量值為何？答：$\dfrac{\sqrt{11gL}}{4}$



例19. 如圖所示，在斜角為 θ 的光滑斜面上放質量為 m 的物體，用繩子通過定滑輪懸掛質量為 M 的另一物體，M 和 m 的高度差為 h，則 M 從靜止落至 m 原來高度時速度為_____。

答：$\sqrt{\dfrac{M-m\sin\theta}{M+m}2gh}$



吳錫玠物理

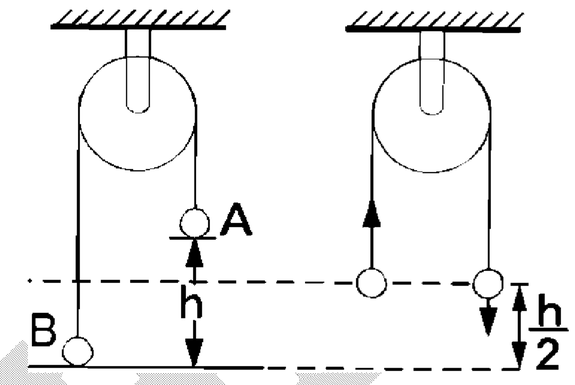
※家庭作業

1.質量爲 2m 及 m 之 A、B 二球各繫於一輕繩之兩端，此繩跨過一無摩擦之滑輪，如圖所示。設 A 球距地面 h 高而 B 靜止於地面。A 球釋放後：

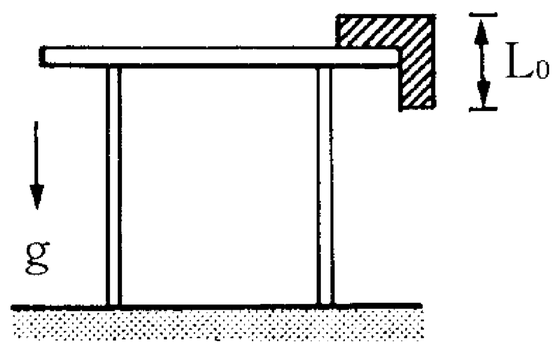
(1)當 A、B 二球同高時，二球之速率各爲何？答：

(2)若此時，繩忽然斷去，則兩球著地時之速率各爲何？

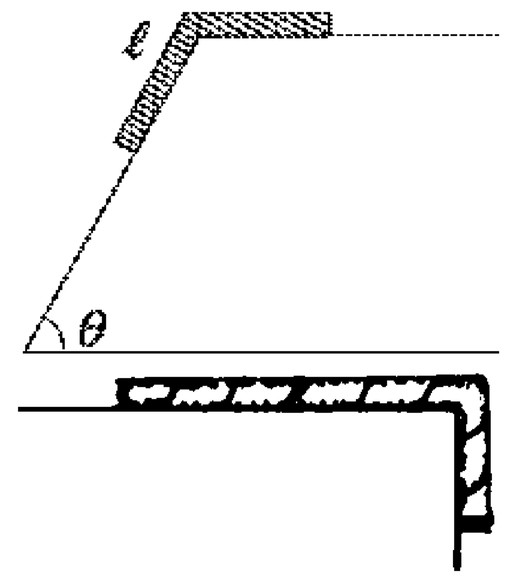
答：(1)均爲 $\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$ ；(2)均爲 $2\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$



2.將總長度 L，有質量，不伸長之繩置於水平光滑桌面上。以手按住，使長度 L_0 的一段下垂，如圖。鬆手使繩滑下，則繩完全通過桌緣的瞬間，其速率爲何？【67 夜大】答：$\sqrt{\dfrac{g(L^2-L_o^2)}{L}}$



3.圖中一均勻光滑繩子長 2ℓ 由靜止釋放，則末端恰離上方平面時之速度爲何？答：$\sqrt{\dfrac{3g\ell\sin\theta}{2}}$



4.將長 l 之繩置於光滑桌面上，今將之引出少許放手，則繩完全離開桌面時之速度若干？答：$\sqrt{gl}$

5.長 ℓ 米之均質繩索置於光滑桌面之邊緣，有 $\dfrac{1}{3}\ell$ 長之繩下垂，當釋放時，則繩離開桌面時之速率爲何？答：$\dfrac{2}{3}\sqrt{2g\ell}$

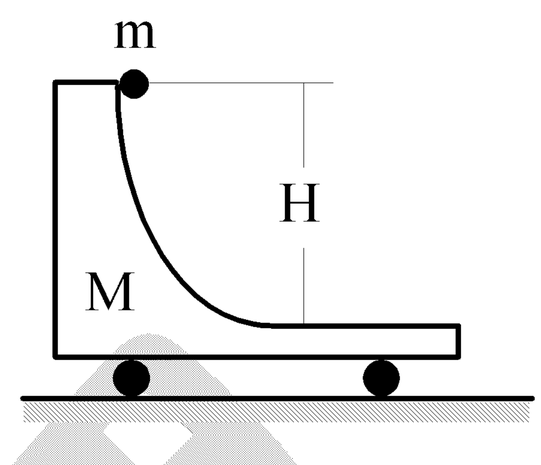
6.老師：「小新，請用『左右爲難』來造句」

小新：「我考試時左右爲難」

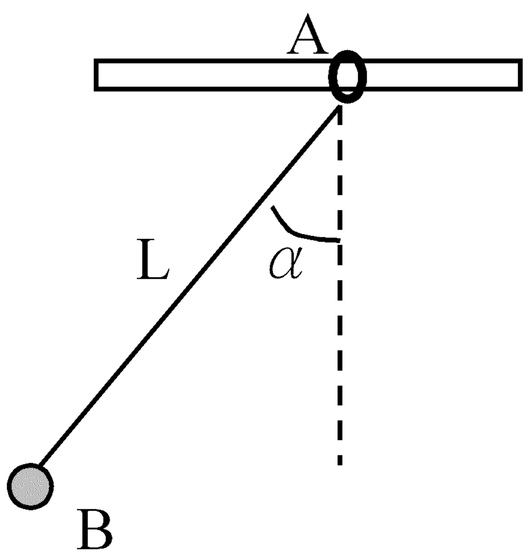
老師：「是題目不會答，讓你左右爲難？」

小新：「不，是左右同學答案不一樣，讓我左右爲難」

例20. 如右圖所示，在水平面上有一滑車，質量爲 M，滑車上有一弧形軌道，高度爲 H，軌道底端成水平。有一質量爲 m 的物體，從軌道頂端沿著軌道自由下滑。設摩擦力均不計，則當物體 m 滑離軌道底端之瞬間，滑車的速度量值爲？【80 日大】答：$\sqrt{\dfrac{2m^2gH}{M(M+m)}}$

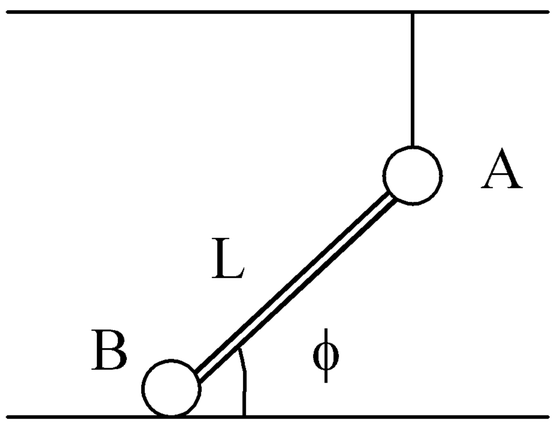


例21. 如圖，一根長爲 L 的細繩，上端與一小圓環相連，環套在光滑的固定水平桿上(環可自由活動)，繩下端繫有一個小球 B。A 和 B 的質量均爲 m，細繩的質量忽略不計。開始時細繩與鉛直方向的夾角爲 α(α 不一定很小)，然後放手任其自由擺動，試求出細繩與鉛直方向夾角爲 β 時，B 球速度的水平分量。【92 校內複賽】答：$\sqrt{\dfrac{Lg(\cos\beta-\cos\alpha)}{1+2\tan^2\beta}}$



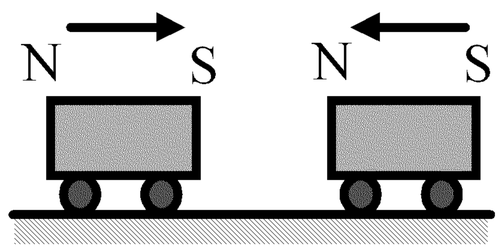
吳錫玠物理

例22. 如圖所示，兩個完全相同的小鋼球 A 和 B 以一質量很輕的均勻金屬桿連接在一起，兩球間的距離為 L，球的半徑可忽略。起先 A 球以一細線懸吊在空中，B 球則靜止停在一光滑的水平桌面上，這時連桿與水平面之間的夾角為 ϕ。現將懸線以火燒斷，當金屬桿的中心墜落至桌面時(即桿身平貼在桌面上時)，(1)B 球共移動了多少距離？(2)這時 B 球的速率？(3)A 球的速率？【1999 奧林匹亞初選】答：(1) $\frac{L(1-\cos\phi)}{2}$ ；(2) 0 ；(3) $\sqrt{2gL\sin\phi}$



※家庭作業

1.在同一水平線上運動的 A、B 二滑車，各載有一根固定不動的強力磁鐵棒，此二磁鐵棒的南北極指向恰好相反，但皆與滑車運動之直線方向平行(如右圖)。今令兩車自遠距離互相滑近，結果二者接近至某一程度尚未接觸即互相推離。設摩擦力可以忽略，則在運動過程中，下列敘述何者為正確？(A)此系統之動量和保持不變 (B)此系統之動能和保持不變 (C)此系統之總能量保持不變 (D)此系統之重力位能保持不變 (E)兩車距離越小時，它們之間的位能越大。【71 日大】答：(A)(C)(D)(E)

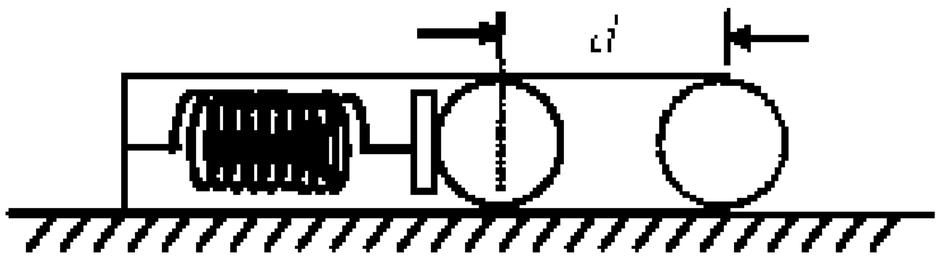


2.如圖所示的裝置中，木塊 B 與水平桌面間的接觸是光滑的，子彈 A 沿水平方向射入木塊後留在木塊內，將彈簧壓縮到最短。現將子彈、木塊和彈簧合在一起作為研究物件(系統)，則此系統在從子彈開始射入木塊到彈簧壓縮至最短的整個過程中

(A)動量守恒、機械能守恒　(B)動量不守恒、機械能不守恒

(C)動量守恒、機械能不守恒 (D)動量不守恒、機械能守恒【1992 大陸高考】答：(B)

3.一圓筒位在水平桌面上，力常數為 k 的彈簧之一端固定在圓筒的一個端面上、另一端頂著一顆小彈珠，如右圖所示。當彈簧既不被壓縮或伸長時，彈珠的中心剛好位在圓筒的開口端。小明緩緩施水平力於彈珠，使彈簧被壓縮一段距離 d 後放開，使彈珠由靜止被彈出。設圓筒與彈珠的質量分別為 M 及 m，且所有摩擦力、彈簧質量及頂著彈珠的平板質量均可不計。



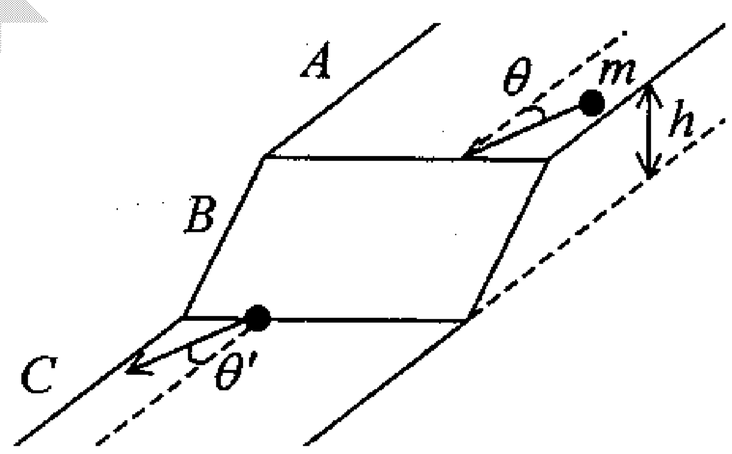
(1)若圓筒固定，則當彈珠位在圓筒開口端時，其相對於桌面的速率為何？

(2)若圓筒可以自由滑動，則當彈珠位在圓筒開口端時，其相對於桌面的速率為何？

(3) 若圓筒可以自由滑動，且圓筒的質心位在圓筒的一半長度處。試問在彈珠由靜止彈出到被彈回開口端的時距內，圓筒總共滑行了多少距離？【94 指考】

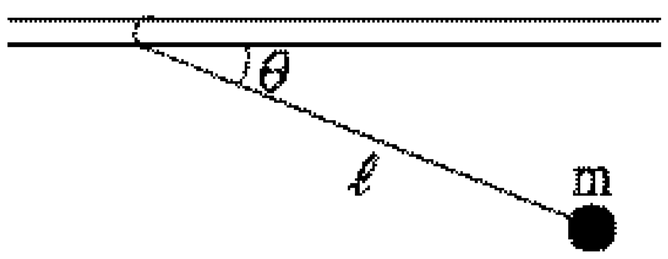
答：(1) $v=d\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ；(2) $v=d\sqrt{\dfrac{Mk}{m(M+m)}}$ ；(3) $\dfrac{m}{M+m}d$

4.如圖所示，一質量為 m 的小物體在水平面 A 上，以速度 v，入射角 θ，經斜面 B 滑落至另一水平面 C。A 和 C 兩水平面之間的鉛直落差為 h。假設此 A、B、C 三個平面皆光滑，則當小物體在 C 面上滑行時，偏離法線的角度 θ'=？【1995 奧林匹亞初選】

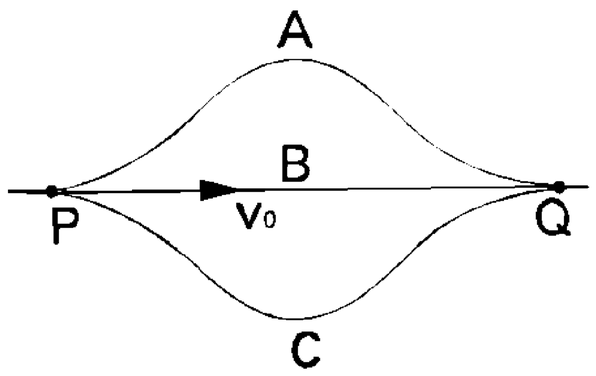


答：$sin^{-1}(\dfrac{v\sin\theta}{\sqrt{v^2+2gh}})$

5.長為 ℓ 的輕繩，一端用輕環套在水平光滑的橫桿上（輕繩與輕環的質量都忽略不計），另一端連接一質量為 m 的小球。開始時，二手將繫球的繩子繃緊並轉到與橫桿平行位置，然後輕輕放手。當繩子與橫桿成 θ 角時（如圖），(1)小球速度在水平方向的分量大小？(2)鉛直方向的分量大小？答：(1)0；(2) $\sqrt{2g\ell\sin\theta}$

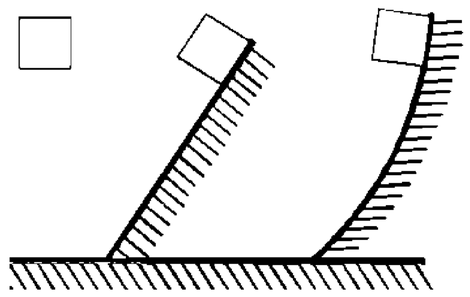


例23. 如圖，在同一鉛直面內有下列三條無摩擦軌道：A 為凸出曲線形，B 為水平直線形，C 為凹入曲線形，各軌道兩端點均為 P 和 Q。設一小鋼球，進入 P 點時速度方向呈水平，量值為 v_o，則下列敘述中何者正確？ (A)不論經過何軌道，鋼球均可到達 Q 端 (B)不論經過何軌道，到達 Q 端時，鋼球速率仍為 v_o (C)鋼球 A 軌道上的速率，始終不比 v_o 大 (D)球在 C 軌道上的速率，始終不比 v_o 小。【77 夜大】答：(B)(C)(D)



※家庭作業

1.如圖所示，各物體在離地面等高處同時釋放，初速皆為零，然後分別以鉛直落下，或沿光滑的斜面，或沿光滑的弧形軌道滑下等不同方式到達地面，則下列敘述何者正確？ (A)各物體在抵地面之瞬間，其有相同的速率 (B)質量愈大的物體在抵達地面之瞬間，其有較大的速率 (C)各物體同時抵達地面 (D)鉛直落下的物體先抵達地面。答：(A)(D)



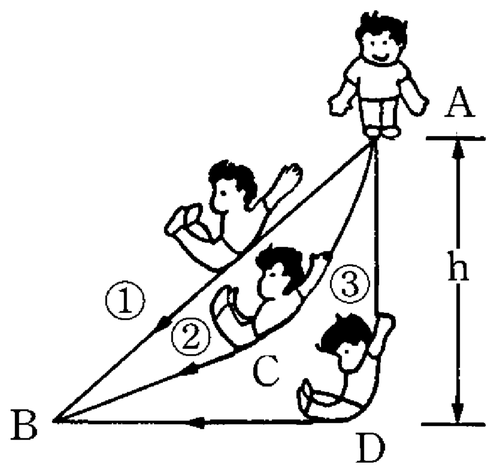
2.某人站在高台上 A 點（如附圖所示），分別從三個不同的斜面滑下，設斜面之摩擦力可忽略，試回答下列問題：

(1)此人滑至 B 點時，則沿那一面滑下時，重力所作的功最多？

(2)沿哪一個斜面滑至 B 點之動能最大？

(3)到達 B 點之速度，以沿哪一個斜面滑下者為最快？

答：(1)相同；(2)相同；(3)相同



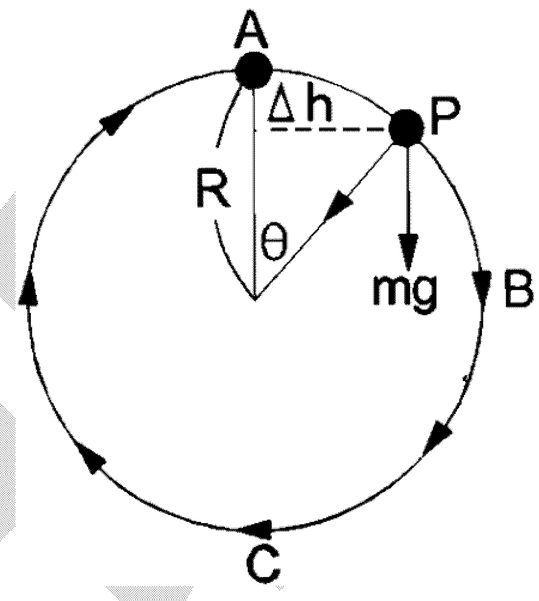
3.物體由靜止出發從光滑斜面頂滑下，當所用時間是下滑到底的時間的一半時，物體的動能與位能之比為何？（以底端為零位點） (A)1：4 (B)1：3 (C)1：2 (D)1：1 (E)無法確定。答：(B)

觀念四　鉛直圓周運動

※鉛直面圓周運動(變速率圓周運動)

1. 解題方程式：

$$\begin{cases} E\text{守} \Rightarrow \text{求}v \\ F = ma \Rightarrow \text{求力} \end{cases}$$



(1)E 守 $\Rightarrow$ 求 v：力學能守恆 $\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh_P$

(2) $F = ma$

切線：$F_t = ma_t = mg\sin\theta$ 切線力會改變速度大小

法線：$F_n = ma_n = T + mg\cos\theta = m\cdot\frac{v^2}{R}$ 法線力會改變速度方向。

2. 條件：當質點脫離圓周瞬間，軌道對質點之正向力為 0

3. 說明：

(1)鉛直面圓周運動是一種變速率圓周運動

(2)鉛直面圓周運動是力學能守衡的應用

(3)單擺可視為鉛直圓周運動的一部份

(4)質點完成完整的鉛直圓周運動之臨界速率(不需背誦)

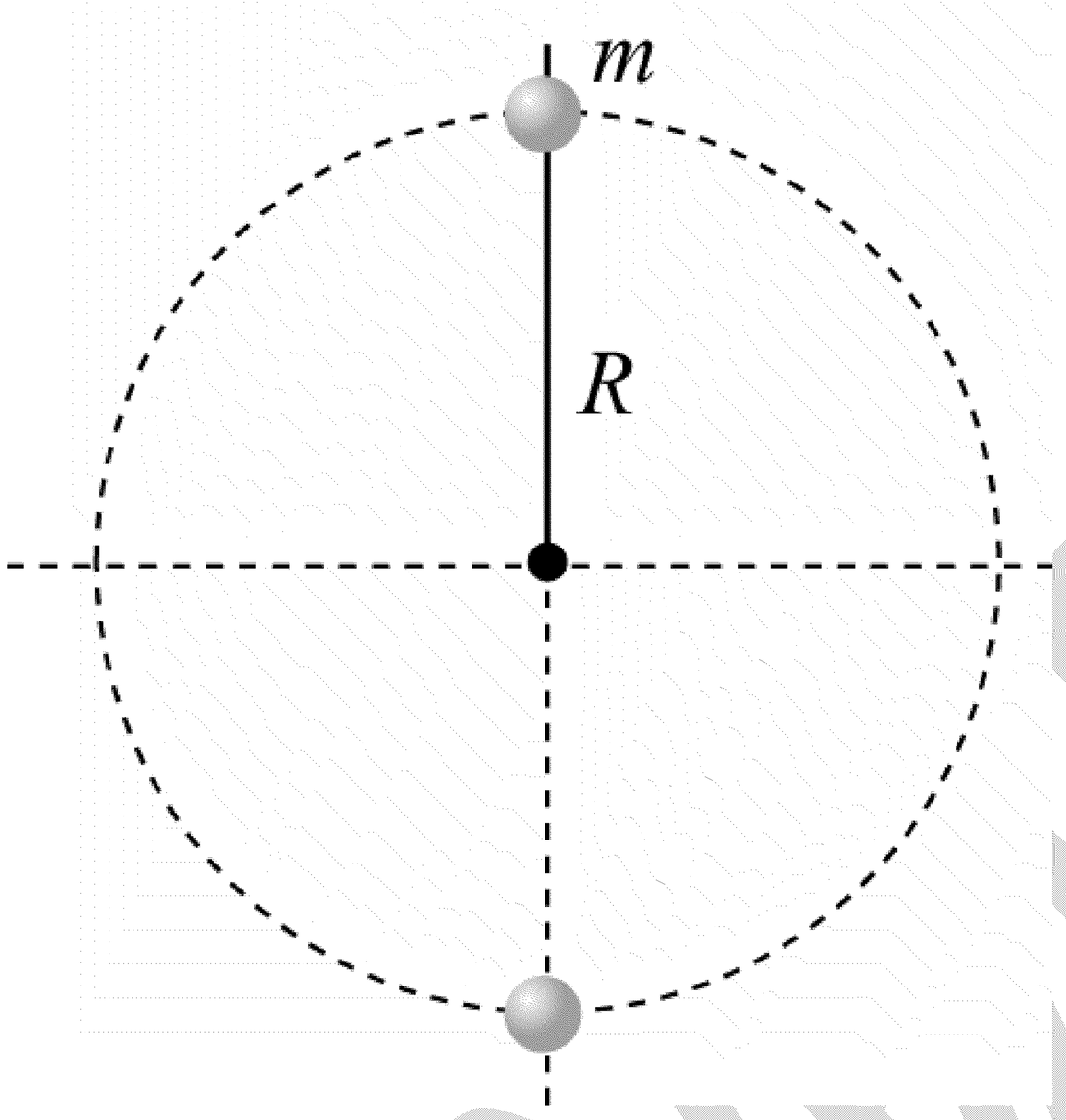
一質點在鉛直面上作圓周運動時，若速度過慢，可能會脫離圓周而落下，

若質點能夠完成一個完整的鉛直圓周運動，其在各位置的最小速度為

位置	最低速率	切線加速度	法線加速度	張力
最高點	$\sqrt{gR}$	0	g	0
中點	$\sqrt{3gR}$	g	3g	3mg
最低點	$\sqrt{5gR}$	0	5g	6mg

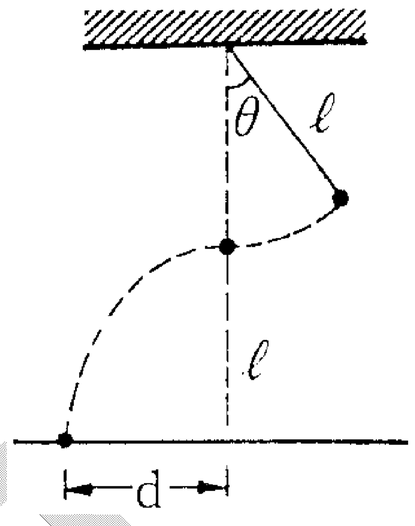
吳錫玠物理

4.鉛直圓周運動各位置之力&加速

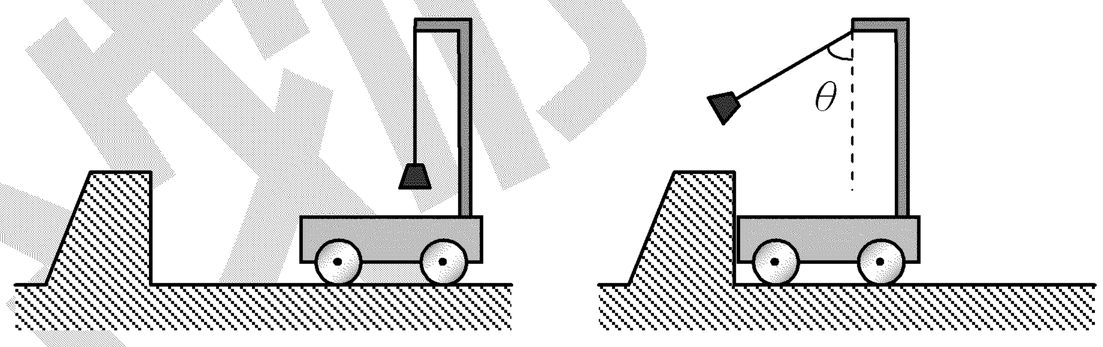


吳銘坤小棧

例24. 一如右圖之單擺，擺長為 ℓ，靜止時小球離地面之高度亦為 ℓ。如擺線拉直與鉛垂線成 θ 角，將小球放開使其自由擺動，當小球擺動至最低點時將擺線切斷，則小球落地點與懸掛點之水平距離 d 為何？【69 日大】答：$2\ell\sqrt{1-\cos\theta}$



例25. 一重物 W 由一設計的補給車以長為 $\ell = 5$ 公尺的繩索支撐著。此車與重物以等速 v_0 運動。此車由於碰撞而停止，其上之重物因此而擺動，如圖所示，若繩子擺動一角度 $\theta = 60^{O}$，則車的速度為 (A)3 (B)5 (C)7 (D)9 (E)11 m/s。答：(C)



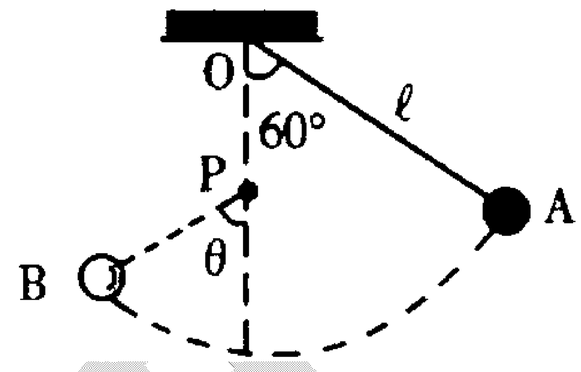
(a) (b)

例26. 單擺的擺錘質量為 M，擺長為 L，將擺錘向右拉 θ 角後，釋放任其擺動，若角度 θ 甚小且擺動時振幅為 X，則最大動能為： (A) $MgL\sin^2\frac{\theta}{2}$ (B) $MgX\tan\theta$ (C) $\frac{1}{2}MgL\theta^2$ (D) $\frac{MgX^2}{2L}$ (E) $\frac{2MgX^2}{L}$。答：(C)(D)

吳錫玠物理

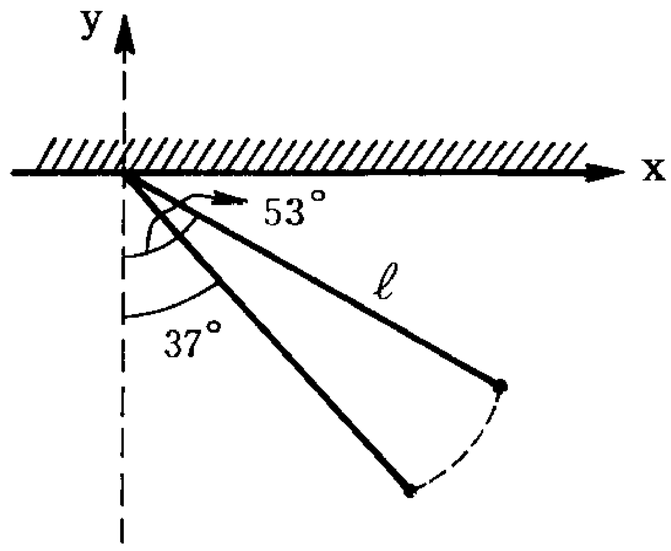
※家庭作業

1.右圖一單擺長l，如圖，由靜止釋放，在 P 處釘一鐵釘，則繩擺出之角度θ，當θ=60°時，球之速率爲若干？(OP=$\frac{2}{3}l$)



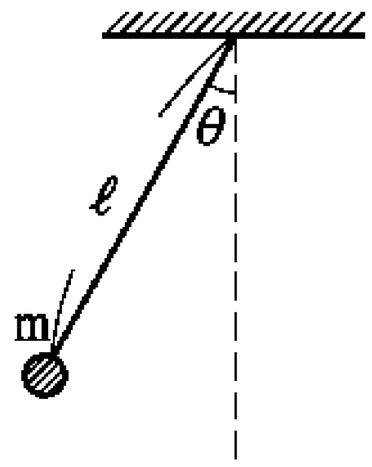
答：$\sqrt{\frac{2gl}{3}}$

2.有一細線長ℓ，一端固定於天花板上，另一端繫一質量 m 的小鋼珠，將此鋼珠置於與鉛垂線成 53°的位置後突然鬆手，如圖所示。當擺線與鉛垂線成 37°時，此細線斷裂且鋼珠沿路徑切線方向飛出。若以向右爲正 x 軸，向上爲正 y 軸，則此時鋼珠的速度爲何？【79 三專】

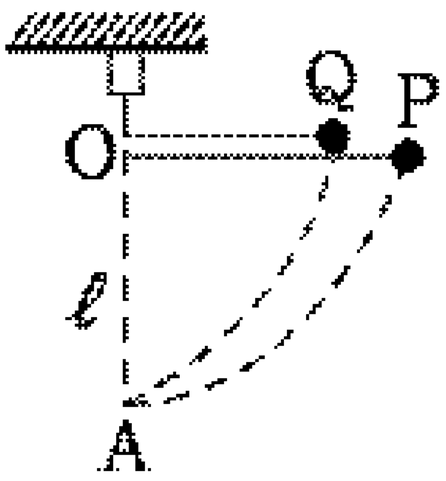


答：$(-\sqrt{\frac{32}{125}g\ell},-\sqrt{\frac{18}{125}g\ell})$

3.單擺的擺錘質量爲 m，擺長爲 L，將擺錘向右拉θ角後，釋放任其擺動，則擺到最低點時：(A)速率爲 $\sqrt{2gL(\cos\theta-1)}$ (B)速率爲 $\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$ (C)切線加速度爲 0 (D)法線加度爲 0 (E)動能爲 mgL(1-cosθ)。【71 夜大】答：(B)(C)(E)



4.如圖所示，質量相同的 P、Q 兩球，P 球繫在一長爲ℓ且伸長的細線一端，Q 球繫在一長爲 2ℓ/3 的橡皮筋一端，細線和橡皮筋的另一端固定在一點 O，今用手將兩球保持在水平位置，並使橡皮筋的長度恰好等於原長，然後將兩球由靜止釋放，若兩球在最低點 A 發生正向碰撞，則 (A)兩球的力學能在碰撞前都守恆 (B)在最低點 A，兩球碰撞前的速度相等 (C)承(B)，P 球的速度大於 Q 球的速度 (D)兩球在下落到最低點的過程中，重力對兩球作的功相等 (E)承(D)，重力 Q 球作的功較大。答：(A)(C)(D)

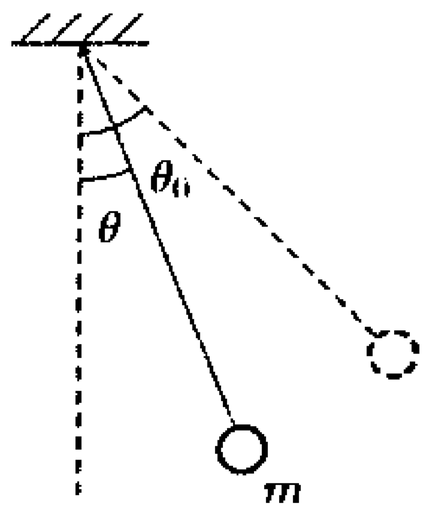


5.一擺長爲 0.5 公尺，擺錘質量 1 公斤的單擺，擺繩質量不計，若擺錘從擺角爲 60° 處靜止擺下，則當擺角爲 30° 時的動能？答：1.8J

例27. 一單擺長度爲 L 質量爲 m，若此單擺被拉至幅角 θ₀ 後由靜止狀態被釋放，則在擺錘擺至最低點時，(1)擺錘在鉛直方向加速度之量值？(2)當擺錘擺至最高點時，擺錘在鉛直方向加速度之量值？【1994 奧林匹亞初選】

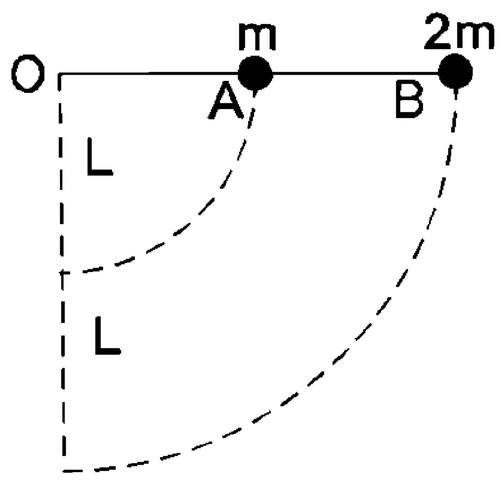
答：(1) $2g(1-\cos\theta_o)$ ；(2) $g\sin^2\theta_o$

例28. 有一單擺在鉛垂面上擺動，擺錘的質量爲 m，最大擺角爲 θ_o。此單擺在任一時刻的擺角以 θ 表示，如圖所示，若空氣阻力可不計，則下列有關此單擺的敘述，哪些正確？



(A)擺錘的切線速度隨 θ 的增加而減小
(B)擺錘的向心加速度隨 θ 的增加而增大
(C)擺錘在最低點時，擺繩的張力最小
(D)擺錘在最高點時，擺繩的張力爲 $mg\cos\theta_o$
(E)此單擺作簡諧運動，與 θ_o 是否小角度無關。【92 指考】答：(A)(D)

例29. 質量各爲 m 和 2m 的 A、B 兩質點，以輕棒連接，OA=AB=L，輕棒由水平位置靜止釋放，繞 O 點自由旋轉到鉛直位置瞬間，試求：(1)質點 A 的速率若干？(2)AB 段輕棒張力？

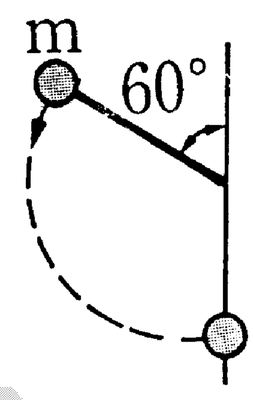


答：(1) $\dfrac{\sqrt{10gL}}{3}$ ；(2) $\dfrac{58mg}{9}$

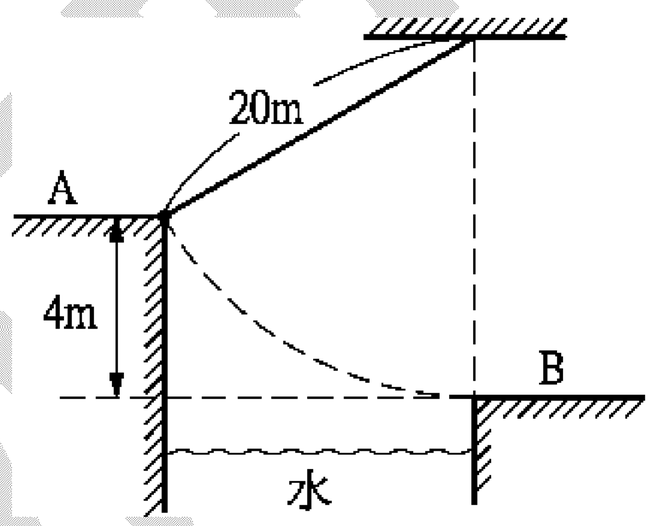
吳錫玠

※家庭作業

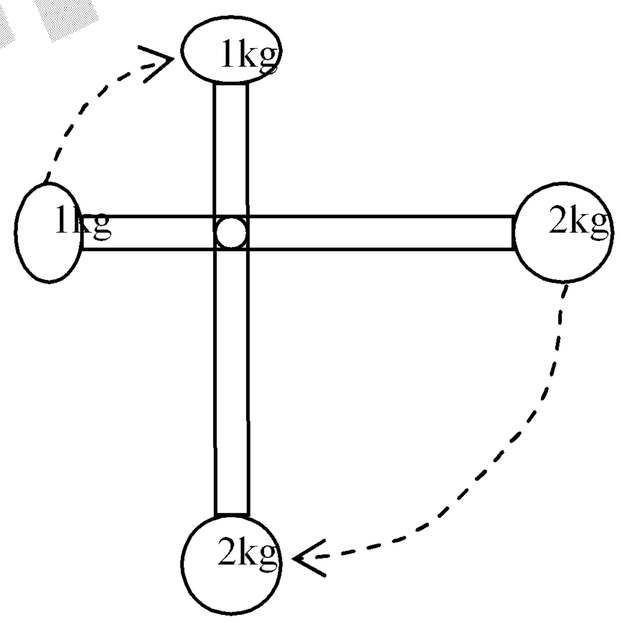
1.一質量為 m 之質點附在一質量可略去之長桿一端。該長桿能以其另一端為軸在一垂直面上無摩擦地自由旋轉。若長桿最初靜止於與鉛垂線成 60° 角之位置(如右圖)，則放下後質點落到最低點時長桿之張力為 (A)lmg (B)2mg (C)3mg (D)4mg (E)5mg。【71 日大】答：(D)



2.在「百戰百勝」的節目中，有一個擺盪的裝置，A、B 兩平台的鉛直高度差為 4 公尺，如圖所示，軌跡的最低點恰好在 B 平台上，今參賽者抓住 20 公尺長的擺繩末端擺下，若繩子所能承受的最大張力為 T，則參賽者的最大質量應為若干？才不至於落水。答：$\dfrac{5T}{7g}$

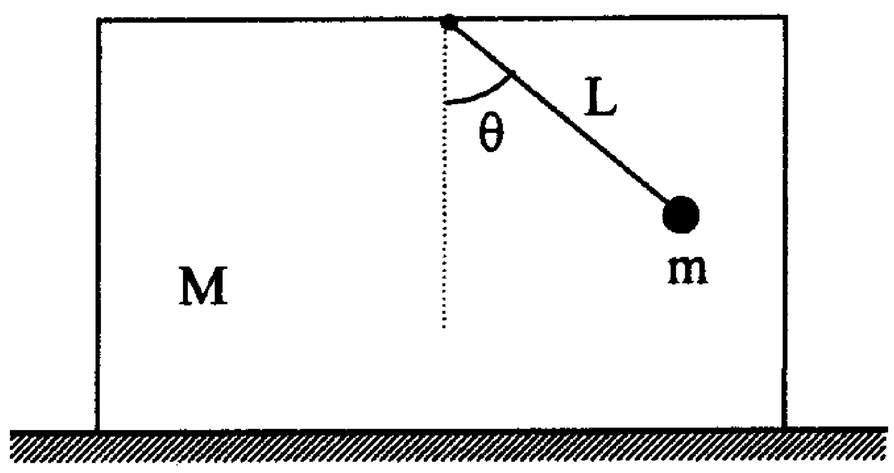


3.一米尺在其兩端各有一質量為 2kg 與 1kg 之物體，米尺之質量可忽略，並在距 1kg 的物體 1/3 公尺處以水平軸支之，今將尺由水平靜止釋放，當尺擺動至垂直位置時，求每一物體之速率？答：2.96m/s；1.48m/s

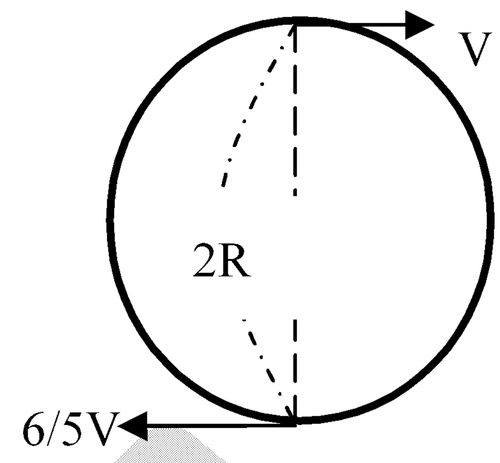


4. 輕棒 $\overline{AB}$ 可繞定點 O 在鉛直面內自由轉動，其兩端均連結有質量相等的小球，$\overline{OA}=2\overline{OB}=49$ cm，最初棒水平靜止，釋放後當棒轉到鉛直位置時，A、B 端兩小球的瞬時速率各為 v_A=？v_B=？答：v_A=1.96m/s；v_B=0.98m/s

5.如圖所示，一質量為 m 的小物體，以質量可忽略、長度為 L 的細繩，懸吊於質量為 M 的空箱頂部，此箱底部和水平地板之間有摩擦力。最初施力於物體和空箱，使細繩張緊，繩與鉛垂線之間的夾角 θ 為 90°，且物體與空箱均保持靜止。當施力除去後，小物體開始擺動。若空箱在 θ＝60° 時開始滑動，則此時繩上的張力為何？(設重力加速度為 g)【2004 奧林匹亞初選】答：$\dfrac{3}{2}mg$



例30. 一光滑圓軌道半徑為 R，軌道平面與水平面垂直。一質點受重力及軌道正向力的作用，在軌道上運動時，其最大速率是最小速率的 $\frac{6}{5}$ 倍。設重力加速度為 g，則此質點的最小速率？【80 日大】答：$\sqrt{\frac{100gR}{11}}$



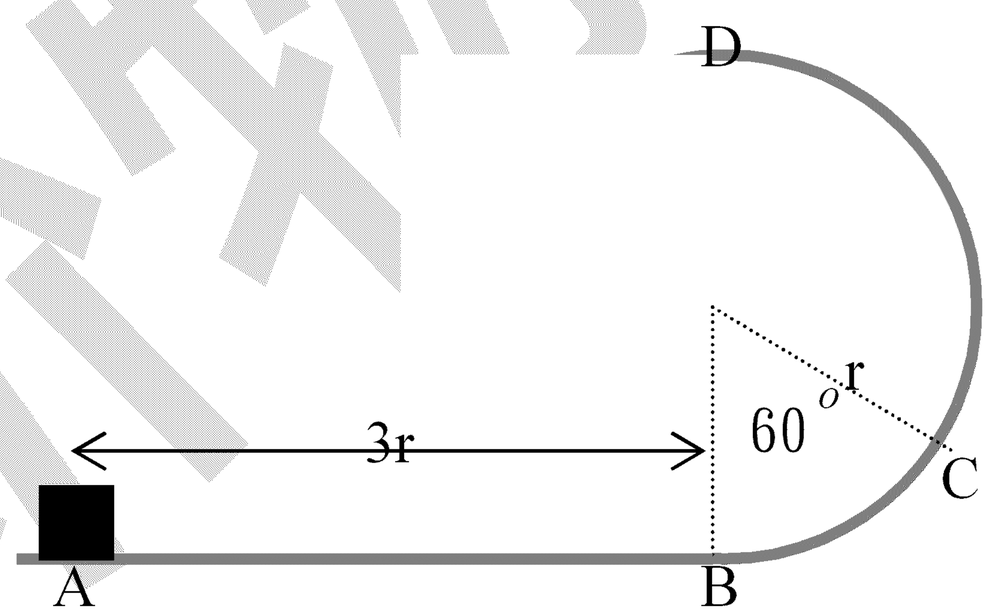
例31. 右圖所示，設平面 AB 與曲面 BCD 均光滑，欲使自 A 發射的小物體經 B、C、D 各點後落回 A 點，若是 AB 長為 3r，圓半徑為 r，則

(1)由 D 射出的速度應為若干？其落點才剛好回到 A 處。

(2)於 A 點發射小物體時，其速度大小應為若干？

(3)承(2)於 C 點位置時，物體所受正向力大小為何？

(4)若物體自 A 發射時速率為 $\sqrt{3gr}$，則物體將於何高度脫離圓軌道？

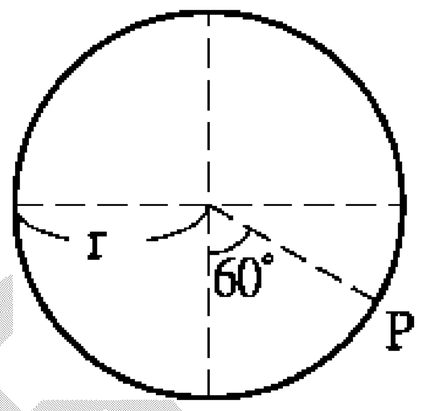


答：(1) $\frac{3}{2}\sqrt{gr}$；(2) $\frac{5}{2}\sqrt{gr}$；(3) $\frac{23}{4}mg$；(4) $\frac{4}{3}r$

吳錫玠物理

※家庭作業

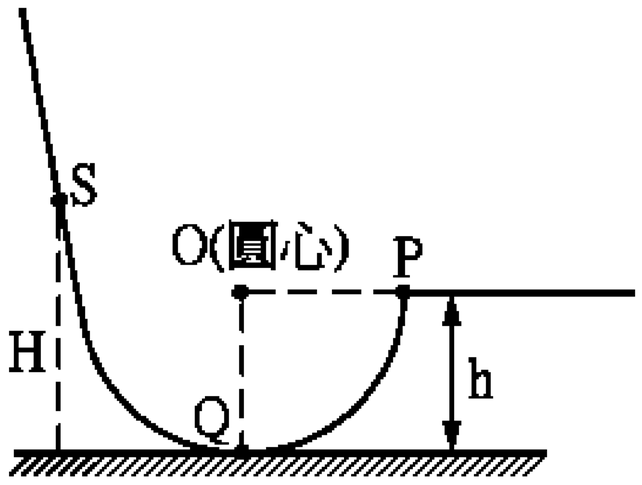
1.在光滑鉛直面上作圓周運動的物體，如圖。若物體在最高點的速率為 $\sqrt{2gr}$ (r 為圓半徑)則在圖中 p 的速率為若干？(g 為重力加速度)



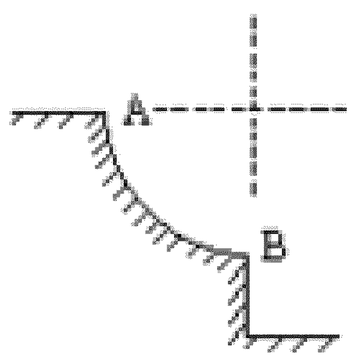
(A) $\sqrt{4gr}$ (B) $\sqrt{5gr}$ (C) $\sqrt{3gr}$ (D) $\sqrt{6gr}$ 。答：(B)

2.一質量為 m 之質點沿一軌道滑下並進入軌道之圓形部分，如圖所示，設圓形軌道部分之半徑為 R，所有的摩擦均可略去，質點的起始高度為 R，則在質點到達 A 點之瞬間，軌道對質點之作用力？【1995 奧林匹亞初選】答：$\frac{3mg}{2}$

3.有一光滑軌道，其底端是一個半圓形，如圖所示，小鋼珠由 S 點釋放，沿軌道下滑，則下列敘述何者正確？ (A)若小鋼珠恰能到達 P 點，則 H＝h (B)若小鋼珠到達 P 點的動能為 mgh，則 H＝2h (C)若小鋼珠到達最低點 Q 點時，所受的軌道正向力是小鋼珠重量的 6 倍，則 H＝2h (D)下滑時，軌道正向力對小鋼珠作正功 (E)上滑時，軌道正向力對小鋼珠作負功。答：(A)(B)



4.圖中圓弧軌道 AB 是在豎直平面內的 1/4 圓周，在 B 點，軌道的切線是水平的，一質點自 A 點從靜止開始下滑，不計滑塊與軌道間的摩擦和空氣阻力，則(1)在質點剛要到達 B 點時的加速度大小？(2)剛滑過 B 點時的加速度大小？【1992 大陸高考】答：(1)2g；(2)g



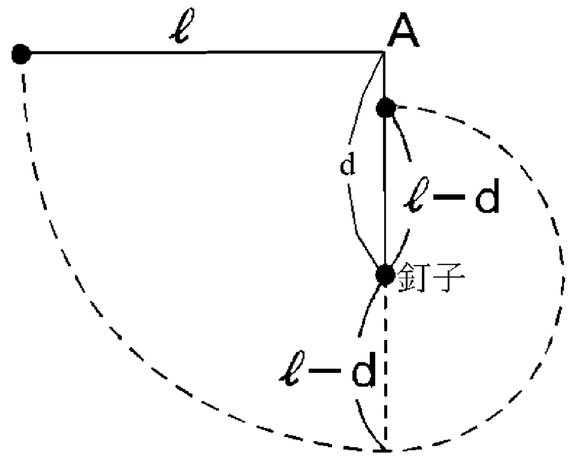
5.有一天... 雞和兔子還有熊一起到公園玩! 他們在玩的遊戲要取名子...

兔子: 我要叫小兔兔

熊 ： 我要叫小熊熊

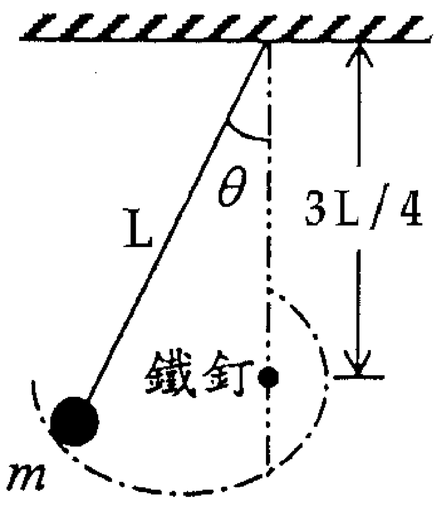
雞 ：....我不想玩了!

例32. 如右圖所示，為一釘子位於懸點正下方 d 距離處；若將繩拉直，使擺球與 A 等高再放手，欲使以釘為中心擺一整週，則 d 與 L 之比應為何？【88 日大改】答：3：5

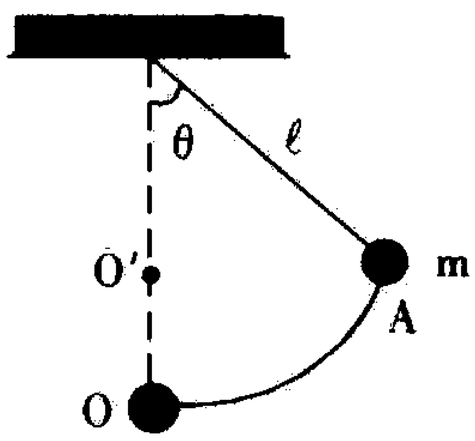


※家庭作業

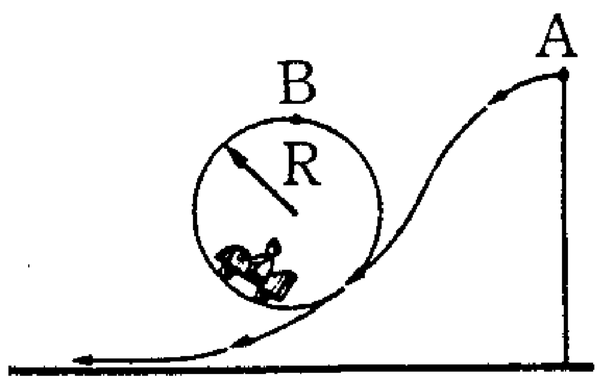
1.一單擺的擺錘質量為 m，擺繩之長為 L，在懸吊點的下方 3/4L 之處，有一鐵釘阻擋擺動如下圖所示。(1)如果擺錘起始角位置 $\theta=90^0$，則擺錘到達鐵釘正上方時的擺繩張力？(2)若欲使擺錘到達鐵釘正上方時，擺繩張力恰為零，則擺錘的起始角度 $\theta=$？【1996 奧林匹亞初選】答：(1) $3mg$ ；(2) $\cos^{-1}\frac{3}{8}$



2.如右圖，一單擺自 A 自由放手，O 為最低點，在 O 上方釘一釘子，使 m 恰能繞 O'做鉛垂面圓週運動之最大高度 OO' 為若干？答：$\frac{2\ell}{5}(1-\cos\theta)$



3.某人由 A 乘坐無動力的小滑車循軌道滑下去，希望能夠緊貼著如右圖的軌道完成圓圈內的打轉而不脫離。假定摩擦可以忽略，圓圈的半徑為 R，則 A 點至少要比 B 點高出多少才行？【69 日大】答：$\frac{R}{2}$



4.在重力加速度為 g 之重力場內，有一內徑為 r 之直立圓形光滑軌道，一小球沿其內緣運動，欲使球至最高點時不致下墜，則在最低點時之速率最小應為何？【64 夜大】

答：$\sqrt{5gR}$

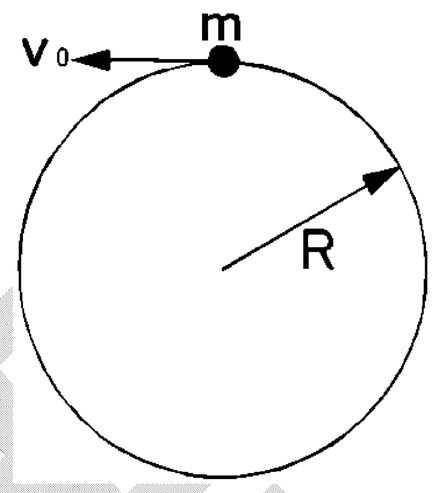
例33. 在強度爲 g 的均勻重力場中，以質量可不計之細線，綁著質量爲 m 的小石塊，於斜角 30°的光滑斜面上作半徑 R 之整圈圓周運動。則下列敘述中，正確的有那些？(A)小石之向心加速度的方向雖然隨時在變，但其量值不變 (B)小石塊在最低點時的動能，比在最高點的動能多 2mgR (C)小石塊在最高點時之速率，不小於 $\sqrt{\frac{gR}{2}}$ (D)小石塊在最高點時，線上的張力比最低點時之值少 3mg 。【81.夜大】答：(C)(D)

例34. 一內壁光滑的環形細圓管，位於豎直平面內，環的半徑爲 R(比細管的半徑大得多). 在圓管中有兩個直徑與細管內徑相同的小球(可視爲質點)。A 球的質量爲 m_1，B 球的質量爲 m_2。它們沿環形圓管順時針運動，經過最低點時的速度都爲 v_o。設 A 球運動到最低點時，B 球恰好運動到最高點，若要此時兩球作用于圓管的合力爲零，那麼 m_1、m_2、R 與 v_o 應滿足的關係式？【1997 大陸高考】

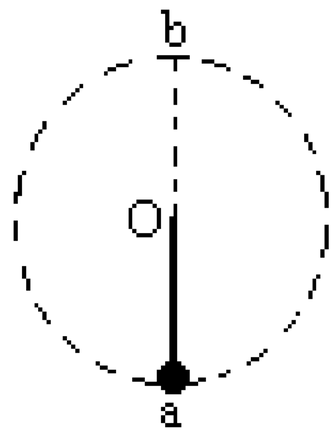
答：$(m_1 - m_2)\frac{v_o^2}{R} + (m_1 + 5m_2)g = 0$

※家庭作業

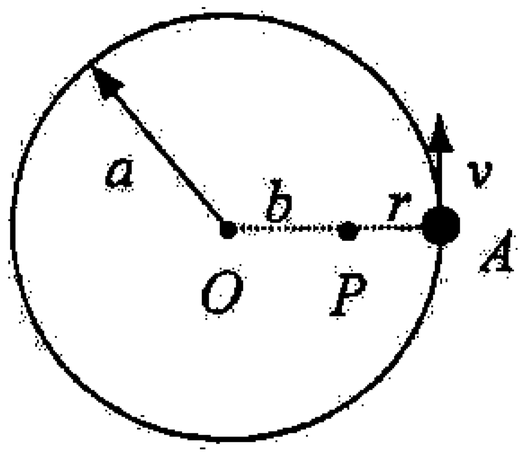
1.一質量為 m 的質點，在一無摩擦，半徑為 R 的鉛直圓形軌道上運動，如圖所示。已知在最高點的速率為 $v_o=\sqrt{\dfrac{4gR}{5}}$，(g 為重力加速度)，則下列敘述何者為正確？ (A)此質點之最大速率為 $\sqrt{6}v_o$ (B)在最高點處，軌道對質點作用力的量值為 $\dfrac{4mg}{5}$ (C)在任一直徑的兩端點上，質點動能之和不變 (D)此圓週運動之週期大於 $\dfrac{2\pi R}{v_o}$ (E)在運動過程中，質點對圓心之角動量守恆。【84 日大】答：(A)(C)



2.如圖，細杆的一端與一小球相連，可繞過 O 點的水平軸自由轉動．現給小球一初速度，使它做圓周運動，圖中 a、b 分別表示小球軌道的最低點和最高點，則杆對球的作用力可能是
(A)a 處為拉力，b 處為拉力 (B)a 處為拉力，b 處為推力
(C)a 處為推力，b 處為拉力 (D)a 處為推力，b 處為推力
【1999 大陸高考】答：(A)(B)



＊3.如圖所示，一質點可在一半徑為 a 的水平光滑圓形凹槽上運動。此質點受一吸引力場的作用，其大小為 k/r^2，方向皆指向 P 點，式中 k 為常數，r 為該質點到 P 點的的距離。P 點為圓面上的一個定點，其距圓心 O 的距離為 b(b<a)此質點從圓上最靠近 P 點處(即 A 點)被以切線速度 v 射出，若欲使此質點作完整的圓週運動，則 v 必須大於或等於多少？(以 k，a，b，表示之)。【1998 奧林匹亞初選】答：$\sqrt{\dfrac{4kb}{a^2-b^2}}$

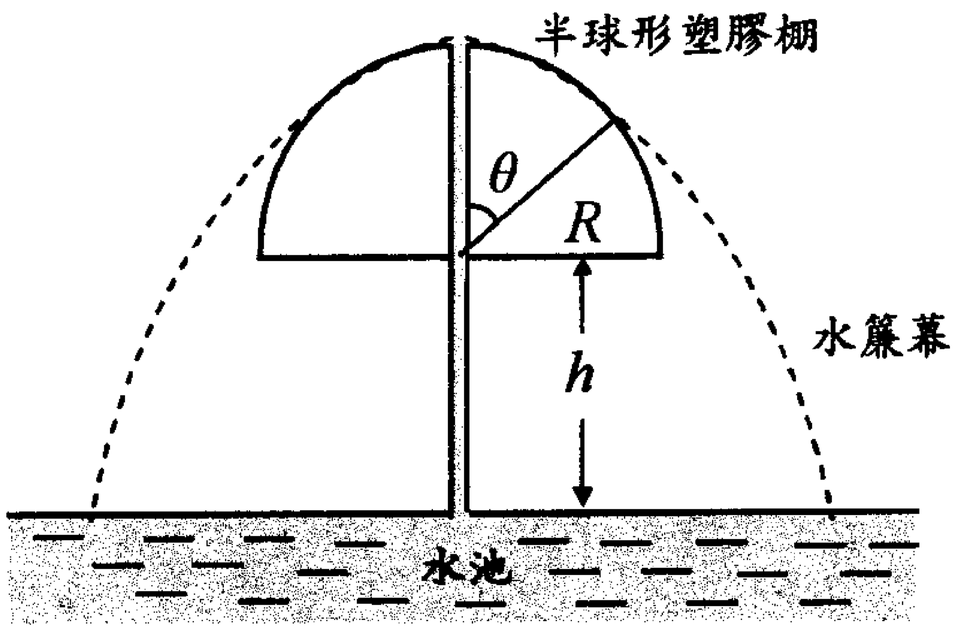


4.情人節，丫榮到便利商店買保險套，老闆以一股狐疑的眼光看著他...
丫榮急忙解釋：「那是買給女友的生日禮物。」
老闆隨即好心的問：「呵，那要不要包起來？」
丫榮說：「不用了啦，那就是要用來包禮物的。」
老闆：「 .....」

例35. 設一質點自一光滑之圓球面頂由靜止滑下，則此質點離開球面時，質點圓心連線與鉛直線之夾角爲 (A)大於 45°,小於 60°(B)與重力加速度有關 (C)與球面之半徑有關 (D)與質點之質量無關 (E)與質點之位能與動能之和無關。【64 日大】
答：(A)(D)(E)

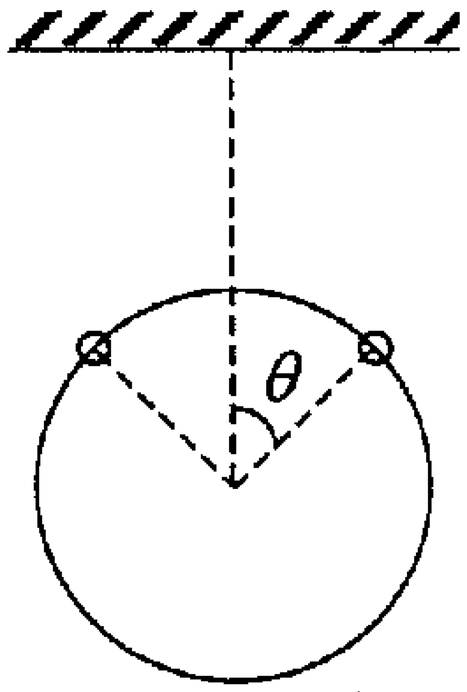
※家庭作業

1.如圖所示的公園造景，水池中鉛直豎立一水管，上方的管口位於一半徑 R＝1.35m、表面光滑的半球形塑膠棚的頂點，半球形塑膠棚的下方平面距池面的高度 h＝2.10m。當水從管中向上流，自管口湧出後，會沿著圓弧面向下滑，流到水池中，形成類似傘面的水簾幕。假設水與塑膠圓弧面之間的摩擦力可忽略，且水自圓弧面頂點向下流的初速爲零，則水在 θ＝？處脫離圓弧面，水簾幕在池面上形成的圓半徑爲？(設 g＝10 m/s^2) 【2004 奧林匹亞初選】答：$\cos^{-1}\frac{2}{3}$；2.18 公尺



＊2.如下圖，一質量爲 m_1 的大圓環，用細繩沿鉛垂面懸掛，環上套有兩個質量均爲 m_2 的小圓環。假設大小圓環各由不同的材料製成且大小環間無摩擦。今將兩小圓環從大圓環的頂端自靜止釋放(一左一右自由滑落)，問當小圓環掉落至何種角度 θ 時，大圓環才有可能開始向上運動？又 m_1 及 m_2 須滿足什麼關係，才可能使大圓環向上運動？【1996 奧林匹亞初選】答：條件爲 $m_2 > \frac{3}{2}m_1$，

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}(1+\sqrt{1-\frac{3m_1}{2m_2}})\right)$，在 $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 之間



觀念五　S.H.M.

※水平簡諧運動

1. 力學能守衡

(1)在光滑水平面上作簡諧運動的物體，因非保守力作功為 0，僅受彈力作功影響。

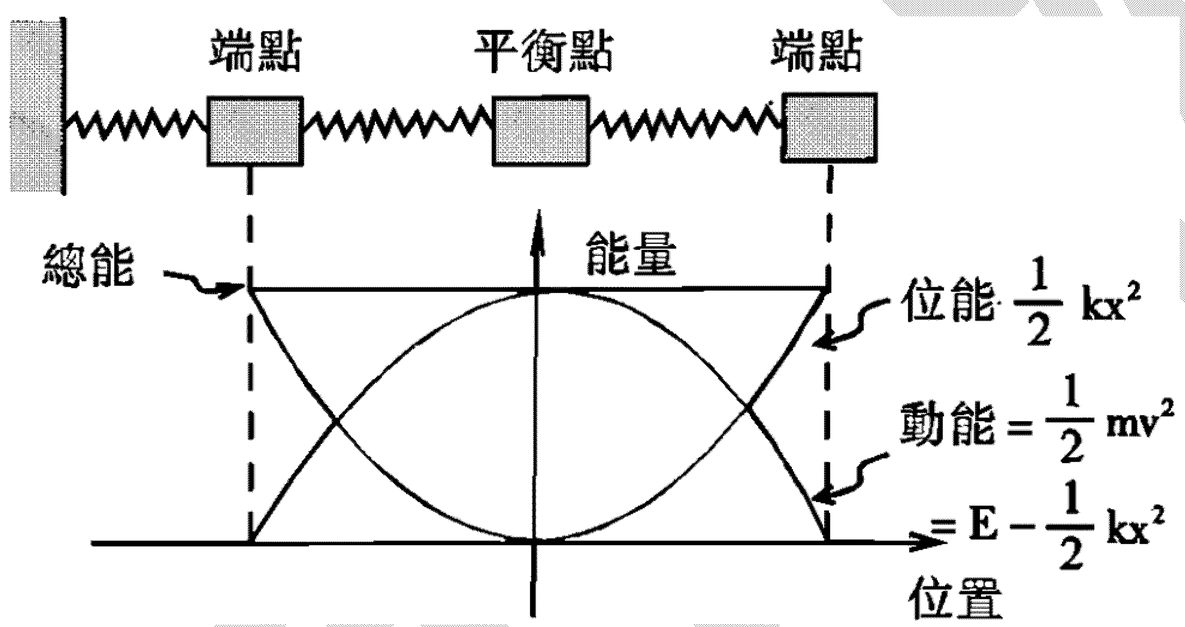
因為彈力為保守力，所以力學能守恆，故物體隨著彈簧作簡諧運動時其動能與位能有如下關係：

總力學能＝端點的(動能+位能)＝任意點的(動能+位能)=平衡點的(動能+位能)

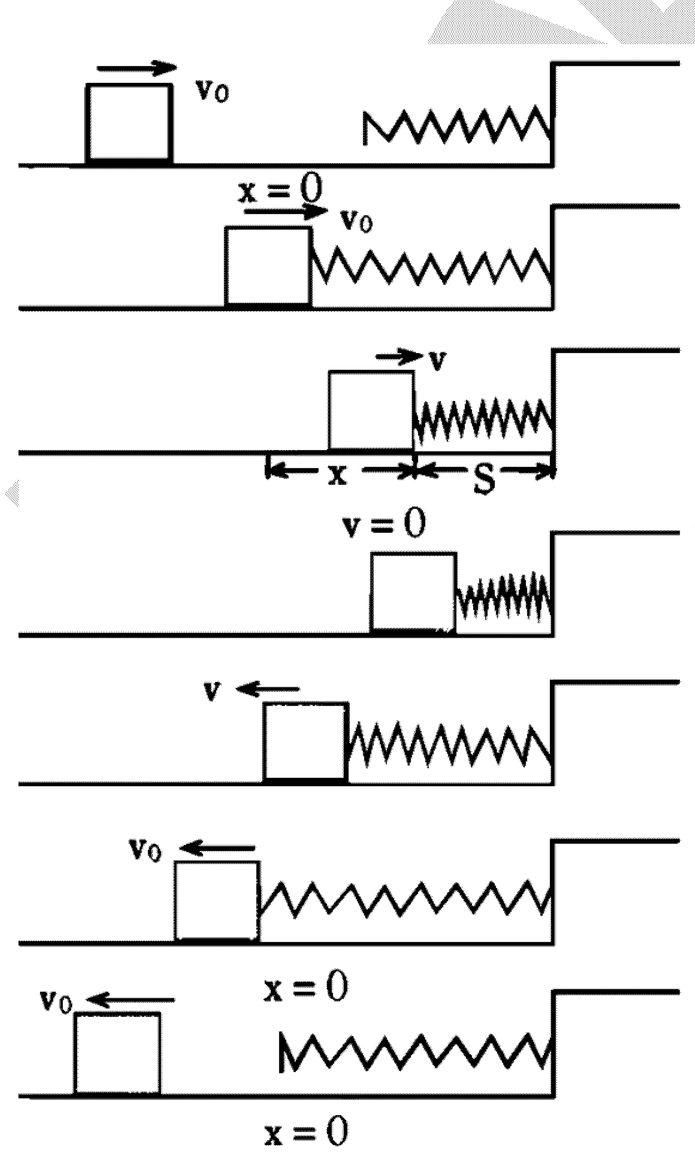
$$E = 0 + \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0$$

(彈力常數 k，振幅 R ，物體質量 m，在任意點 x 的速率 v ，在平衡點的速率 $v_{\max}$)

(2)函數關係圖：如下圖所示



(3)物體撞擊彈簧



一質量 m 以 v_0 之速率向一彈簧緩衝器接近。(第一圖)

開始壓縮彈簧。(第二圖)

當彈簧被壓縮 x 距離，長度變爲 S 時，物體之速率減至 v，所失去之動能即爲存貯在彈簧中之位能(第三圖)

在最大壓縮量之點。物體靜止，所有動能均變爲位能(第四圖)

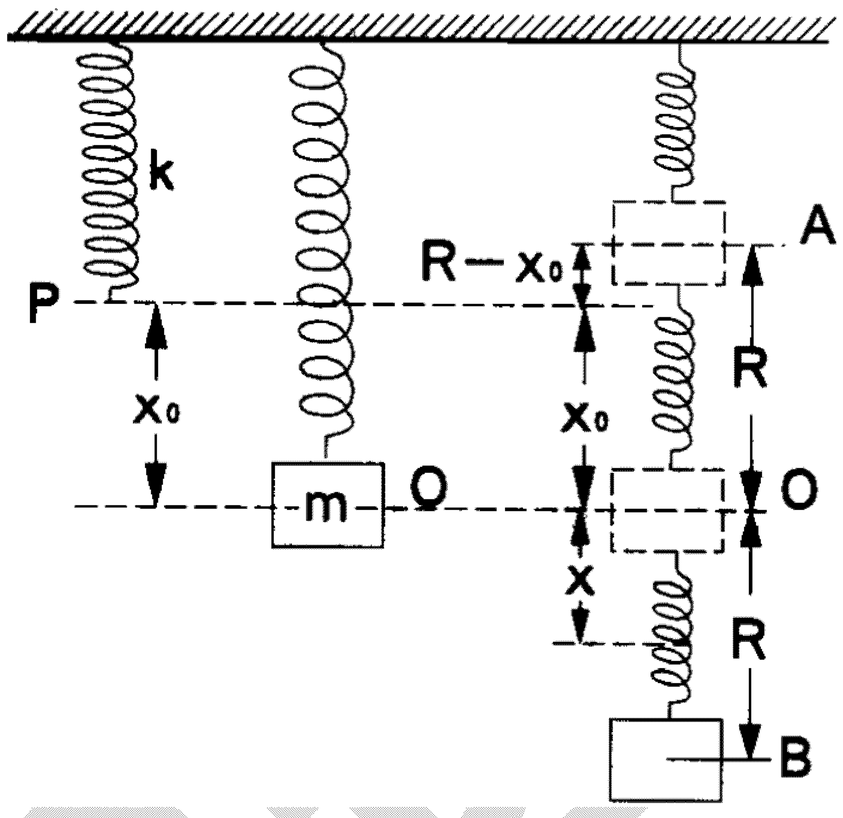
彈簧繼續對物施力，物體速率漸增，動能逐漸恢復。(第五圖)

物體返回原接觸點，物體速率仍爲 v_0，動能亦恢復原值。(第六圖)

物體以原速率 v_0 及原有動能離開彈簧繼續運動。(第七圖)

※鉛直簡諧運動

一、物體在鉛直方向的運動是一種簡諧運動



(1)平衡點：為物體懸吊在彈簧下端靜止時的位置。物體靜止，表示物體所受的地心引力與彈簧的恢復力大小相等方向相反。$mg = kx_o \Rightarrow x_o = \dfrac{mg}{k}$

(2)恢復力：將彈簧由平衡點再下拉 x，此時合力之

$$\begin{cases} \text{方向} \Rightarrow \text{向上} \Rightarrow \text{朝向平衡點} \\ \text{大小} = \text{彈力} - \text{重量} = k(x_o + x) - mg = kx \propto x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 以平衡點為中心的鉛直簡諧運動

二、力學能守恆：

在鉛直面上作簡諧運動的物體，因僅受重力&彈力作功影響(皆為保守力)。所以力學能守恆，

(1)力學能 $= E_{k1} + U_{S1} + U_{g1} = E_{k2} + U_{S2} + U_{g2} =$ 定值

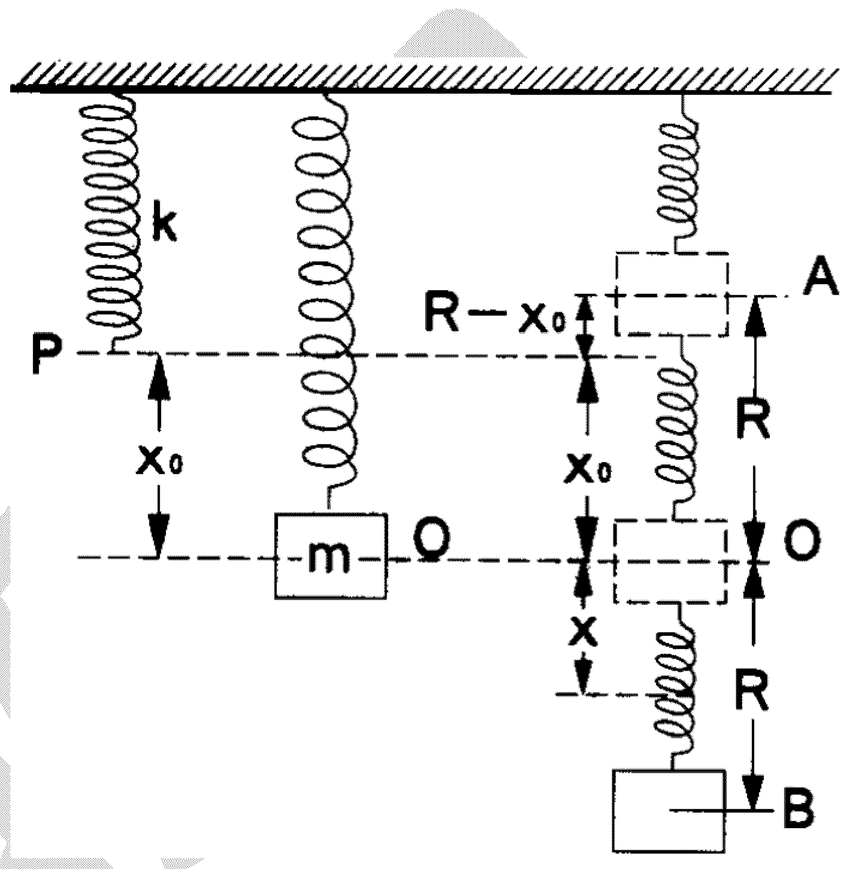
(2)當物體在彈簧下端作簡諧運動時，若選擇平衡點 0 的重力位能為零，則其力學能可以下表表示

	重力位能 U_g	彈力位能 U_s	動能 E_k	力學能 $U_g + U_s + E_k$
平衡點	**0**	$\frac{1}{2}kx_o^2$	$\frac{1}{2}mv_o^2$	$0 + \frac{1}{2}kx_o^2 + \frac{1}{2}mv_o^2$
任意點	$-mgx$	$\frac{1}{2}k(x_o + x)^2$	$\frac{1}{2}mv^2$	$-mgx + \frac{1}{2}k(x_o + x)^2 + \frac{1}{2}mv^2$
端點(最低點 **B**)	$-mgR$	$\frac{1}{2}k(x_o + R)^2$	**0**	$-mgR + \frac{1}{2}k(x_o + R)^2 + 0$

三、等效彈力位能

1. 因鉛直簡諧運動需同時考慮動能、彈力位能、重力位能，計算較為繁雜。為簡化計算，我們可選擇適當之零位面，將(彈力位能+重力位能)合併為等效彈力位能

$$總力學能=\begin{cases}動能+(彈彈力位能+重力位能)\\ \quad 動能+等效彈力位能\end{cases}$$



2. 若取平衡點為重力位能U_g之零位面，則

力學能 $E=E_k+U_S+U_g$

$$=E_k+\frac{1}{2}k(x_o+x)^2+mg(-x)$$

［如右圖平衡點下 x 處］

$$=E_k+\frac{1}{2}kx_o^2+kx_ox+\frac{1}{2}kx^2+mg(-x)$$

因平衡時 $mg=kx_o$，故 kx_ox 與 $mg(-x)$ 可以互相抵消

力學能 $E=E_k+\frac{1}{2}kx_o^2+\frac{1}{2}kx^2$

3. 說明：

(1)可設適當之零位面(令原長下方 $\frac{x_o}{2}$ 處為重力位能之零位面)，將 $\frac{1}{2}kx_o^2$ 項消去，則

力學能可寫為 $E=E_k+\frac{1}{2}kx^2$

(2)零位面不同 $\Rightarrow\begin{cases}原始彈力位能：以彈簧之原長爲零位面\\ \quad 等效彈力位能：以平衡點爲零位面\end{cases}$

4. 應用：

若選擇平衡點的重力位能為零，則鉛直彈簧的運算與水平彈簧類似，但式中的 x(形變量)是指自平衡點算起的位移，可以此力學能守恆的式子求出平衡點的速率、動能及任意點的速率與動能。

(1)平衡點的力學能＝任意點的力學能

$$0+\frac{1}{2}kx_o^2+\frac{1}{2}mv_o^2=-mgx+\frac{1}{2}k(x_o+x)^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}kx_o^2+\frac{1}{2}mv_o^2=-mgx+\frac{1}{2}kx_o^2+kx_ox+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}kx_o^2+\frac{1}{2}mv_o^2=-kx_ox+\frac{1}{2}kx_o^2+kx_ox+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2 \qquad (\because mg=kx_o)$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

與水平 S.H.M. 相同

(2)端點的力學能=任意點的力學能

$$-mgR+\frac{1}{2}k(x_o+R)^2+0=-mgx+\frac{1}{2}k(x_o+x)^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$-mgR+\frac{1}{2}kx_o^2+kx_oR+\frac{1}{2}kR^2=-mgx+\frac{1}{2}kx_o^2+kx_ox+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$-kx_oR+\frac{1}{2}kx_o^2+kx_oR+\frac{1}{2}kR^2=-kx_ox+\frac{1}{2}kx_o^2+kx_ox+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2 \ (\because mg=kx_o)$$

$$\frac{1}{2}kR^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

與水平 S.H.M. 相同

四、解題要訣

1. 鉛直簡諧運動是力學能的應用

總力學能＝端點的(動能+位能)＝任意點的(動能+位能)＝平衡點的(動能+位能)

2. 不管是水平簡諧運動還是鉛直簡諧運動，不要忘記”簡諧是圓周的投影”

3. 三點不漏

(1)原長(這不用解釋吧)

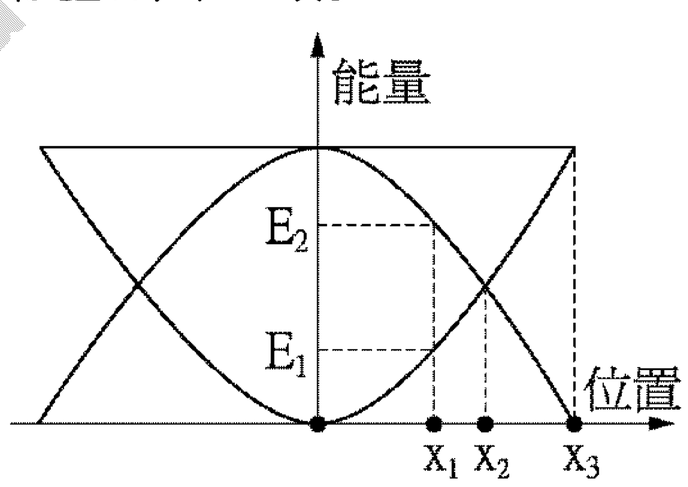
(2)平衡點：物體懸吊在彈簧下端靜止時的位置。此處 $mg=kx_o$

(3)端點：速度＝0的地方

岳翰物理

例36. 質量爲 1.0 kg 的物體，於一原長 15 cm，彈力常數 K = 100 nt/m 之彈簧一端，彈簧另一端固定，物體在光滑平面上作 S.H.M，當彈簧長度爲 10 cm 時，物體速度大小爲 0.30 m/s，則：(1)總力學能？ (2)振幅多少？ (3)最大速率？ (4)當彈簧長度 12.1cm 時，物體速率？答：(1)0.17J；(2)0.058m；(3)0.58m/s；(4)0.50m/s

例37. 物體在水平面上作 S.H.M，其能量對位置的函數關係如附圖所示，則



(1)圖中 $\frac{x_3}{x_2}$ 之值爲多少？

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

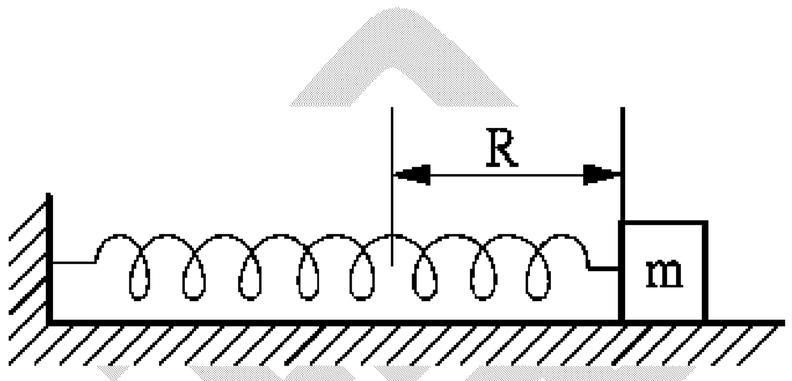
(2)若 $\frac{x_1}{x_3}=\frac{1}{2}$，則圖中 $\frac{E_2}{E_1}$ 之值爲多少？

(A)2 (B)3 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{5}{2}$ 。答：(1)(A)；；(2)(B)

吳錫玠物理

※家庭作業

1.一彈簧橫置於一水平光滑平面上，一端固定，另一端連結一木塊作簡諧運動。當木塊離平衡點的位移爲最大位移的 2/3 時，其動能爲最大動能的幾倍？【83 日大】答：$\frac{5}{9}$倍



2.一個輕質彈簧水平放置於光滑面上，一端繫以質量爲 m 的物體，今由自然長度的位置拉長 R 後釋放，如圖，則下列何者正確？ (A)釋放後物體作變加速度運動 (B)物體離開釋放處$\frac{3}{4}R$時的動能爲$\frac{7}{32}kR^2$ (C)當彈性位能等於物體動能時，物體離平衡點$\frac{\sqrt{2}}{2}R$ (D)承上題，此時的動能是最大動能的$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍 (E)物體的最大動能爲$\frac{1}{2}kR^2$ 。答：(A)(C)(E)

3.設彈簧在水平方向作 S.H.M.期間，最大動能爲 E，最大速率 v，最大加速率爲 a，最大恢復力的大小爲 f，則當位移大小爲振幅之$\frac{3}{5}$時，求：(1)動能與位能之比？ (2)力學能？ (3)速率？ (4)加速度大小？ (5)彈簧恢復力大小？

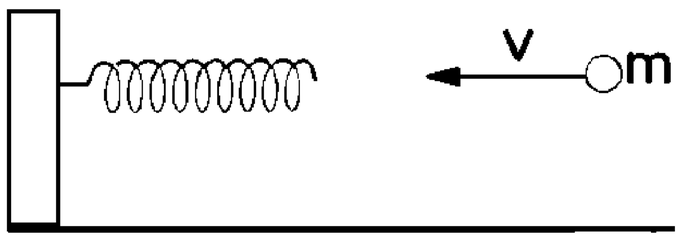
答：(1)16：9；(2)E；(3)$\frac{4}{5}v$；(4)$\frac{3}{5}a$；(5)$\frac{3}{5}f$

4.一個彈簧振子的質量爲 1kg，彈簧的力常數爲 $100\,N/m$，把振子由平衡點拉開 0.02 公尺，然後釋放，(1)這振子的振動週期？(2)最大加速度？(3)最大速度？(4)在最大位移的一半處的動能？答：(1)$\frac{\pi}{5}$秒；(2)$2\,m/s^2$；(3)$0.2\,m/s$；(4)0.015 焦耳

5.某一物體懸於一彈簧下端，可使其伸長 5 公分；現若將同一彈簧置於水平光滑之桌面上並壓縮 20 公分，且將同一物體置於其前時，則該物體離開彈簧時的速率爲若干？

答：$2.8\,m/s$

例38. 一條彈力常數爲 k 的彈簧平放在光滑平面上，一端固定在牆上。如有質量爲 m 的木塊以速率 v 撞向彈簧的另一端，求：(1)彈簧之最大壓縮量？(2)木塊與彈簧之接觸時間。【1997 奧林匹亞初還試題】【82 日大】答：(1) $v\sqrt{\frac{m}{k}}$ ；(2) $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

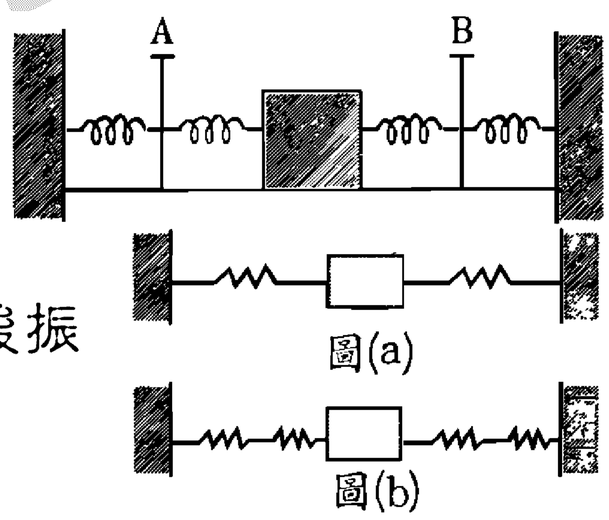


例39. 如右圖，物體質量 m，各彈簧之力常數爲 k，將物體右移後放手(A 與 B 爲釘子)，則

(1)其振動週期爲若干？

(2)若將 A、B 釘移去，則週期變爲若干？

(3)若在(a)情況下之振幅爲 d，則當物在平衡點時將釘拔去後振幅爲何？答：(1) $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ ；(2) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ；(3) $\sqrt{2}d$



吳錫玠物理

※家庭作業

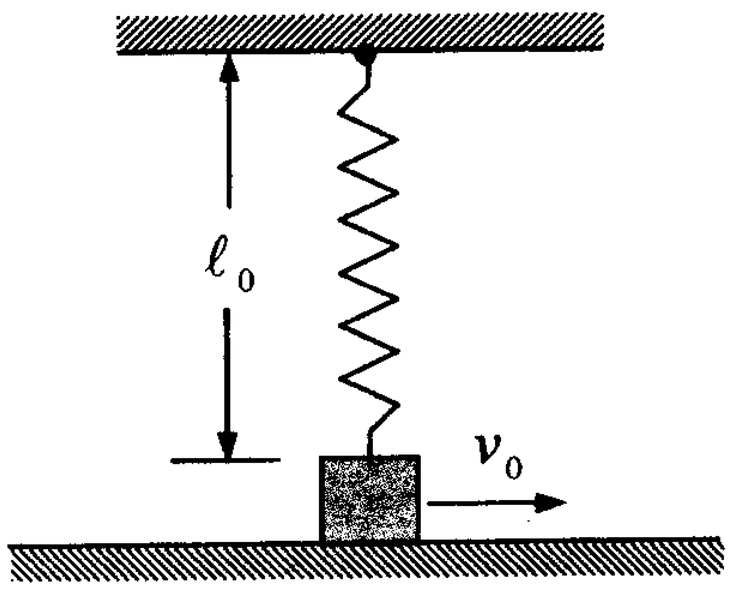
1.如施 50 牛頓的力於一彈簧可被拉長 25cm，今將此彈簧置於一光滑平面上，一端固定於一壁。有一質量 2 公斤的木塊，以 4 公尺/秒 速度沿彈簧軸線撞及彈簧的另一端：(1)試問可將彈簧最大壓縮若干長度？ (2)彈簧被壓縮 2.4×10^{-1} 公尺時，木塊的速度若干？ (3)木塊與彈簧作用時間？ (4)當動能與彈性位能相等時，木塊速率？

答：(1)0.4 m；(2)3.2m/s；(3)0.314 秒；(4) $2\sqrt{2}$ m/s

2.有一輕彈簧置於光滑水平桌面上，一端固定於牆壁，其力常數為 100N/m，有一質量為 1kg 的木塊以速率 4m/s 沿彈簧軸線方向撞擊彈簧的另一端，則彈簧的最大壓縮量？

答：0.4m

3.如右圖所示，一置放在光滑水平桌面上的木塊，質量為 m，以一自然長度為 ℓ_0，力常數為 k 的輕彈簧，沿鉛直方向固定在上方，此時彈簧的伸長量為零。若木塊的質量 $m<\dfrac{k\ell_0}{g}$，並以初速 v_o 向右沿水平方向射出，則欲使木塊衝離桌面，v_o 最小值為何？【2005 奧林匹亞初選】答：$\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\dfrac{mg\ell_o}{k\ell_o-mg}$



4.一天，一家小電影院放映一片子。

廣告文宣寫到：「七個男人和一個女人的故事，並有說明：『一美女莫名暈倒，遭七男人強行拖入森林.....』」

眾人都覺很有吸引力逐買票入場，等到電影放映時，大螢幕出現 《白雪公主》....

眾人氣急敗壞的走了。

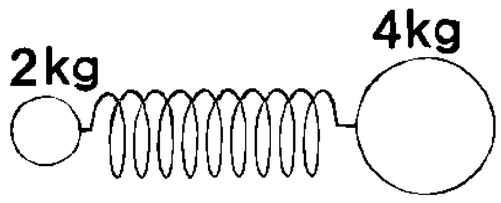
隔天眾人再次路過小電影院，見廣告有所變化。

廣告寫到：「七個男人和一個女人的故事並又有說明：『一如花美女與七男人的數天驚濤駭浪般的銷魂（註:絕非"白雪公主"）』」

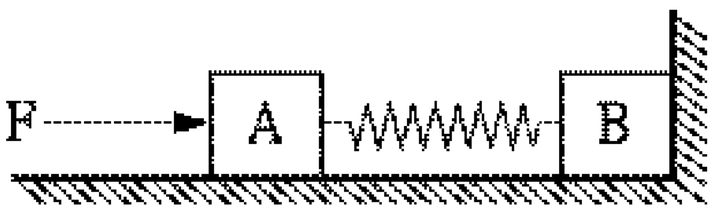
眾人這次覺得比上次更有吸引力，而且說明不是白雪公主，逐又買票入場。

結果大螢幕出現 《八仙過海》.....

例40. 一質量可略去，彈力常數為 2 牛頓/公尺之彈簧，其兩端各繫有一質點(如右下圖)，設 m_1=2 公斤，m_2=4 公斤，彈簧原長 1 公尺。今將此彈簧壓縮至 0.5 公尺之長度，並將此系統之質心置於原點後，放開二質點令其在無摩擦之水平面上振盪。試計算下列各種量：(1) m_1 與 m_2 之速率比。(2) m_1 離開平衡點之最大距離。(3) m_1 之最大速度 v_m。(4) m_1 之振盪週期 T。【73 日大】答：(1)2：1；(2) $\frac{1}{3}$ m；(3) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ m/s；(4) $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ s



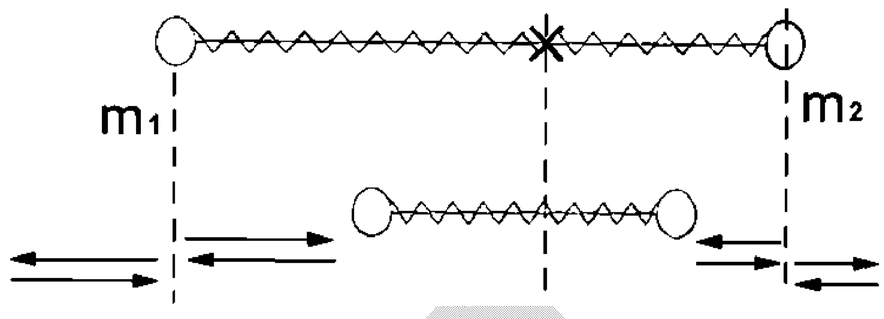
例41. 質量都是 1kg 的物體 A、B 中間用一根輕彈簧連接，放在光滑的水平地面上。現使 B 物體靠在牆上，用力推物體 A 壓縮彈簧如圖所示，在這過程中外力做功 8 焦耳，待系統靜止後突然撤去外力到彈簧恢復到原長的過程中，(1)牆對 B 物體的衝量的大小？(2)當 A、B 間距離最大時，B 物體的速度大小？答：(1)4 N-S；(2)2m/s



吳錫玠物理

※家庭作業

1.彈簧原長 1m，彈力常數 k=120N/m，兩端分別繫 m_1=2kg，m_2=3kg 的兩物體，平放在光滑平面上，壓縮 0.5m 後由靜止釋放，求作 S.H.M.:(1)週期？(2)此系統最大總動能？(3) m_1 的最大動能？(4) m_2 的振幅？答：(1) $\frac{\pi}{5}$ 秒；(2)15J；(3)9J；(4)0.2 公尺



2.如圖所示，質量分為 m_1 和 m_2 的兩個物體放在光滑的水平面上，在兩個物體間有一個被壓縮的輕質彈簧具有的彈力位能為 E。釋放彈簧後，m_1 和 m_2 在彈簧彈力作用下，自靜止開始向兩側運動，則 m_1 的最後速度？答：$\sqrt{\frac{2m_2E}{m_1(m_1+m_2)}}$

3.一彈力常數為 k 的輕彈簧水平放置於光滑桌面上，其兩端分別用質量為 m_1 與 m_2 的兩物體抵住，並壓縮距離 x 後釋放之，則彈開後 m_1 的速率？答：$x\sqrt{\frac{m_2k}{m_1(m_1+m_2)}}$

4.將質量 2kg 與 1kg 兩球中間壓縮 k=2nt/m 之彈簧，壓縮 3m 後放手使其彈開，則：(a)兩者之動量比？(b)兩者之動能比？(c)各速率為若干？

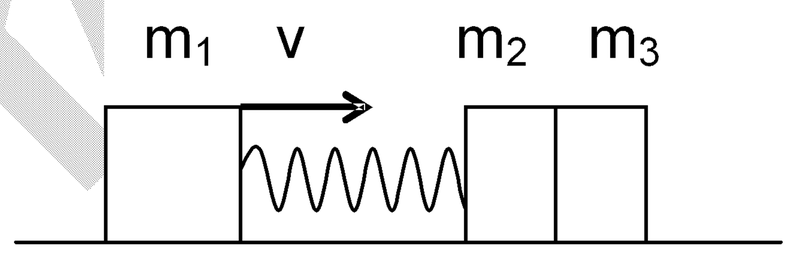
答：(a)1:1；(b)1:2；(c) $\sqrt{3}$ m/s；$2\sqrt{3}$ m/s

5.有二物體，質量分別為 m_1 與 m_2，二者間壓縮一彈簧，而被線縛在一起，靜置於光滑水平面上。將線剪斷後，二物體被彈開。二物與彈簧完全分開 t 秒後，m_1 滑過 L_1 公尺，m_2 滑過 L_2 公尺，則 (A) $\frac{L_1}{L_2}=\frac{m_1}{m_2}$ (B) m_1 所受的衝量大小=m_2 所受的衝量大小 (C) m_1 的動量大小 = m_2 的動量大小 =1 (D) m_1 的動能 / m_2 的動能 = m_2 / m_1。【82 夜大】

例42. 在光滑水平的直軌道上遠隔的兩處，面對面停著質量同為 m 的甲、乙兩小車。其中甲車前端裝有質量可以不計並完全鬆弛之彈簧緩衝器，其彈簧常數為 k。今如甲車以 v 之等速率正對著靜止之乙車運動接近，若不計摩擦，則當甲、乙兩車最接近時，該彈簧之壓縮量？【62.日大】答：$\sqrt{\dfrac{mv^2}{2k}}$

※家庭作業

1.有三個質量分別為 m_1，m_2，m_3 的質點，在一光滑的水平面上排成一直線，如圖所示。m_1 和 m_2 之間以一力常數為 k 的輕彈簧相連接，而 m_2 和 m_3 之間僅相接觸，但不連接。起始時(t=0)，m_1 和 m_2 之間的彈簧長度為其自然長度為 L，但 m_1 以速度 v 向 m_2 運動，m_2 和 m_3 則處於靜止狀態。試問

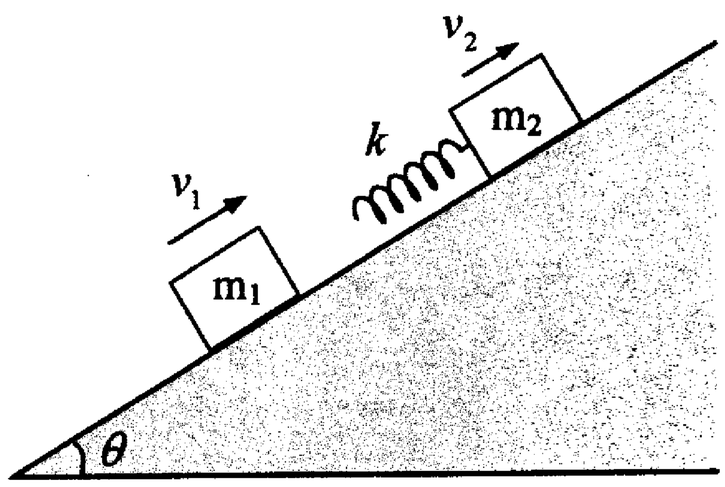


(1)在 m_2 與 m_3 分開前，m_1 與 m_2 之間的距離與時間 t 的關係式為何？

(2)當 m_2 與 m_3 分開時，m_3 的速度為何？【2000 奧林匹亞初選】

答：(1) $\ell-\dfrac{v}{\omega}\sin\omega t$ (其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2+m_3)}{m_1(m_2+m_3)}}$)；(2) $\dfrac{2m_1v}{m_1+m_2+m_3}$

2.如圖所示，在一固定且光滑的無限長斜面上，有一質量為 m_1 的木塊，由下往上追撞另一帶有輕彈簧且質量為 m_2 的木塊。若斜面的斜角為 θ，且木塊的初速各為 v_1 與 v_2（$v_1>v_2$），設重力的加速度為 g，彈簧的力常數為 k，則在整個過程中，彈簧的最大壓縮量？【2004 奧林匹亞初選】答：$\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}(v_1-v_2)$

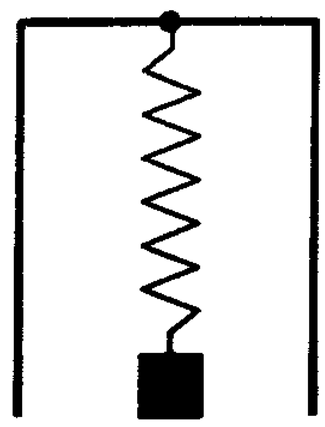


例43. 一電梯以等速度上升，一線性彈簧彈力常數為 k，上端固定於天花板上，下端懸一質量 m 的物體，使物體靜止於彈簧自然長度時之處，突然放手，使物體下墜，求物體振動時：(1)振幅？ (2)彈簧最大伸長量？ (3)最大動能？ (4)最大彈性位能？ (5)最大速率？【80 日大改】【79 三專】

答：(1) $\frac{mg}{k}$ ；(2) $\frac{2mg}{k}$ ；(3) $\frac{m^2g^2}{2k}$ ；(4) $\frac{2m^2g^2}{k}$ ；(5) $g\sqrt{\frac{m}{k}}$

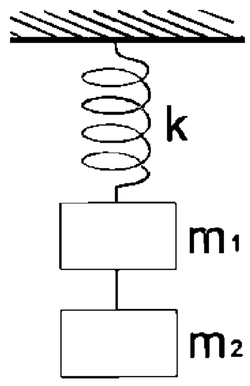
例44. 一自然長度為 12L 的彈簧，上端固定，下端掛一質量為 m 的物體，並使物體在鉛直方向做簡諧運動。設重力加速度為 g，運動過程中彈簧的長度最短時是 11L，最長時是 15L，則下列敘述何者為正確？(彈簧的質量不計) (A)彈簧的彈力常數是 $\frac{mg}{L}$ (B)當物體的速率最大時，彈簧的長度是 13L (C)物體的最大動能是 2mgL (D)當彈簧長度是 11L 及 15L 時，彈簧的彈性位能相同 (E)當彈簧長度是 12L 及 14L 時，物體的動能相同。【87 日大】答：(A)(B(C)(E)

例45. 有一質量為 M 的鋼筒，下端開口，內繫一力常數為 k 的彈簧，彈簧的下端懸掛一質量為 m 的砝碼。當鋼筒靜止懸掛時，砝碼恰垂於筒口，如右圖所示。若使鋼筒自由落下，則在落下的過程中，砝碼離開筒口的最大距離為何？【2005 奧林匹亞初選】答：$\frac{2mg}{k}$



※家庭作業

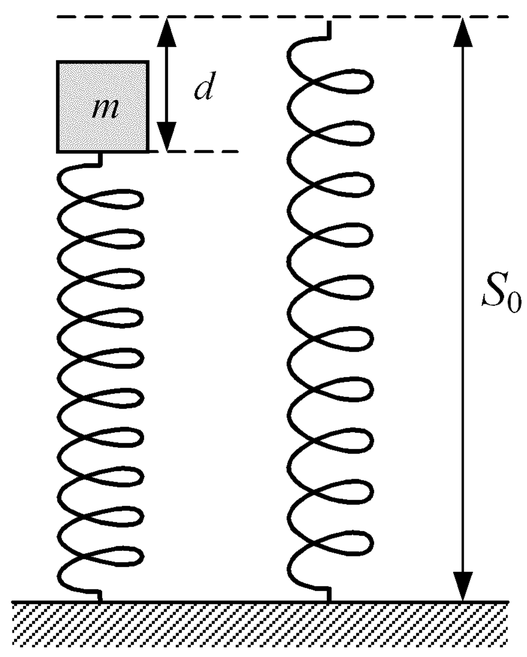
1.在彈力常數 k 的彈簧下面懸掛質量分別為 m_1 及 m_2 的物體，開始時處於靜止，若突然割斷 m_1 與 m_2 之間的連線，求：(1) m_1 作 S.H.M.的振幅？(2) m_1 的最大速度？答：$\frac{m_2 g}{k}$ ；$\sqrt{\frac{m_2^2 g^2}{m_1 k}}$



2.力常數為 k 之彈簧上下兩端加以固定，從其中點吊一小球 m 由靜止釋放，則最大位移為 (A)$\frac{mg}{k}$ (B)$\frac{2mg}{k}$ (C)$\frac{3mg}{2k}$ (D)$\frac{mg}{2k}$。答：(D)

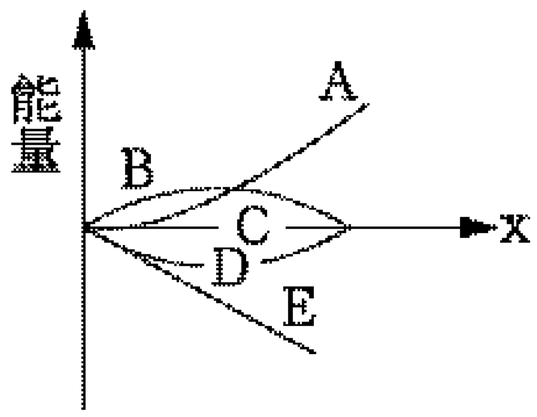
3.一力常數為 k，自然長度為 ℓ 之彈簧掛在天花板下，在此彈簧下方掛有一質量為 M 之秤盤，在重力之作用下達到平衡。今趁此秤盤處於靜止狀態時，再放置一質量為 m 之砝碼，秤盤及砝碼會下墜拉長彈簧，則在下墜的過程中，彈簧之最大長度為？【1997 奧林匹亞初選】答：$\ell+\frac{(2m+M)g}{k}$

4. 於圖中，當質量 m 靜止在彈簧上時使其由原長 s_0 壓縮 d 的距離，如果此物體並非靜置於彈簧上，而是與未壓縮彈簧微微接觸：然後往下壓縮，則下列敘述何者正確？(A)物體下降最大距離 2d (B)物體下降過程歷時 $\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$ (C)在此過程中，物體最大速率 $\sqrt{gd}$ (D)物體下降過程中總位能保持一常量 (E)物體下降過程中，動能一直在增加。答：(A)(B)(C)



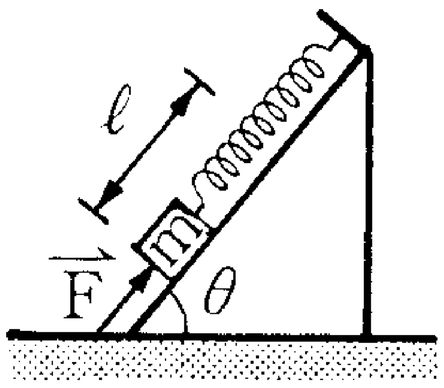
5.一線性彈簧之彈力常數為 k，鉛直懸掛；今若在下端掛上質量 m 的物體，恰呈靜止。將物體拉下 R 後釋放之；則當物體上升 3R/2 處(距釋放點)，物體的速率為 (A)$R\sqrt{\frac{k}{m}}$ (B)$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (C)$\frac{R}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (D)$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}$ (E)$\frac{R}{3}\sqrt{\frac{2k}{m}}$。答：(D)

例46. 如圖為一彈簧下端繫物體作上下振動時，各種能量對彈簧伸長量的關係曲線，以彈簧的自然長度端為重力位能的零位點，則以下列各能量對彈簧伸長量之關係曲線圖哪些正確？(A)A 為彈力位能 (B)B 為動能 (C)C 為總力學能 (D)D 為總位能 (E)E 為重力位能 。答：全



例47. 將一力常數為 100 牛頓／公尺之輕彈簧鉛直懸掛，於其下端繫一質量為 2 公斤之物體，俟其平衡時，再拉下 0.1 公尺後放手，令其作簡諧運動，若取平衡點為重力位能之零位面，且 g=10 m/s^2，則： (A)系統之力學能為 2.5 焦耳 (B)物體於平衡點時之速率為 $\frac{\sqrt{2}}{2}\ m/s$ (C)物體於最高點時之重力位為 2 焦耳 (D)物體於最高點時之彈力位能為 0.5 焦耳 (E)物體於最高點時加速度為 0。答：(A)(B)(C)(D)

例48. 傾斜角為 θ 光滑斜面上，有一力常數為 k 之輕彈簧，一端固定於斜面頂端，另一端連接質量為 m 之物體。平衡後用一力 $\vec{F}$ 將物體沿斜面向上推，使其位移為 ℓ，則此物體增加之位能為：



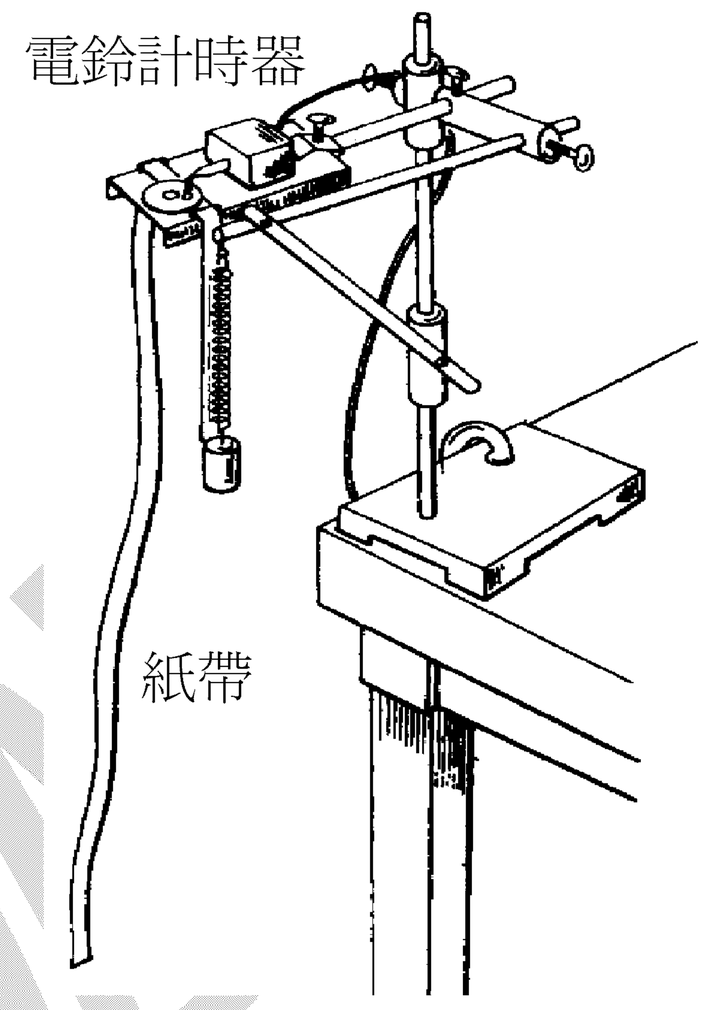
(A) $mg\ell$ (B) $\frac{1}{2}k\ell^2$ (C) $mgL-\frac{1}{2}kL^2$ (D) $mg\ell\sin\theta-\frac{1}{2}k\ell^2$

(E) $mg\ell\sin\theta+\frac{1}{2}k\ell^2$ 。【67 三專】答：(B)

學務印製

※家庭作業

1.在「力學能之轉換」實驗中，所用之裝置如右圖所示。若在整個實驗過程中，掛上重錘後的彈簧長度一直都比未掛時爲長，則下列敘述何者爲正確？ (A)實驗時要將重錘自平衡位置往下拉，再放開 (B)分析紙帶上的點痕，可以測出重錘的速度 (C)重錘的重力位能減少時，彈簧的位能一定增加 (D)重錘動能增加時，彈簧的位能一定減少 (E)重錘經過平衡位置附近時，紙帶上所記錄的點痕最密。【86 日大】答：(B)(C)



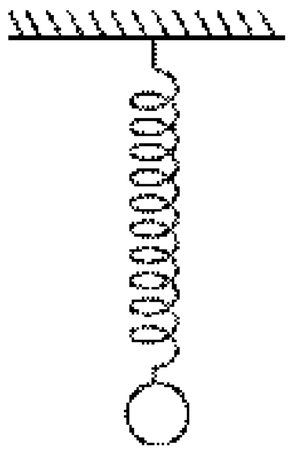
2.彈力常數 k 的彈簧，下端懸一質量 m 的砝碼，使其在鉛直方向上下 S.H.M.，其最高點與最低點分別是彈簧未掛砝碼時之末端的下方 x_1 與 x_2 處，則最高點時的總位能比中央平衡點時多了多少？答：$\frac{1}{2}k(\frac{x_2-x_1}{2})^2$

3.在一自然長度爲 ℓ_o，力常數爲 k 的彈簧下面，懸掛一重量爲 W 的物體，令其做上下的直線振動。設取重物處於平衡狀態時之彈簧的彈性位能爲零，則彈簧的彈性位能與其長度 ℓ 的關係式？【1999 奧林匹亞初選】答：$\frac{k}{2}[(\ell-\ell_o)^2-(\frac{W}{k})^2]$

4.有一鉛直振盪的彈簧，當物體離開最低點 $\frac{1}{3}$ 振幅的距離時，其動能是最大動能的？倍。

答：$\frac{5}{9}$

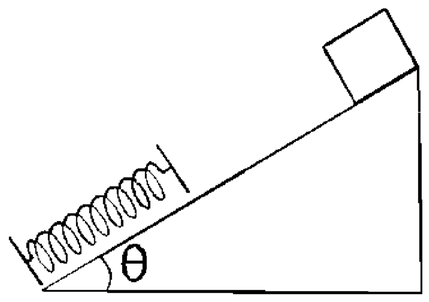
5.如圖所示，取靜止時小球的位置的重力位能爲零，現將小球向下拉一段距離（仍在彈性限度之內），然後放手作簡諧振動，則 (A)小球速度最大時，其重力位能和彈力位能相等 (B)小球經平衡位置時系統的位能最小，且爲零 (C)小球速度最大時系統的位能不爲零 (D)重力對小球做正功時，小球動能增大 (E)彈力對小球做正功時，小球動能增大。答：(C)



例49. 如圖，質量 m 的小物體，從力常數 k 的輕彈簧正上方高 h 處自由落下，(a)彈簧一端固定，求此鉛直彈簧最大壓縮量？ (b)若 m 與彈簧結合而上下作 S.H.M.，求振幅 R？ (c)承上題，求 m 之最大速率 v_o？

答：(a) $\dfrac{mg+\sqrt{m^2g^2+2kmgh}}{k}$ ；(b) $\dfrac{\sqrt{m^2g^2+2kmgh}}{k}$ ；(c) $\sqrt{\dfrac{mg^2+2kgh}{k}}$

例50. 有一理想的輕彈簧，其力常數爲 100 牛頓/公尺。將此彈簧貴於與水平成 30° 角之光滑斜面的底部(如圖)。有 10 公斤的物體 M 在斜面頂端由靜止而滑下，可將此彈簧壓縮 2.0 公尺。($g=10m/s^2$) 如物體黏附在彈簧上，則作 S.H.M.之(1)振幅？(2)週期？(3)最大動能？(4)最大加速度？(5)物體在靜止前滑行之距離爲若干？(6)物體與彈簧剛剛接觸時的速度爲若干？

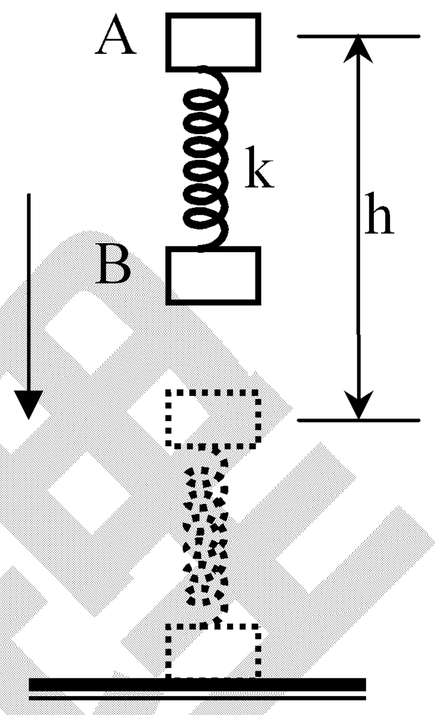


答：(1)1.5m；(2) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{10}}$ 秒；(3)112.5J；(4)15 m/s^2 ；(5)4 公尺；(6) $\sqrt{20}\ m/s$

吳銘祺物理

※家庭作業

1.如右圖所示，質量分別為 m 和 M 的 A、B 兩物體用一彈性係數為 k 的輕彈簧連接起來。若使彈簧為原長，從靜止狀態自由落下，落下過程彈簧始終保持鉛直狀態。當 A 物體下降 h 距離時，B 物體剛好與地面碰撞，假設碰撞後的瞬間，B 物體不反彈。試回答下列問題：



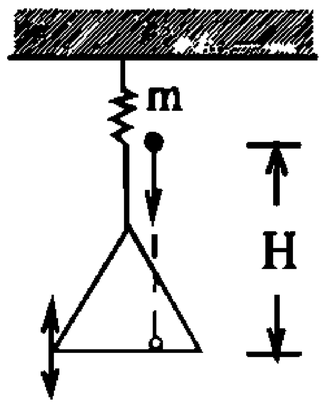
(1)B 物體著地前瞬間的速度大小為何？

(2)彈簧的最大壓縮量為何？

(3)若要使 A 物體反彈時能將 B 物體提離地面，則落下高度至少應為多少？【92 校內初賽】

答：(1) $\sqrt{2gh}$ ；(2) $\frac{mg}{k}+\frac{\sqrt{m^2g^2+2mghk}}{k}$ ；(3) $h>\frac{mg}{k}(1+\frac{M}{2m})$

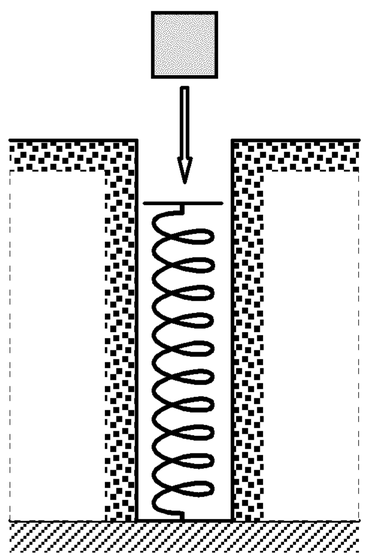
2.一塑膠圓盤以彈簧掛起，彈簧之彈力常數為 k，設有一質量為 m 之重物自圓盤上方高度 H 處落下，附著於盤內做簡諧運動(如圖)彈簧及圓盤質量可以略去不計，則圓盤振盪之振幅為？【大學聯考題】



答：$\frac{\sqrt{m^2g^2+2mgHk}}{k}$

3.質量 m 的球自離地 4L 高處自由落下後，黏在垂直置於地上長度為 2L 的彈簧上作簡諧運動，若彈力常數為 k，則振幅為何？答：$\frac{\sqrt{m^2g^2+4kmgL}}{k}$

4. 1.00 kg 的物體掉到彈力常數 K = 250 nt/m 的鉛直彈簧如下圖所示，物體碰觸彈簧到瞬間靜止前，彈簧被壓縮了 0.20 公尺，則： (1)在彈簧被壓縮期間，重力及彈簧分別對物體作功？ (2)在物體接觸彈簧瞬間，速率如何？ (3)同(1)物體最大速率？



答：(1)1.96 J；−5.0J；(2)≒2.46m/s；(3)≒2.53m/s

吳錫玠物理

例51. 一木塊質量爲 M，用彈力常數爲 k 的輕彈簧吊著，使其靜止平衡，此時彈簧總長爲 ℓ。今以一質量爲 m 的子彈，從木塊正下方鉛垂向上打入木塊後留在其中。設子彈打中木塊時的初速爲 v，子彈進入木塊後，木塊上下振盪。問：

(1)當子彈射入木塊後，此系統(木塊、彈簧及子彈)的總力學能爲若干？(假設當彈簧總長爲 ℓ 時，木塊的重力位能爲零)。

(2)經長時間振盪，最後木塊靜止時，彈簧總長度爲若干？【80 年大學】

答：(1) $\dfrac{m^2v^2}{2(M+m)}+\dfrac{M^2g^2}{2k}$ ；(2) $\ell+\dfrac{mg}{k}$

例52. 一鉛直懸掛之彈簧，自然懸掛上質量 m 的物體後立即放手，使其做上下的簡諧運動，且振幅爲 R，

(1)當行至最低點時，恰有 m/3 脫落，則後來的振幅爲何？

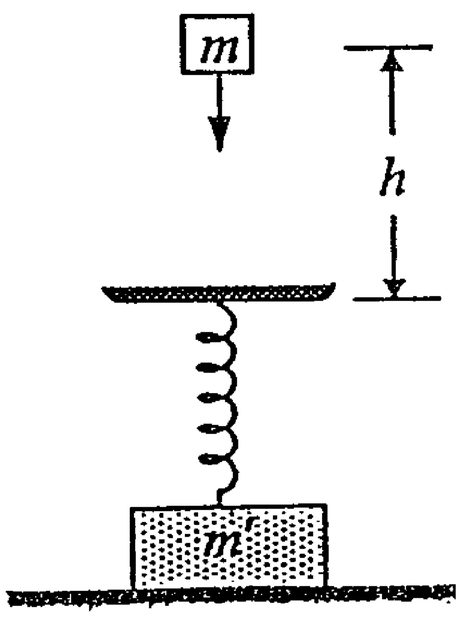
(2) 當行至平衡點時，恰有 m/3 脫落，則後來的振幅爲何？答：(1) $\dfrac{4R}{3}$ ；(2) $\dfrac{\sqrt{7}R}{3}$

均豪物理

※家庭作業

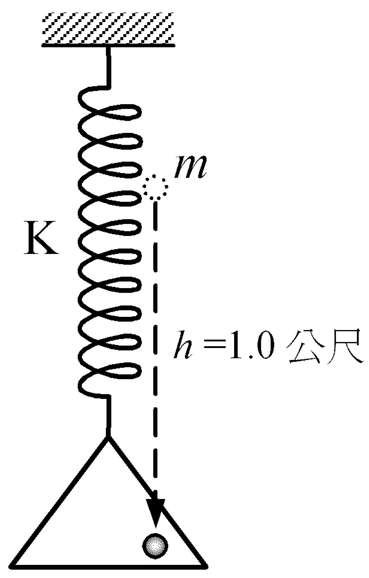
1.有一鉛直懸掛的輕彈簧（質量可忽略不計），其力常數爲 k，在彈簧的下端掛上一質量爲 m 的小砝碼（可視爲質點）。現在使小砝碼作振幅爲 d 的上下振動，當小砝碼達到最低點時，迅速地加掛另一質量同爲 m 的小砝碼。若新加的小砝碼的初速爲零，則加掛該小砝碼後，其新振幅爲？【2002 奧林匹亞初選】答：$\left|d-\frac{mg}{k}\right|$

2.如右圖所示，一質量爲 m' 的木塊放置在水平地面上，其上方連結有一鉛直豎立的輕彈簧，其力常數爲 k。該彈簧的上端平放一質量可忽略的秤盤。今在秤盤中央的上方距離爲 h 處，自靜止自由落下一質量爲 m 的小鐵塊。若 $h=\frac{12mg}{k}$，小鐵塊與秤盤之間的碰撞爲完全非彈性碰撞，則欲使地面上之木塊 m' 自地面跳起，$\frac{m}{m'}$ 之比值必須滿足何種關係？【2002 奧林匹亞初選】



答：$\frac{m}{m'}>\frac{1}{4}$

3. 如圖，彈簧質量不計，彈力常數 K = 480 nt/m，下端吊一盤(質量很小，不計盤重)，有一球 m = 4.0 kg 球自盤上方 1.0 公尺處由靜止釋放，擊中盤後附在盤上作 S.H.M ：(1)彈簧最大伸長量？ (2)振幅若干？ (3)振動頻率？ (4)最大速率？ (5)最大加速度？



答：(1)0.5m；(2)0.42m；(3)1.74Hz；(4)51 m/s；(5)4.6 m/s^2

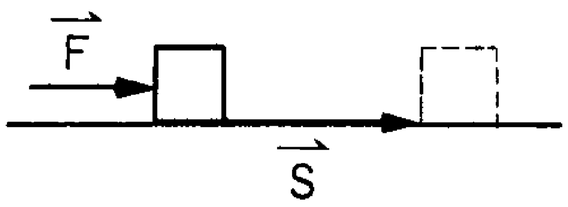
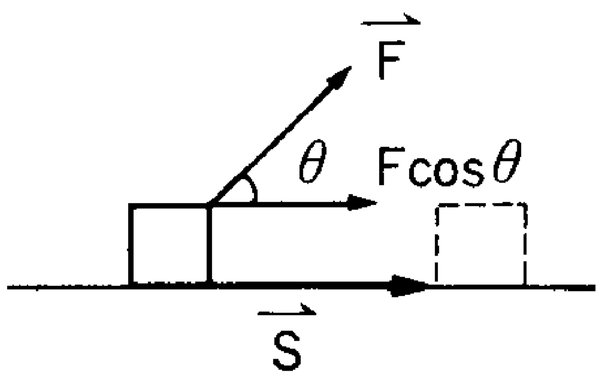
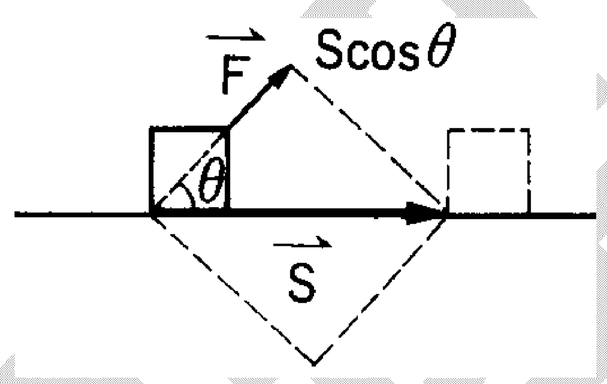
4.一彈簧在自然長度(不受引力)時，掛 m 質量物放手後做鉛直上下振動，振幅 x，當達到最高點時，加掛 8m 質量，則：(a)振幅變爲若干？ (b)週期變爲若干？

(c)最大速率爲原來若干倍？答：(a)9x；(b) $6\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$；(c)3 倍

觀念六　定力作功

1. 定義：功＝力×施力方向上的位移。

$W=\vec{F}\cdot\vec{S}=FS\cos\theta$　其中θ為$\vec{F}$與$\vec{S}$的夾角。

圖			
說明	$W=F\cdot S$ 功＝力×同方向的位移	$W=(F\cos\theta)S$ 功=位移方向的分力×位移	$W=F(S\cos\theta)$ 功=力×位移在力方向的分量

2. 單位：

	力 F	位移 S	功 W
M.K.S.制	牛頓(Nt)	公尺(m)	焦耳(Joule)
C.G.S.制	達因(Dyne)	公分(cm)	爾格(Erg)

註：1 牛頓＝10^5達因，1 焦耳＝10^7爾格（現已少用）

3. 說明：

(1)物理學上的「功」和一般日常生活用語所指的「工作」,「做工」等含意是不同的，在物理上作功是指將能量轉換的過程，能的形式有動能、位能、熱能、光能、電能等，能的形式可藉作功而互相轉換。當我們施力於物體，使其沿力的方向有位移時，便稱此外力對物體「作功」。

(2)功為純量，只有量值沒有方向，但有正負之分。

若$0°\le\theta\le 90°$外力對物體作正功、物體能量增加。淨力作正功⇨總能增加；

若$90°<\theta\le 180°$外力對物體作負功、物體能量減少。淨力作負功⇨總能減少。

(3)位移是相對的量，相同的力，因觀察者的參考座標不同，所求得的功亦可能不相同。

(4)功的量值與力的作用時間無關。

(5)當物體所受的力不只一個時，各力所作之功的和等於合力所作之功，稱為淨功。

$$W_{合}=W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots$$

$$=\vec{F}_1\cdot\vec{S}+\vec{F}_2\cdot\vec{S}+\vec{F}_3\cdot\vec{S}+\cdots\cdots=(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\cdots\cdots)\cdot\vec{S}=\vec{F}_{合力}\cdot\vec{S}$$

4.作功為零的例子：(指施力方向與位移方向垂直時，施力不作功)

(1)單擺運動中繩子的張力不作功;

(2)物體沿斜面下滑時，斜面對物體施的正向力不作功;

(3)圓周運動的物體，向心力不作功。

※但向心力可能是數力的合力，其中的某一力可能仍有作功。

(4)圓軌道之衛星運動中，萬有引力不作功。

※橢圓軌道之行星或衛星運動中，須繞一圈萬有引力作功始才會為零，繞軌道的一部分時萬有引力作功可能不為零

(5)人手提重物沿水平方向等速前進，向上提物之力不作功。

※若人手提重物沿水平方向等加速前進，則提物之力有作功。

5.有一天唐伯虎與朋友吟詩作對

對穿腸：一男二女大玩三P，不是四吹五含六吸，竟敢舔七八九下，十分狂妄

唐伯虎：十男九女，共帶八套七棒六鞭五銬四油，欲打三炮二槍，一級變態

對穿腸：房間裡，男無套，女狂叫，迷糊早洩，可笑可笑

唐伯虎：廚房裡，女配鞭，男配棒，叫聲一嗲，快射快射

對穿腸：陽台上，門無窗，窗無關，大叫一嗲，賤笑賤笑

唐伯虎：樓梯間，棒配鞭，男配女，叫聲不要，快上快上

對穿腸：十隻肉棒，射嘴，射穴，射奶子

唐伯虎：八隻皮鞭，鞭奶，鞭屁，鞭雞巴

對穿腸：你上等變態，顯現一身臭味

唐伯虎：你下等無恥，玩弄一堆男女

對穿腸：厲害！干敗下風！

唐伯虎：彼此！您也不賴！

吳錫玠

例53. 以下有關功之敘述，何者為正確？

(A)手持重物，但手未運動，則手對重物所作之功為 0

(B)以手沿一粗糙表面推一重物以等速前進，則手對重物所作之功為 0

(C)在水平粗糙面上，沿一封閉圓軌道切線方向推物，使繞行一周，推力作功為 0

(D)物體沿光滑斜面運動時，斜面對物體之作用力所作的功為 0

(E)在粗糙平面上運動之物體，重力對物體作功為 0

(F)手提皮箱等速上樓，手對皮箱所作的功為 0

(G)垂直提一水桶慢慢等速向前走，手對重物所作之功為零

(H)提重物在水平地面上等加速前進，人作功為零

(I)提重物在水平地面上等加速前進，重力作功為零

(J)以手在柏油路上拉一物體以加速前進，則手對重物所作之功為零

(K)在下坡道時，手用力推嬰兒車，手對車所作的功為 0

(L)鉛球投出後，在飛行過程中，手對鉛球所作的功為 0

(M)鉛球拋出後，在飛行過程中，重力對鉛球所作的功為零

(N)斜拋運動之物體自初拋至其著地(同一高度)，重力對物體所作的功為 0

(O)火箭升空時，重力對火箭所作的功為 0

(P)單擺運動中，繩之張力對擺錘所作之功為 0

(Q)以一繩繫一小球作鉛直面圓周運動的過程中，重力不作功

(R)一物體作變速率圓周運動時，向心力仍不對物體作功

(S)人造衛星繞地球一周，萬有引力對衛星所作之功為 0

(T)行星由遠日點至近日點時，萬有引力對行星作正功

(U)一帶電粒子在一均勻磁場中運動，則磁場對該帶電粒子所作之功為 0。(V)質子在均勻磁場中作螺旋運動，磁力對質子不作功

(W)以一彈簧繫一物體作水平面的簡諧運動，物體由端點運動至平衡點的過程中，彈力作正功

(X)一球在水平面滾動時，若動能減少，則重力對球作負功

(Y)等速上升的汽球，其外力總作功為零

(Z)作功乃能量轉移之一種量，故能量轉移時必須作功【71 日大】【76 日大】

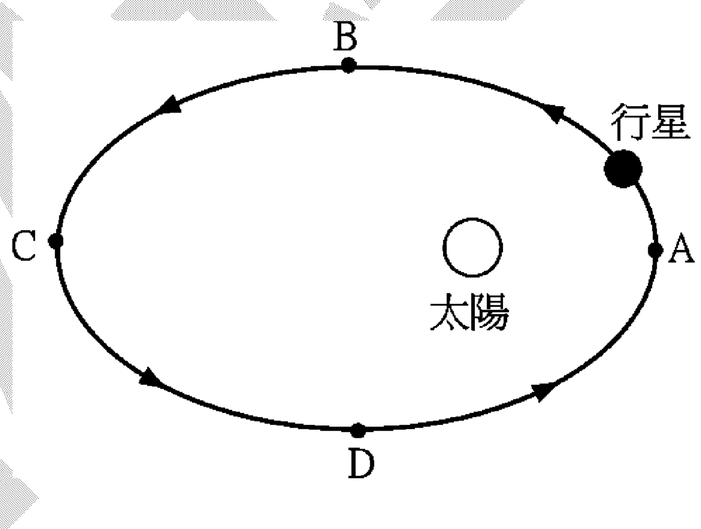
答：(A)(D)(G)(I)(L)(N)(P)(R)(S)(T)(U)(V)(W)(Y)

※家庭作業

1.後輪驅動的轎車在水平地面加速前進時，下列敘述何者正確？ (A)前輪的摩擦力對轎車作正功 (B)後輪的摩擦力對轎車作正功 (C)前、後輪的摩擦力對轎車皆作正功 (D)前、後輪的摩擦力對轎車皆作負功。答：(B)

2.彈簧鉛直垂掛一質量 m 的物體，若自平衡點起以手拉物體向下伸長，則下拉時： (A)手對系統作正功 (B)重力對物體作負功 (C)彈簧之力對物體作負功 (D)拉長期間重力所作之功恰與彈簧所作之功相等 (E)重力對物體作正功。答：(A)(C)(E)

3.附圖為太陽系中，某一行星的橢圓軌道，其中 B 點為行星由近日點 A 運行至遠日點 C 軌跡的中點，D 點為行星由遠日點 C 運行至近日點之軌跡的中點，則下列敘述何者正確？ (A)行星自 A 運行至 B 之時間大於行星自 B 運行至 C 之時間 (B)行星自 A 運行至 C 期間，因行星與太陽的距離漸增，因此萬有引力漸弱，故重力位能減小 (C)近日點 A 為軌道上動能最大處 (D)行星在近日點 A 的角動量大於遠日點 B 的角動量 (E)行星自 C 運行至 D 期間，萬有引力作正功。答：(C)(E)



4.下列敘述何者不正確？(A)有施力，必有作功 (B)有位移，必有作功 (C)當施力與位移均一定時，作功與時間無關 (D)一物體同時受多力作用，則所作總功為各力所作功之代數和 (E)在任何狀況下，功皆與路徑無關。答：(A)(B)(E)

5.下列情形，何者可能存在？(A)一物體具有能量，但不具有動量 (B)一物體具有動量，但不具有動能 (C)一物體不具有動量，亦不具有動能 (D)一物體速率增大時其動量亦增大 (E)一物體質量大，但動量小。【72 夜大】答：(A)(D)(E)

6.沿粗糙的斜面將物體等速向上拉，則下列何者為零？ (A)拉力作功 (B)重力作功 (C)摩擦力作功 (D)物體的位能變化 (E)物體的動能變化。答：(E)

7.功的單位是 (A)牛頓 (B)焦耳 (C)庫侖 (D)達因。答：(B)

8.可以作為能量單位的是 (A)牛頓-米 (B)伏特 (C)電子伏特 (D)瓦特-時 (E)瓦特 。【71 夜大】答：(A)(C)(D)

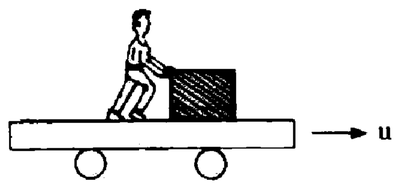
例54. 一物體質量 5kg，停在一光滑水平面上，施以 50 牛頓之力，仰角 45°，經 4 秒，拉力作功若干？答：2000J

例55. 某人提質量 mkg 之手提箱，以 a 公尺/秒 ^{2} 之等加速度沿水平路面走 d 公尺，則此人對手提箱作功多少焦耳？答：mad

※家庭作業

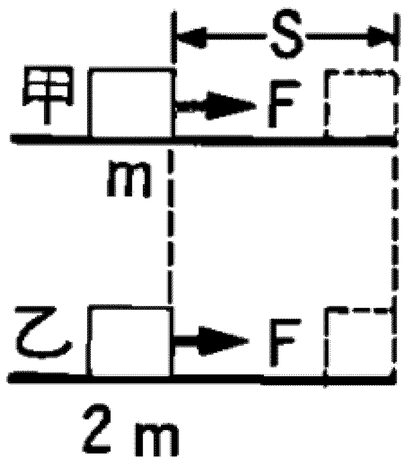
1.一質量 5 公斤之質量，受 10 牛頓定力的作用後，從 XY 水平面上 $\vec{r}_A = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ 公尺之 A 點，由靜止開始移向 $\vec{r}_B = 7\vec{i} + 6\vec{j}$ 公尺之 B 點。該力對質點所作用的功為 (A)20 焦耳 (B)30 焦耳 (C)40 焦耳 (D)50 焦耳【80 三專】答：(D)

2.質量 m 之物於台車上，台車以等速度 u 前進(永遠保持等速)，今以 F 之力推此物作用 t 時間後。則：(a)車上人看此人作功若干？



(b)地上人看此人作功若干？答：(1) $\dfrac{F^2t^2}{2m}$ ；(2) $Fut + \dfrac{F^2t^2}{2m}$

3.如圖所示，在光滑的水平面上，靜止的甲、乙兩物體質量分別為 m、2m，受同樣的水平力 F 作用，沿力的方向移動相同距離 S ，則下列何者正確？ (A)水平力 F 對乙物體作功較大 (B)水平力 F 對甲物體作功較大 (C)甲、乙兩物體獲得的動能一樣大 (D)水平力 F 對甲、乙物體平均功率一樣大。【86 大考中心題庫】答：(C)

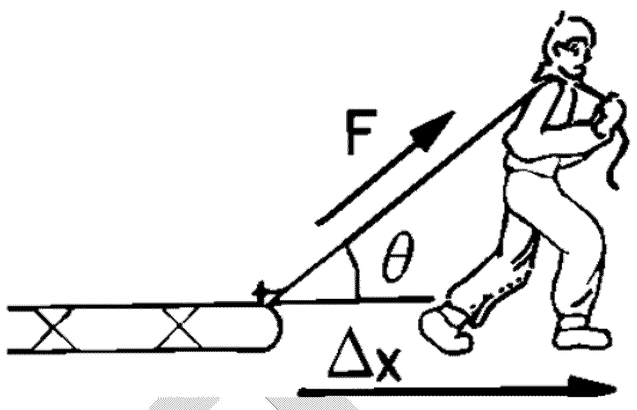


4.某人將質量 2kg 的手提箱由地面等速提至高度為 0.5m 後，沿水平面緩慢行走 10 m。設行走時手提箱在離地 0.5m 的高度，則此人對手提箱總共作了多少焦耳的功？ (A)0 (B)1 (C)9.8 (D)196 (E)205.8【87 推甄】答：(C)

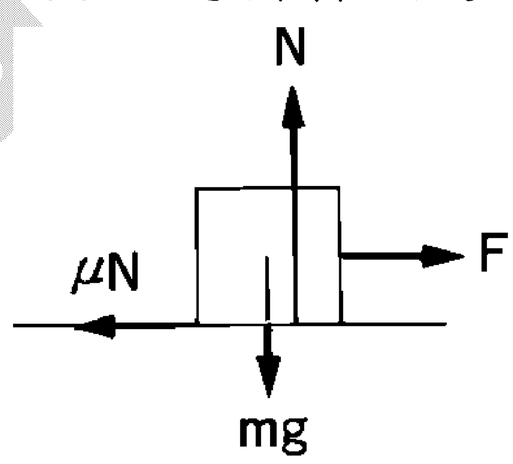
例56. 一人以繩拖曳質量爲 10 公斤的雪橇(g=10 m/s^2)，使其等速前進，若雪橇和地面的摩擦係數爲 0.2，則

(1)拉力與地面平行，問前進 30 公尺時，此人對雪撬所作的功爲若干焦耳？

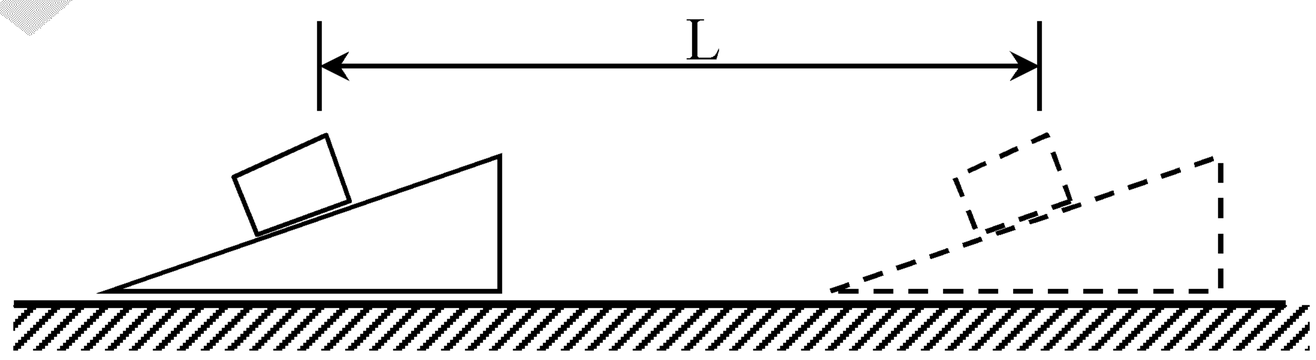
(2)拉力斜向上與水平成 45°角，問前進 30 公尺時，此人對雪橇所作的功爲若干焦耳？答：(1)600J；(2)500J



例57. 一人以繩拖曳質量爲 1 公斤的雪橇，使其等速前進，若雪橇和地面的摩擦係數爲 0.2，拉力與地面平行。問前進 3 公尺時，(g=10 m/s^2) (A)人對雪橇所作的功爲 6 焦耳 (B)重力對雪橇所作的功爲 6 焦耳 (C)正向力對雪橇所作的功爲-6 焦耳 (D)摩擦力對雪橇所作的功爲-6 焦耳 (E)合力對雪橇所作的功爲零。答：(A)(D)(E)



例58. 有一質量爲 m 的物體靜止在斜角爲 α 的斜面上，如圖所示。現將斜面在水平面上沿直線等速向右移動距離 L，則斜面作用於 m 的正向力和摩擦力對 m 做功分別爲若干？【92 校內複賽】答：$W_N = -mgL\sin\alpha\cos\alpha$；$W_f = mgL\sin\alpha\cos\alpha$

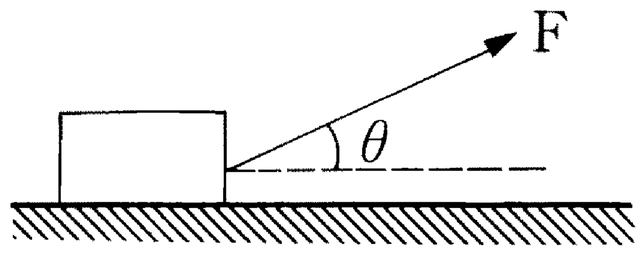


吳錫玠

※家庭作業

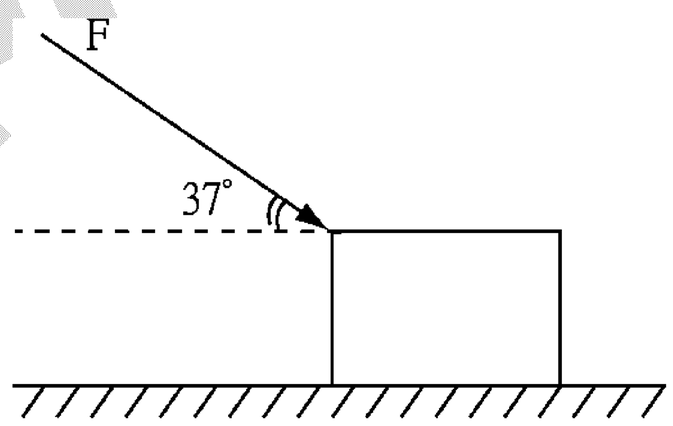
1.在平地上以 3 牛頓的水平力推一質量爲 2 公斤的靜止物體，在第 2 秒末物體的速率爲 2m/s，則在前 2 秒內，此推力所作的功爲若干？答：6 焦耳

2.一人以繩拖質量 m 的雪橇，使其等速度前進，若雪橇和地正間的摩擦係數爲 μ ，拉力與水平成 θ 角，如圖，則前進 s 時，此人對雪橇作功若干？答：$\dfrac{\mu mgs}{1+\mu\tan\theta}$

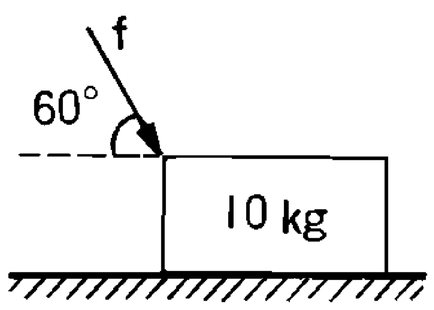


3.一人在水平道路上推進一購物車，推力 50 牛頓與路面成 60°，若車子在 10 秒內以等速前進 8 公尺，則 (A)推力所作的功爲 200 焦耳 (B)推力之功率爲 20 瓦特 (C)摩擦力所作之功爲-200 焦耳 (D)重力所作之功爲 346 焦耳。【75 夜大】答：(A)(B)(C)

4.如圖所示，以 20 牛頓的推力（與水平面夾 37° ）施於質量爲 4 公斤的物體。物體置於水平地面上由靜止漸漸滑動，物體與地面間動摩擦係數爲 0.2，設該處的重力場度 g= $10\,m/s^2$ ，則在最初 2 秒內推力 F 對物體所作的功爲 (A)33.6 (B)44.8 (C)56.0 (D)128 (E)160 焦耳。答：(B)



5.質量 10kg 物體靜止於一水平面上，以 f 之推力作用(如圖)，若物體與地面間摩擦係數爲 0.2，則等速滑行 10 公尺後，f 對物體作功若干焦耳？答：300J

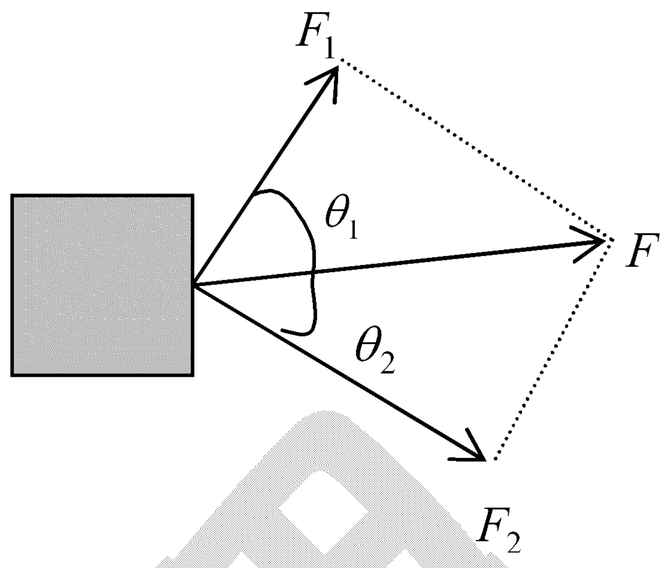


6.有一質量爲 5.0 公斤的木塊，靜止放置在一粗糙的水平桌面上，桌面之動摩擦係數爲 0.2。現以 12 牛頓的水平力拉動此木塊，則： (A)木塊移動 2.0 公尺時，速度大小爲 2.0 公尺/秒 (B)木塊被拉動的過程中，所受的動摩擦力爲 9.8 牛頓 (C)木塊被拉動的過程中，所受的外力合力爲 2.2 牛頓 (D)木塊被拉動的過程中，加速度的量值爲 3.0 公尺/秒 (E)木塊移動 2.0 公尺，木塊被拉動的過程中，外力所作的功爲 24.0 焦耳。答：(B)(C)

7.Y 鮭：你上過成功嶺嗎？

Y 強：沒有耶……成功嶺是誰？

例59. 互相垂直之二水平力F_1及F_2同時作用於一物體，由靜止開始經一段時距內，F_1及F_2共對物體做功 W，則：(1)F_1對物體所作之功為若干？



(2)互相垂直大小各為 3nt、5nt 的兩水平力同時作用於物體上，由靜止開始經一段時距內共作功 68 焦耳，則 3nt 的力所作之功為若干？

答：(1)$\dfrac{WF_1^2}{F_1^2+F_2^2}$；(2)18J

※家庭作業

1.互相垂直之二力F_1及F_2同時作用於一物體，由靜止開始經一時距內，F_1及F_2對物體作功 W，則F_2對物體所作之功為？答：$\dfrac{F_2^2W}{F_1^2+F_2^2}$

2.向南 3N 與向東 4N 之兩力同時作用於質量 4.0 kg 的靜止物體上，兩力互成 90°，作用時間 2.0 s，位移為 2.5 m，

(1)物體所受淨力為若干？

(2)此淨力所作之功為若干？

(3)兩力作功各為若干？

(4)試將兩力作功之和與(2)之解答比較。

答：(1)5N，東偏南 37°；(2)12.5 J；(3)4.5 J，8.0 J

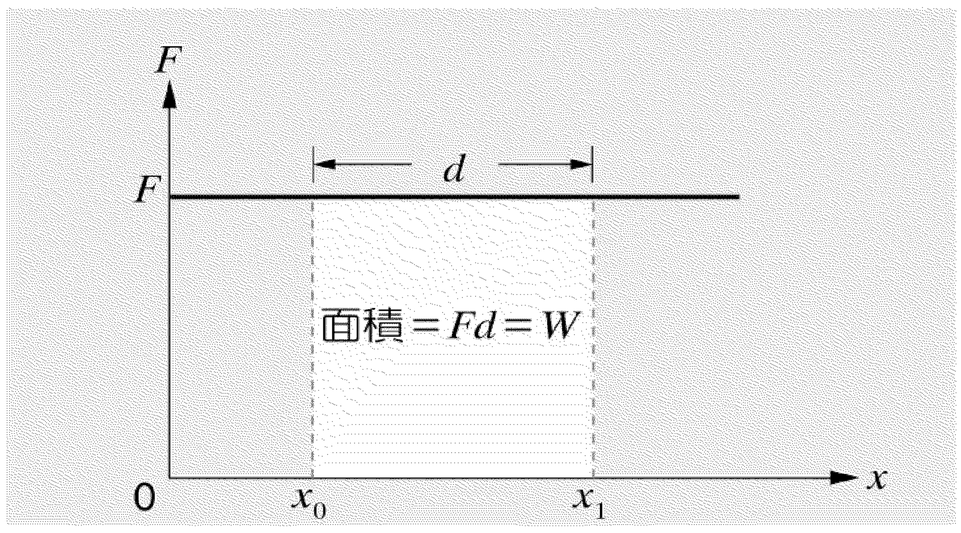
吳錫玠物理

觀念七　變力作功

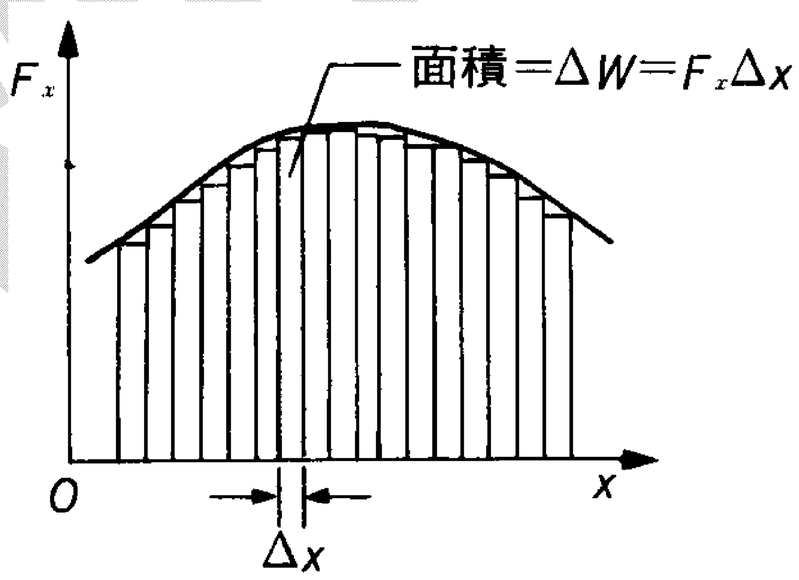
※變力作功

(1)『F-x 圖圖形下面積』的意義：

對於一固定力 F 沿著物體運動方向作用在物體上，使其位置自 x0 移動至 x1，則此力所作的功 W＝F・d＝F（x1－x0），d 為物體之位移。若作出力-位置關係圖(亦稱 F-x 圖)如右，可看出功 W 等於力-位置關係圖圖形下的長方形面積大小。



(2)若物體所受的力會隨著物體的位置改變而有所不同時，可將位移切割為無限多小段來討論。若物體在 x 方向移動一小段位移 Δx_1，此時受力 $\vec{F}_1$ 可視為定值，則 $\vec{F}_1$ 對物體作功 $\Delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{x}_1$，如圖所示，$\Delta W_1$=細長條面積。

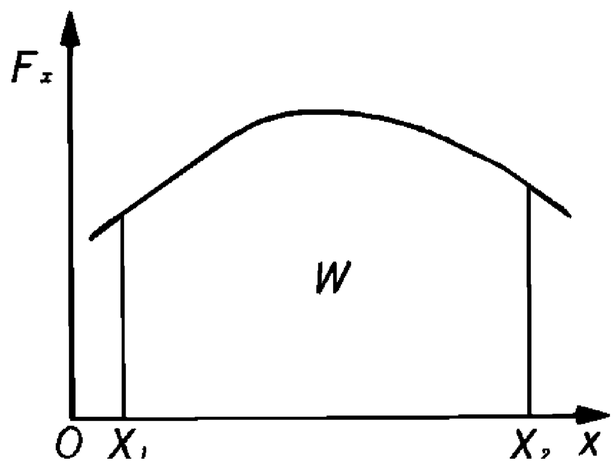


(3)將各小段的功加起來即為總功，如圖所示 $\vec{F}_x$ 對 x 圖線下的面積。

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \cdots\cdots$$

$$= \vec{F}_1 \cdot \Delta x_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta x_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta x_3 + \cdots\cdots$$

$$= \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$



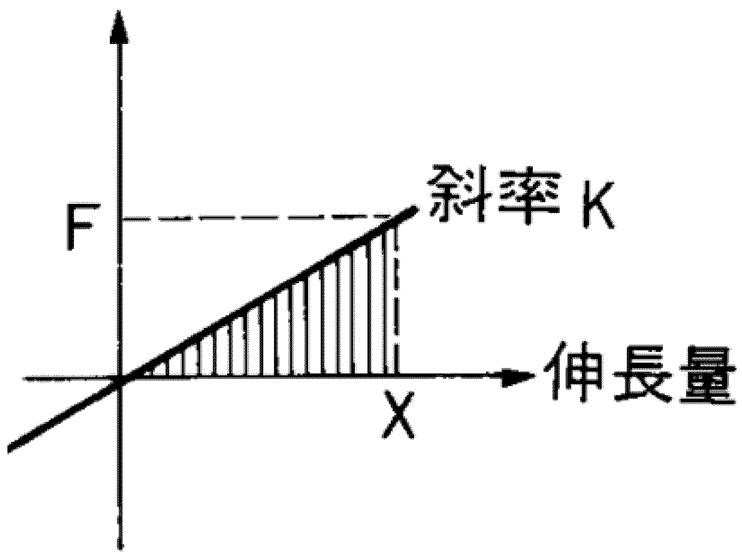
※彈力、浮力、繩子重力的作功

型一：彈力

作用力克服彈簧恢復力所作的功：

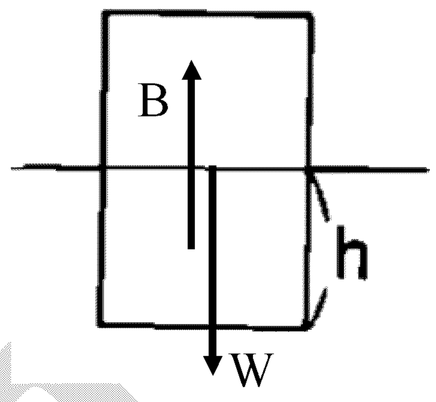
1. 彈簧恢復力與伸長量的關係：$F = kx$。
2. 畫出 F 與 x 的關係圖。
3. 功=斜線部分的面積

$$W = \frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{F^2}{2k}$$



型二：浮力

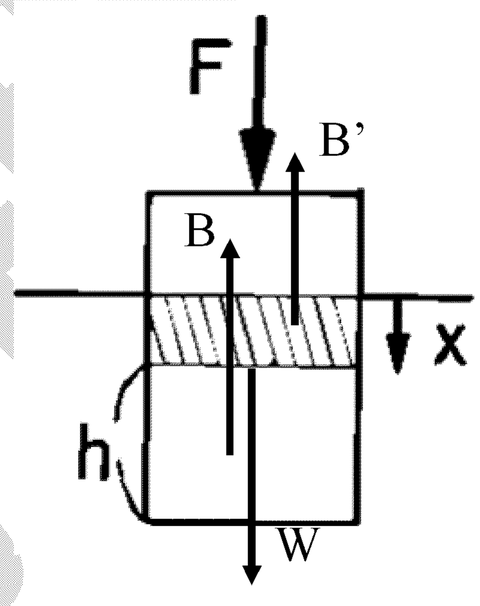
邊長 L ，密度 ρ 之正方體木塊浮於密度為 d（d>ρ）之液面上，使木塊沒入液體中所須作的功。



1. 木塊靜止浮於水面：木塊重 W＝浮力 B
2. 若施力 F 將木塊再壓入 x 距離：

   施力 F+木塊重 W＝浮力 B+新增浮力 B'

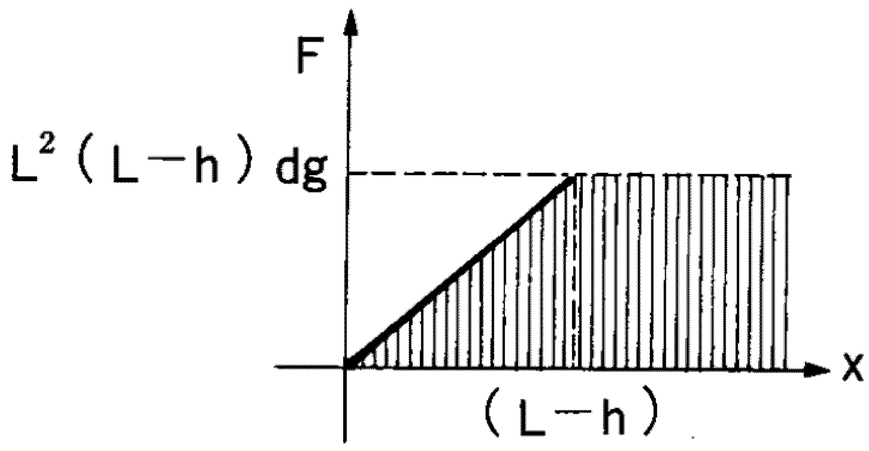
   →施力 F＝新增浮力 B' $= dL^2xg$



3. 當 $x=(L-h)$ 時，$F=dL^2(L-h)g$ ，木塊已完全沒入水中。
4. 木塊恰沒人水中，施力所作的功為 F-x 圖形下的三角形面積。

$$W=\frac{1}{2}Fx=\frac{1}{2}dL^2(L-h)g\cdot(L-h)=\frac{1}{2d}(d-\rho)^2L^4g \quad \because h=\frac{\rho}{d}L$$

5. 此時以後，施力保持定值不需再增加。



型三：繩子重力

一置於光滑桌上長 L、質量 m 的繩子靜止下滑

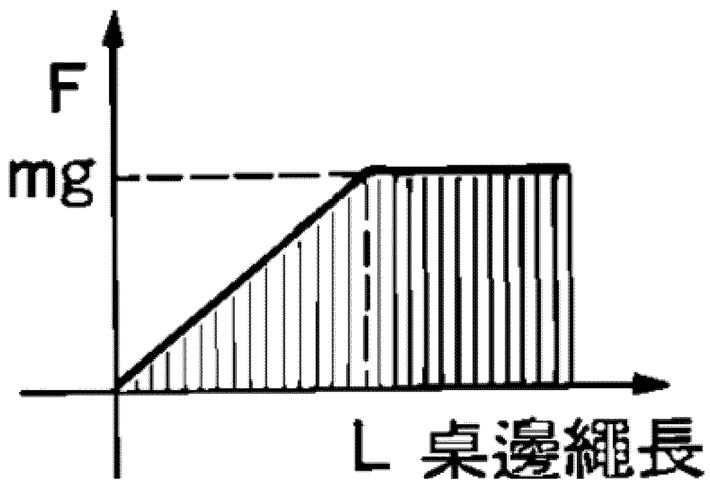
(1)若桌邊的繩長由 0 增至 x 時,下垂繩長之重力由零增為 $mg\cdot\frac{x}{L}$，

重力共作功 $W=\frac{1}{2}F\cdot x=\frac{1}{2}mg\frac{x}{L}\cdot x=\frac{mgx^2}{2L}$ 。

(2)當繩子恰離開桌面，此時繩長之重力恰為 mg。

(3)桌邊的繩長由 0 增至 L，重力共作功 $W=\frac{1}{2}F\cdot x=\frac{1}{2}mgL$ 。

(4)若繩子仍再下降，重力維持為 mg。



※ 若是同時有數力作用在一物體上，當要計算作功若干時，必須先看清楚是要算那一力所作的功，還是要算合力所作的功，初學的同學常常會忘記物體在運動時，所受到的力往往都是不只一個。

例60. 某線性運動力 F 與位置 x 之關係如圖，則：

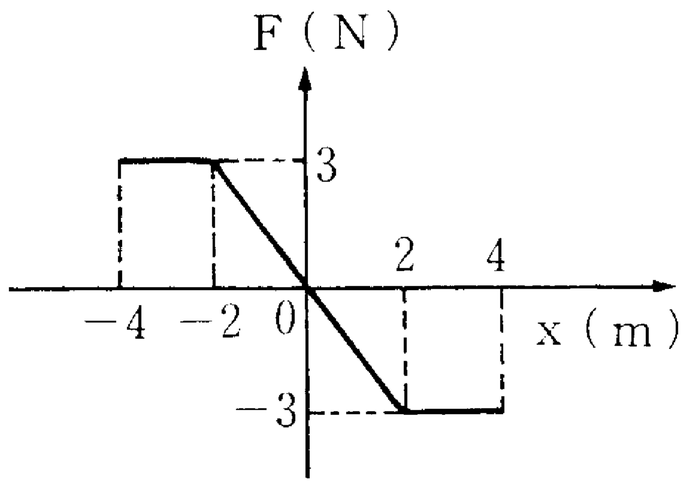
(A)由 x＝－4m 到 x＝－2m 作功 6J

(B)由 x＝－2m 到 x＝－4m 作功 6J

(C)由 x＝0 到 x＝4m 作功－9J

(D)由 x＝4m 到 x＝0 作功－9J

(D)由 x＝－4m 到 x＝4m 作功 0。【76.日大】答:(A)(C)(E)



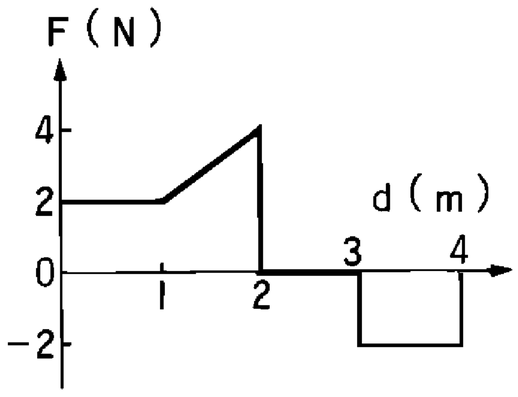
例61. 一物體質量 1 公斤，在原點由靜止做直線運動，其受力 F 與位置 X 的關係式為 F(X)=－3x＋12（MKS 制）

(a)物體由原點至 2 公尺時，力 F 對物作功_____焦耳。

(b)在 2 公尺處物體的速度為_____公尺／秒。答：(1)18；(2)6

※家庭作業

1.一物體靜置於一水平面上，受一力 F 後開始運動，力與距離關係如右圖，則物體移動 4 公尺後物體所獲得功(焦耳)為：(A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7 。答：(A)



2.一物體受力與位置之關係為 $F=(3x+4)$ Nt，其方向在+x 方向，則由 x=1 移至 x=5m，此力對物體作功？答：52J

3.質量 5 公斤的質點可沿 x 軸自由運動，最初為靜止，自原點受力的函數為 $F=x+2$ (F：牛頓，x：公尺)，則作用 6 公尺後，質點的速度大小為？答：$2\sqrt{3}$ m/s

例62. 一彈簧長 25 公分，若施以 20 牛頓之力，可伸長到 30 公分，今施力於該彈簧，使其由 20 公分的長度，壓縮到 15 公分之長度需作功？答：1.5J

例63. 壓縮一彈簧 X 長，需施力 F，作功 W。若再繼續壓縮 X 長，則：(A)需力 F (B)需力 2F (C)需再作功 2W (D)需再作功 3W (E)需再作功 $\frac{3}{2}FX$。【70 夜大】答：(B)(D)(E)

※家庭作業

1.將彈力常數 k 之彈簧一端固定，另端以等速 v 拉長 t 時間，則拉力共作功若干？

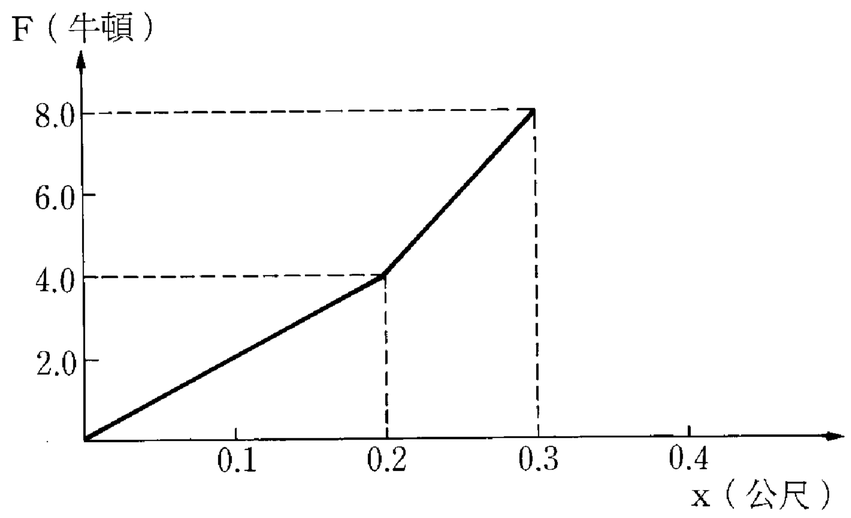
答：$\frac{1}{2}kv^2t^2$

2.如附圖，x 是一彈簧的壓縮量，F 是對應的彈力，則若將此彈簧壓縮 0.25 公尺，則

(1)當時彈簧的彈力爲_____牛頓。

(2)須作功_____焦耳。【67.夜大】

答：(1)6.0；(2)0.65

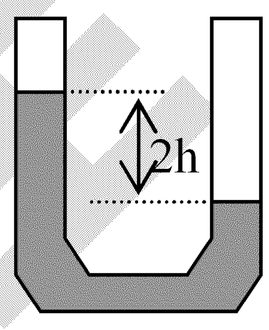


3.一彈簧長 30 公分，若施以 20 牛頓之力，可伸長至 35 公分，今施力於該彈簧使彈簧由 35 公分長伸長爲 40 公分長，則所須之功？

答：1.5J

例64. 邊長爲 1 m 之立方木塊，比重爲 0.5 浮在水面上，欲使質心沉入水面下 1 米，至少需作功若干？(設水面高度不變)。答：3675J

例65. 如圖所示，爲一內徑均勻之 U 型管將水銀注入，則兩邊液面等高。將右方液柱下壓迄兩邊液柱高度差 2h，則應作功若干焦耳？（設管內 1 米長之水銀質量 d 公斤）答：h^2dg

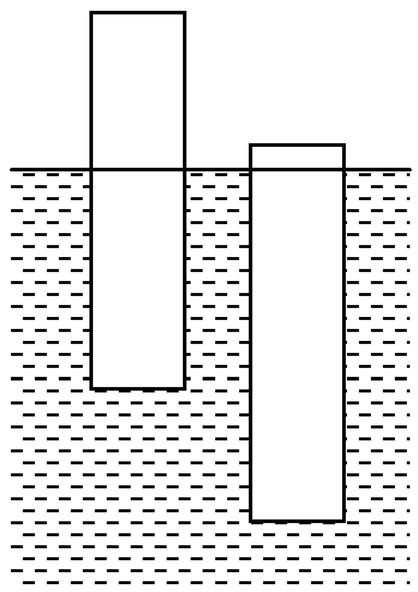


※家庭作業

1.長方體截面積 A，質量 m，浮在密度 ρ 之液體中，浸入部分高 H，把此物緩慢的完全取出需作功若干？(A)gH(m-ρHA/2) (B)mgH (C)2mgH (D)mgH/2。答：(A)(D)

2.一均勻圓柱形木棒，垂直浮於水中，浸入水中的部份爲原體積的一半。若水的密度爲 ρ，木棒長爲 L，截面積爲 A，以垂直向下的力，將木棒緩慢壓至恰好完全浸入水中，則所作之功？【76 年三專】答：$\dfrac{A\rho L^2 g}{8}$

3.一塊比重爲 0.6 之木塊高爲 20 cm，截面積爲 25 cm^2，靜浮於水面上(如下圖)：



(1)今施一力欲使此木塊更深沉 5 cm，則外力最少應對木塊作功？

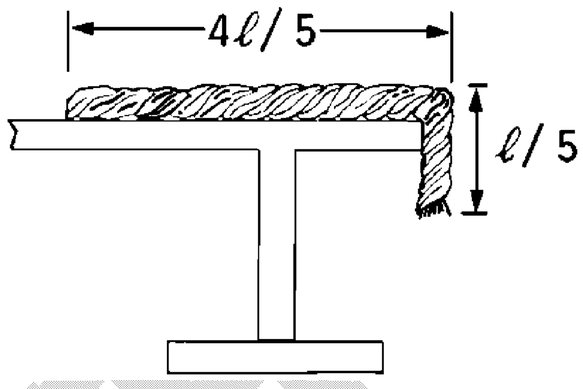
(2)若將木塊自水中垂直向上拉起 5 厘米，則最少應作功？

(3)若自木塊平衡位置全部壓入水中，至少應作功？

(4)施力將木塊由偏離平衡位置處放手，木塊振動的週期？

答：(1) 3.06×10^{-2} J；(2) 3.06×10^{-2} J；(3) 4.41×10^{-2} J；(4)0.7 秒

例66. 一長度 L 質量爲 m 的均勻繩子，其 $\frac{4}{5}L$ 長度置於一無摩擦力之水平面桌面上，另外 $\frac{L}{5}$ 長度則懸吊於桌邊下垂(如圖)，則：



(1)將此繩子全部拉回桌面上所需作的功爲若干？

(2)若桌角光滑，桌面動摩擦係數 0.5，則將此繩子全部拉回桌面上所需作的功爲若干？

(3)若下滑至全長 4/5 垂於桌邊，則重力所做之功爲？

(4)若桌面離地高 2L，則繩前端至地面瞬間，重力共作功若干？

【70 日大改】答：(1) $\frac{1}{50}mgL$ ；(2) $\frac{11}{100}mgL$ (3) $\frac{3}{10}mgL$ ；(4) $\frac{37}{25}mgL$

例67. 由 n 張葉片製成的百葉窗（葉片厚度不計），掛下時每張葉片相距 s，若每片質量爲 M，則全部窗簾拉上需做功？答：$\frac{1}{2}n(n+1)Mgs$

※家庭作業

1.質量爲 m 的繩，長度爲 L，其中 L/4 之長在光滑水平桌面上，其餘垂於桌緣，已知桌面距地面之高度爲 2L，求：

(1)將繩全部拉回桌面，至少需作功？答：

(2)靜止釋放此繩，求繩之下端著地時之速率爲？答：(1) $\frac{9}{32}mgL$ ；(2) $\frac{\sqrt{39gL}}{4}$

觀念八　功能原理

※功能原理

保守力作功$W_{保} = -\Delta U$

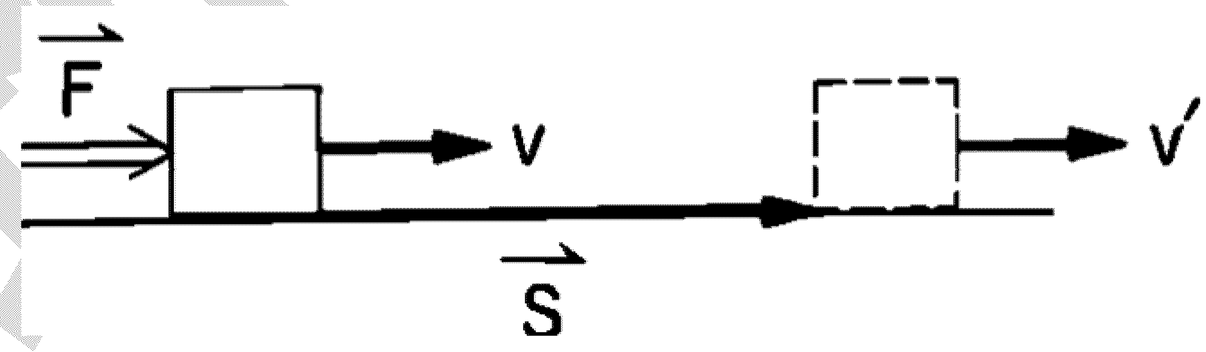
非保守力作功$W_{非} = \Delta E$

合力做功$W_{合} = \Delta E_k$

一、合力對一物體所作的功等於物體動能的變化量

$$W_{合} = \Delta E_k = E_k' - E_k = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

【證明】物體受力總和$= \vec{F}_{合}$，所經歷的位移為$\vec{S}$。若初速為$\vec{v}$，末速為$\vec{v}'$，



由等加速度公式：

$$\vec{v}'^2 = \vec{v}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{S}$$

$$\vec{v}'^2 = \vec{v}^2 + 2(\frac{\vec{F}}{m})\cdot\vec{S}$$

$$\frac{1}{2}m\vec{v}'^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \vec{F}\cdot\vec{S}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = E_k' - E_k$$

$$W_{合} = E_k' - E_k = \Delta E_k$$

說明：

(1)合力對物體作正功，則物體動能增加，即速率變快。反之，合力對物體作負功，則物體動能減少，即速率變慢。

(2)合力對物體不作功，則物體動能為定值，即速率不變。例如：等速率圓周運動：向心力與運動方向垂直，對物體作功為零，動能不變，只會改變物體的運動方向。

李移物理

二、保守力對一物體所作的功等於物體位能的變化量大小相等，正負相反

$$W_{保} = -\Delta U$$

【證明】∵位能＝外力反抗保守力等速移動所作的功

$$\therefore \Delta U = W_{外力} = \vec{F}_{外力} \cdot \vec{S} = -\vec{F}_{保守力} \cdot \vec{S} = -W_{保}$$

$$W_{保} = -\Delta U$$

說明：位能的減少，代表的就是位能釋放出來，以作功的形式轉變為其他能量。

三、非保守力對一物體所作的功等於物體力學能的變化

$$W_{非} = \Delta E$$

【證明】$\because W_{合} = \Delta E_k$

$$\therefore W_{保} + W_{非} = \Delta E_k$$

$$(-\Delta U) + W_{非} = \Delta E_k$$

$$W_{非} = \Delta E_k + \Delta U = \Delta E$$

四、功能原理的應用

(1)功的計算：①$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$ ＝F-x 圖所圍的面積

②利用功能原理(變力作功時特別好用)

(2)力學能守衡：若$W_{非} = 0$，則$\Delta E = 0 \Rightarrow$力學能守衡

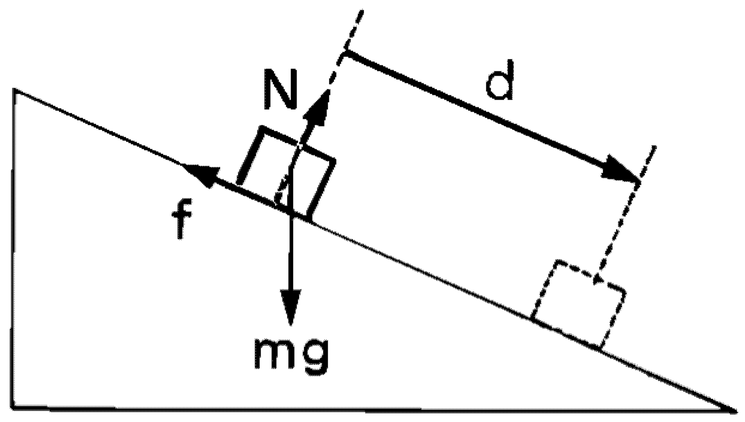
(3)功能原理的變形寫法：

$$W_{非} = \Delta E = E_2 - E_1 \Rightarrow E_1 + W_{非} = E_2 \Rightarrow (E_{k1} + U_1) + W_{非} = (E_{k2} + U_2)$$

(4)獨立性：$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = (F_x, F_y) \cdot (S_x, S_y) = F_x S_x + F_y S_y = W_x + W_y$

吳錫玠物理

五. 功能原理的例子：



一質量為 m 的木塊從斜面上滑下來，木塊受到正向力 N、重力 mg 和滑動摩擦力 f。其中正向力和木塊的位移方向垂直，故所作的功為零。

(1)光滑的斜面：力學能守恆

如果斜面光滑，摩擦力為零，則重力所作的正功使木塊的動能增加，但同時也使木塊的重力位能減少，代表動能和位能可以互相轉換，但其總和保持不變。

(2)粗糙的斜面：

摩擦力作負功，其值為 $-fd$ ，故 $\Delta E = \Delta(E_k + U_g) = -fd$ 。表示摩擦力所作的負功造成木塊力學能的耗散損失，使得接觸面的溫度增加。

六. 功能原理與衝量動量原理的比較：

若合力為定力，則

(1)動量變化 $\vec{J} = \vec{F}_{合力} \cdot \Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{P}' - \vec{P} = \Delta\vec{P}$

動能變化 $W = \vec{F}_{合力} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = E_k' - E_k = \Delta E_k$

(2)施力於一物體時，物體的動量必發生改變，但動能不一定改變，如等速率圓周運動。

七、有一個計程車駕駛，開著他心愛的ㄅㄨㄅㄨ，來到了一個人煙稀少的地方，突然看到了一男一女在路旁向他招手...

司機很高興，因為是大白天的，應該不會去載到不乾淨的東西！於是司機就把車子停在那兩人身旁....

接下來就像是一般搶劫的情形，那個男的就把刀子亮出來，架在司機的脖子上，可是那個男的並不要司機把車子跟錢拿出來，卻叫司機開始打手槍！

好不容易折騰了約一會兒，司機終於把第一發子彈擊發出.....

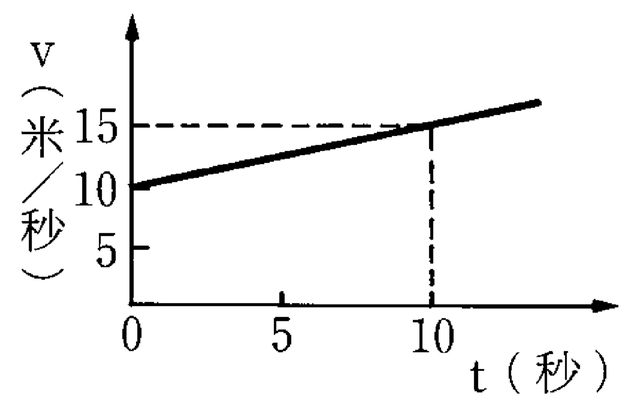
可是那個男的還不肯就此罷休，還是叫他繼續，再經過了十幾回合之後， 那個司機開始哀求他，因為再這樣子下去真的會把他的槍弄壞的..

於是那個男的看了看司機，低頭想了一下，便把刀子收了起來。

然後跟那位可憐的司機說：「這樣子我就放心啦！麻煩你載我妹妹到火車站，謝謝.....」

例68. 一物體質量為 m，其原來之動能為 T，由於受外力之作用，其速率增為 Δv ，則外力對此物體所作之功為： (A) $\sqrt{2mT}\Delta v+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2$ (B) $\frac{1}{2}m(\Delta v)^2$ (C) $\sqrt{2mT}\Delta v$ (D) $T+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2$ 。【70 日大】答：(A)

例69. 質量 4 kg 之物體，置於光滑水平面上，受一水平定力之作用 ，其速率－時間關係如附圖，試求：
(1)物體所受之力為若干 N？
(2)此 10 秒內，力對物體作功若干 J？
答：(1)2 N；(2)250 J

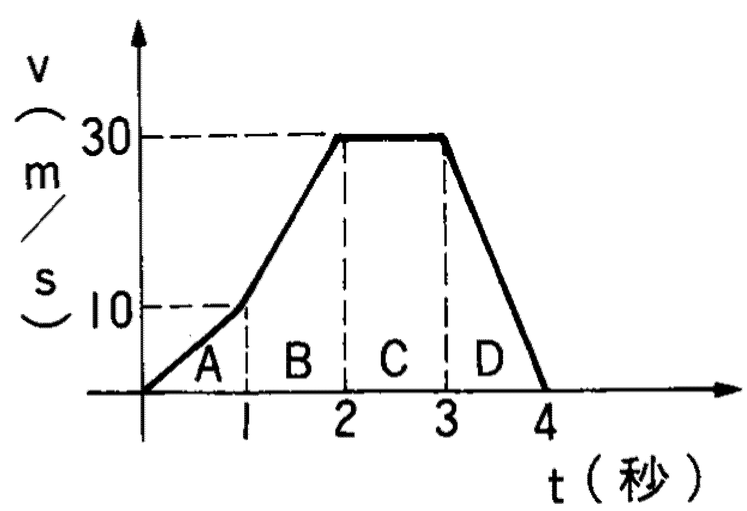


※家庭作業

1.一物體質量為 2kg，其原來之速度為 $\vec{v}_1=36\vec{i}-8\vec{j}$ m/s，由於受外力之作用，其速度變為 $\vec{v}_2=96\vec{i}+72\vec{j}$ ，則外力對此物體所作之功為？【70 日大】答：13040J

2.在 20 公尺高處，某人拋出一個質量為 2.0kg 的物體，物體離手時的速度是 15m/s，則人在拋擲時對物體作功是： (A)175J (B)225J (C)400J (D)600J (E)750J 。答：(B)

3.若已知一物體之速度-時間變化圖如右圖所示，則
(1)哪一區域之正功最大？
(2)哪一區域不作功？答：(1)B；(2)C



例70. 質量 4kg 的物體受到變力的作用，依 $x(t)=12t-t^3$ 的關係(x：公尺，t：秒)，由靜止開始作直線運動，求運動後 3 秒內變力所作之功？答：7938J

例71. 以作用力 F 推動光滑水平桌面上質量爲 m 的某物體，其速率由 v 逐漸至 2v，則該力對物體作功期間內，物體的位移爲若干？答：$\frac{3mv^2}{2F}$

※家庭作業

1.一質量爲 4kg 的物體靜止在光滑的水平面上，今以 4 牛頓的水平力作用於物體使它移動 8 米長，則

(1)物體所增加的動能？

(2)物體的末速？

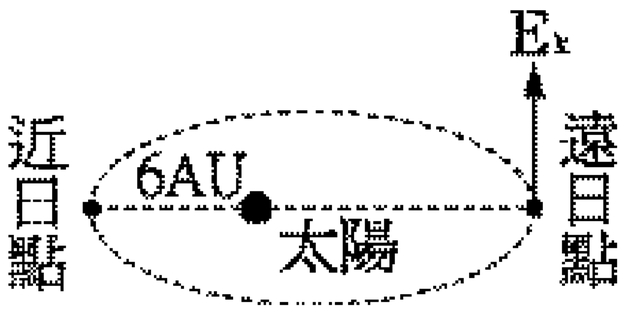
(3)物體所增加的動量大小？【66 日大】

答：(1)32J；(2)4m/s；(3)16 kg-m/s

2.質量爲 2kg 的物體，其位置向量 $\vec{r}$ (米)與時間 t(秒)的關係式爲 $\vec{r}=\frac{1}{3}t^3\vec{i}+2t\vec{j}$ ，則施力在前 2 秒內，對物體所作的功爲若干？答：16J

3.質量爲 2 公斤的物體在一直線上運動，其位置-時間的函數關係爲 $x(t)=3t^2+2t+1$ (S.I.制)，前 2 秒內物體所受合力對物體作功爲_____焦耳。答：192

例72. 如附圖所示，某彗星繞日運行的週期是 27 年，彗星的近日點與太陽的距離是 6 A.U.，假設慧星在遠日點時的動能爲 E_k，當該彗星自遠日點運行至近日點的期間內，太陽的引力對其作功爲_____。(以 E_k 表示之。)答：$3E_k$



※家庭作業

1.人造衛星以橢圓軌道繞地球運行，在遠地點時，其動能爲 K，若遠地點與近地點之距離比爲 4：1，則由遠地點運行至近地點，地球對人造衛星所作之功爲_____。答：15K

2.某衛星以橢圓軌道繞地運行，在近地點與遠地點距地球之距離比爲 3：4，若衛星在遠地點的動能爲 k，則此衛星由遠地點運行至地點期間，萬有引力對衛星所作之功？

答：$\frac{7}{9}k$

3.有一天，文文和小愛到圖書館借書

忽然文文眼睛一亮！

瞄到一本名叫「夢遺落在草原上」

「哦～！夢遺居然會落在地上！？趕緊叫小愛來看。」

兩人興奮地打開一看，目錄上寫著

「夢．遺落在草原上」

「什麼嘛！」文文憤憤不平的說

「將來我要出一本『月．經常掛天上』。」

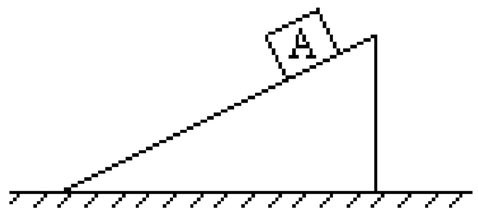
吳錫玠物理

例73. 一粒鋼珠從靜止狀態開始自由下落，然後陷入泥潭中。.若把在空中下落的過程稱爲過程 I，進入泥潭直到停住的過程稱爲過程 II，則
(A)過程 I 中鋼珠動量的改變量等於重力的衝量
(B)過程 II 中阻力的衝量的大小等於過程 I 中重力衝量的大小
(C)過程 II 中鋼珠克服阻力所做的功等於過程 I 與過程 II 中鋼珠所減少的重力勢能之和
(D)過程 II 中損失的機械能等於過程 I 中鋼珠所增加的動能【1995 大陸高考】
答：(A)(C)

※家庭作業

1.若物體在運動過程中受到的合外力不爲零,則
(A)物體的動能不可能總是不變的　(B)物體的動量不可能總是不變的
(C)物體的加速度一定變化　(D)物體的速度的方向一定變化【1994 大陸高考】
答：(B)

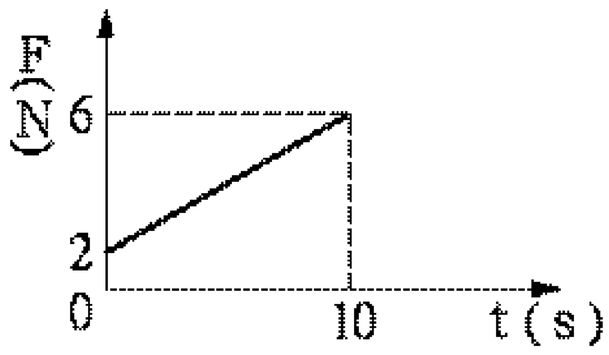
2.小物塊位於光滑的斜面上,斜面位於光滑的水平地面上。從地面上看,在小物塊沿斜面下滑的過程中,斜面對小物塊的作用力



(A)垂直於接觸面,做功爲零　(B)垂直於接觸面,做功不爲零
(C)不垂直於接觸面,做功爲零　(D)不垂直於接觸面,做功不爲零【1993 大陸高考】
答：(B)

3.哪些敘述正確？ (A)物體動量的變化與其所受的功成正比 (B)物體動能的變化與其所受合力作功量成正比 (C)物體動量的變化與其所受衝量成正比 (D)物體動能的變化與其所受衝量成正比 (E)物體自由下落所增加的動量與其所減少的高度成正比。
答：(B)(C)

例74. 質量 5 公斤的物體在光滑地面上以 6m/s 的速度向東運動，突然受向西的力作用 10 秒，作用力 F 對時間 t 如圖，作用力對物體所作的功？答：-80J



例75. A 和 B 兩船質量均為 m，靜止在河面上並相隔一定距離，一人站在 A 船上用繩子以定力 F 拉 B 船，水的阻力不計，則當 B 船開始運動後經過 t 秒，人作的功為_____。（人之質量與船比較可忽略不計）答：$\frac{F^2t^2}{m}$

※家庭作業

1.質量為 M 的靜止物體，受一量值為 F 之固定力作用後，t 秒內此力作功？答：$\frac{F^2t^2}{2m}$

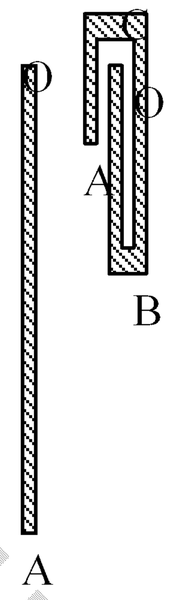
2.物體自靜止開始受衝量 J 作用後有速度 v，此期間內有外力對物體作功 W。若物體再繼續受相同之外力作用速度達 2v，則應： (A)再受衝量 J (B)再受衝量 2J (C)再受衝量 3J (D)再有外力作功 W (E)再有外力作功 3W 。答：(A)(E)

3.一質量 m 速率為 v 之物體受一與運動方向相同之定力 F 作用，經 t 時間後其速率增至 nv，則此力對物體所作之功為

(A)$\frac{Fv}{2}$ (B)$\frac{(n+1)Fvt}{2}$ (C)$\frac{Ftn^2v^2}{2}$ (D)$\frac{(n^2-1)mv^2}{2}$ (E)$\frac{F^2t^2}{2m}$ 。答：(B)(D)

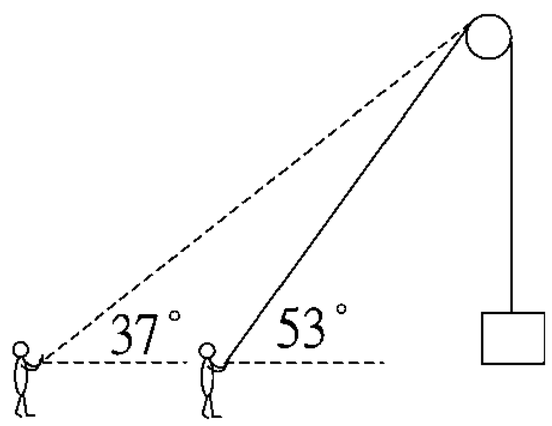
4.若有一衝量 $\vec{J}=1.5\vec{i}+2.5\vec{j}$ 牛頓-秒作用在初速度 $\vec{v}=7.0\vec{i}-3.0\vec{j}$ 公尺/秒，而質量 50 公克的質點上，則在此過程中力對該點所作的功？【78.三專】答：88 焦耳

例76. 如左圖一均質繩長ℓ質量 m，O 點固定鉛直懸掛，將 A 端繞 O 點折成如右圖所示，且$\overline{CA}=\dfrac{\ell}{5}$，則至少須作功若干？答：$\dfrac{8}{25}mg\ell$



例77. 長 10 公尺，質量 40 公斤的梯子平放在地面上，若將其一端抬起倚在牆角與垂直的牆面成30°，需作功若干？答：$980\sqrt{3}$ J

例78. 如圖，人在水平方向行走，而將跨過滑輪懸掛的 25 公斤物體拉起，當此人在平路上行走 2 公尺時，繩與水平的夾角由 53° 變成 37°，若物體是以等速率升高，則人做功？答：350 焦耳



李鴻物理

※家庭作業

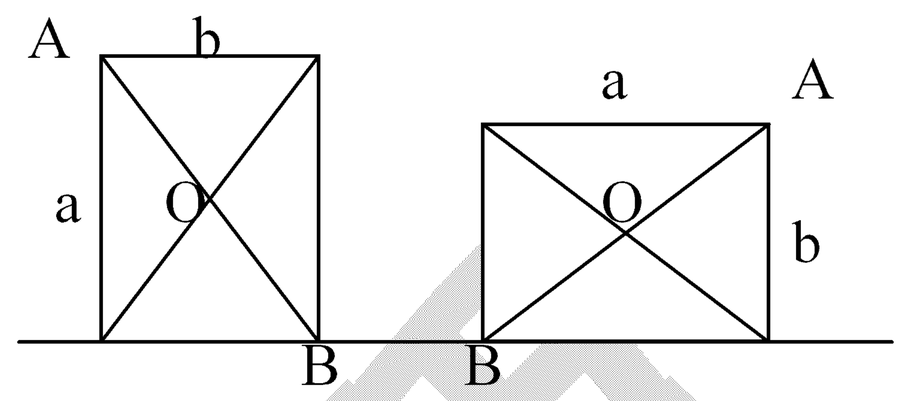
1.有一長 a 寬 b 之長方體木箱，質量 m（如右圖）。

則：

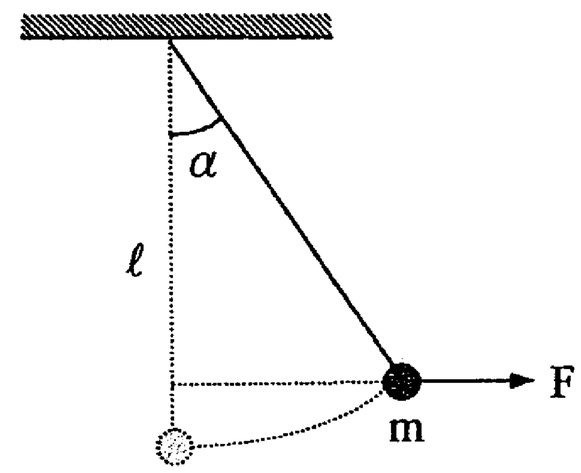
(1)欲使其傾倒時至少需作功若干？

(2)再使其立起需作功若干？

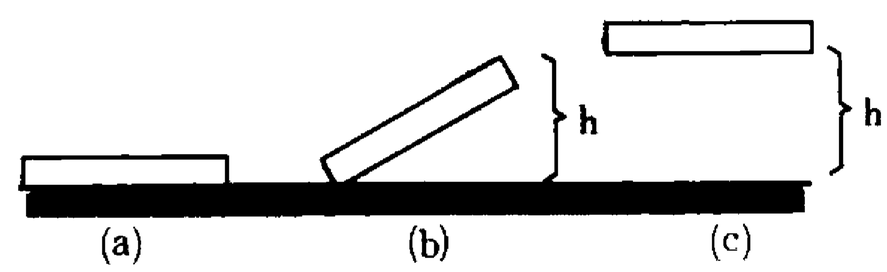
答:(1) $\frac{1}{2}mg(\sqrt{a^2+b^2}-a)$ (2) $\frac{1}{2}mg(\sqrt{a^2+b^2}-b)$



2.如右圖所示，一質量為 m 的擺錘在開始時，鉛直懸吊在一條長度為 ℓ 的繩子下端。繩子的質量很輕，可忽略不計。現以外力 $\vec{F}$，沿水平方向拉動擺錘，使其很緩慢地沿鉛直面上的一個半徑為 ℓ 的圓弧，移至新的平衡點，這時繩子和鉛直方向之間的夾角為 α（$\alpha<90°$）。試用在此過程中，外力 $\vec{F}$ 共作功多少？【2003 奧林匹亞初選】答：$mgl(1-\cos\alpha)$



3.如右圖，將一長條之木棒，如(a)放置，今將之改為(b)與(c)之放置，則所需作功之比若干？答：1：2



4.斜向拋射一石，質量 m，初速 v，仰角 θ，不計空氣阻力，重力加速度為 g，則最初拋射至此石達頂點，重力對石作功？答：$-\frac{1}{2}mv^2\sin^2\theta$

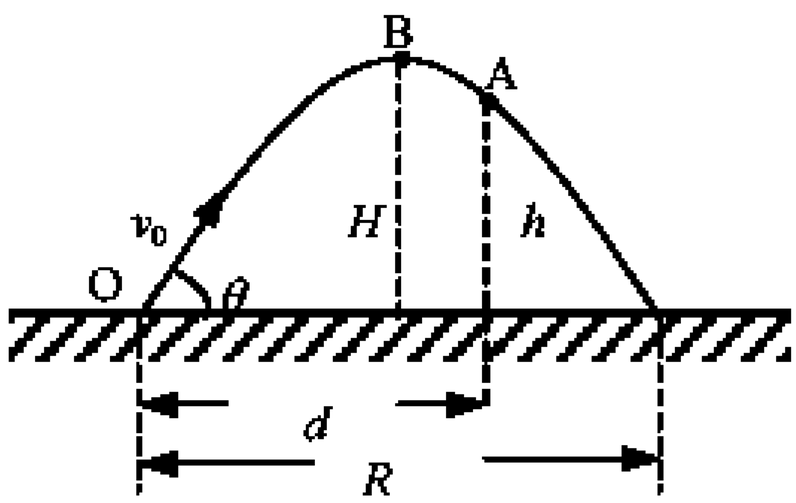
5.以動能 10J 及仰角 60° 斜拋一小石頭，當其運動方向與水平成 30° 時，重力對小石頭的作功是多少？答：-6.7J

6.質量 500 公克的棒球由樓頂水平拋出，經 2 秒落地，則全程重力對棒球所作之功為多少焦耳？（$g=10\ m/s^2$） (A)100 (B)200 (C)400 (D)500 焦耳。答：(A)

7.某物在地表作斜拋，若物體質量 m，則上升過程最後一秒內，重力對物體所作之功為_____。(重力加速度為 g)答：$-\frac{mg^2}{2}$

例79. 用繩垂直放下一質量爲 M 之木塊，以 g/4 之等加速度下降 d 之距離，則
(1)繩對木塊所做之功？ (2)重力對木塊所做之功？
(3)合力對木塊所做之功？【71 夜大改】答：(1) $-\dfrac{3Mgd}{4}$ ；(2) Mgd ；(3) $\dfrac{Mgd}{4}$

例80. 一粒質量爲 m 的小石頭從地面上的 O 點以初速 v_o，仰角 θ 被射出，如右圖所示。B 點爲小石頭運動軌跡的最高點，B 點與地面距離爲 H。A 點則是越過最高點後的某一位置，A 點與 O 點間的水平距離爲 d ($\dfrac{2R}{3} > d > \dfrac{R}{2}$，R 爲水平射程)，A 點與地面間的距離爲 h。若將小石頭在地面的重力位能取爲零，重力加速度爲 g，且不計空氣阻力，則下列有關小石頭的敘述，哪些正確？



(A)在 A 點的總力學能爲 mgh　　(B)從 O 點運動至 A 點共需時 $\dfrac{d}{v_o}$

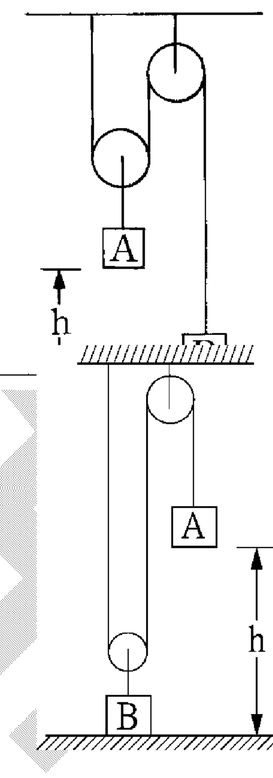
(C)從 O 點運動至 A 點共需時 $\dfrac{v_o \sin\theta}{g} + \sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}}$

(D)在最高點 B 時，速度與加速度互相垂直

(E)從 O 點運動至 A 點的過程中，重力總共作功 mgh。【93.指考補考】答：(C)(D)

※家庭作業

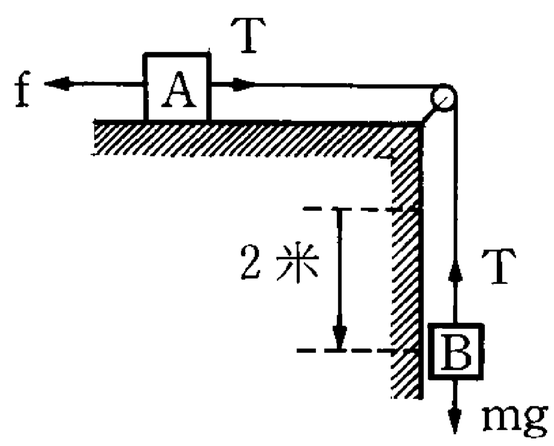
1.不計滑輪、繩子質量及一切摩擦阻力，如圖，若 A 的質量爲 4m，B 的質量爲 m，則兩者等高時，重力對 A、B 所作之功？答：$\frac{2}{3}mgh$



2.如附圖，滑輪、繩子質量不計，忽略一切阻力，A 的質量爲 4m，B 的質量 m，B 靜置於地面，A 離地面 h 高度釋放，當 A、B 等高時，重力對 A、B 所作之功？答：$\frac{7}{3}mgh$

3.重 100kgw 的木塊懸於長 5m 的繩端，以一力向旁推離鉛直線 3m 並維持於原處： (A)欲保持木塊於該處需水平力 75kgw (B)維持木塊於該處，對木塊需作功 750 焦耳 (C)將木塊推離時，對木塊共作功 980 焦耳 (D)同(C)繩之張力對木塊作正功 (E)同(C)重力對木塊作負功。答：(A)(C)(E)

4.以輕繩連接質量同爲 4 kg 的 A、B 兩物體後，B 等速下降 2 m，此過程中 (A)重力對 A 作功 0 (B)重力對 B 作功 78.4J (C)繩力對 A 作功 0 (D)繩力對 B 作功 78.4J (E)摩擦力對 A 作功–78.4 J。答：(A)B)(E)



5.以手托一質量爲 2 公斤的物體，並使手以等速下降 2 公尺距離 ($g=9.8m/s^2$)，則：

(1)手對物體作功？答：

(2)作用於物的合力作功？答：(1)-39.2J；(2)0

6.用繩把質量 m 的物體以加速度 a 加速提升 h 公尺拉力做功_____。(令重力加速度爲 g)

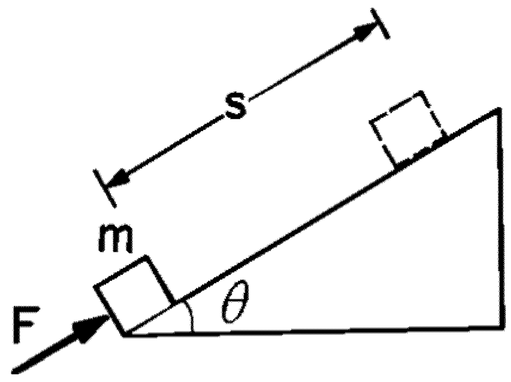
答：m(g+a)h

7.蒼蠅每天的飯都是大便,

有一天蒼蠅一家在吃飯，蒼蠅大哥就問蒼蠅媽媽：爲什麼我們每天都吃大便？

媽媽回答：吃飯的時候不要講這個.....

例81. 如圖，在光滑的斜面上，施一力 F 使質量 m 物體沿斜面向上運動 S 長度，則：
(1)斜面對物體作功若干？ (2)重力對物體作功若干？
(3)施力者(F 力)對物體作功若干？
答：(1)0；(2)$-mgS\sin\theta$；(3)FS



例82. 在斜角爲 30°的斜面上，質量 1kg 之物體自斜面底部以 10m/s 之初速沿斜面上滑，滑行之最大距離爲 8 公尺，求($g=10m/sec^2$)：
(1)上滑期間，重力共作功爲？
(2)物體上滑後，又滑至原出發點時，其動能損失？

※家庭作業

1.將一質量 m 之物體置於傾斜角θ之光滑斜面上，並施一水平力$\vec{F}$使其上滑距離 d，則 (A)作功 $Fd\cos\theta$ (B)重力作功 $mgd\sin\theta$ (C)正向力作功 0 (D)合力作功爲 0 (E)合力作功爲$(F\cos\theta-mg\sin\theta)d$。答：(A)(C)(E)

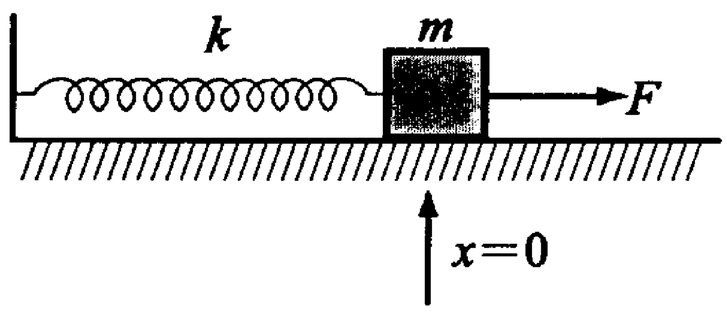
2.一木塊質量爲 m，放在傾斜 30° 斜面上，而木塊與斜面間之摩擦係數爲 0.5，則將木塊自斜面底沿斜面等速拉上一段距離 S 所作之功？答：$\frac{2+\sqrt{3}}{4}mgs$

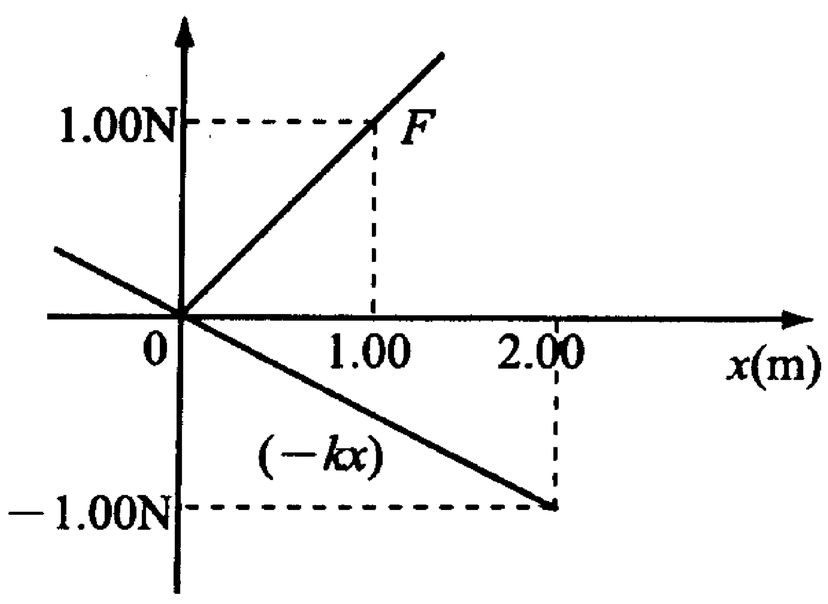
3.一物體靜止在升降機的地板上，在升降機加速上升的過程中，地板對物體的支援力所做的功等於 (A)物體勢能的增加量 (B)物體動能的增加量 (C)物體動能的增加量加上物體勢能的增加量 (D)物體動能的增加量加上克服重力所做的功【1999 大陸高考】
答：(C)(D)

例83. 置於光滑水平桌面上的輕彈簧原長 40cm，一端固定於牆壁上，另一端施以 20N 之力，可使其伸長至 50cm。若欲使該彈簧從 50cm 的長度伸長為 60cm，則需對其作功多少？答：3J

例84. 於水平方向作 S.H.M.之物體，質量 m，週期為 T，振幅為 R，則物體從位置 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 運動至位置 $x=\frac{R}{2}$ 之最短時間內恢復力對物體功為若干？答：$\frac{m\pi^2R^2}{T^2}$

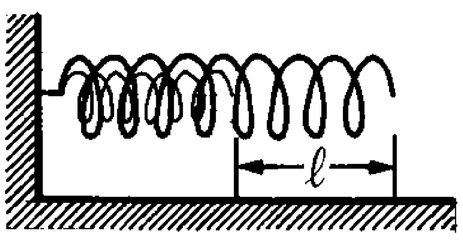
例85. 如左下圖所示，在無摩擦之水平地面上，有一彈簧－物體系統，彈簧之力常數為 k，物體 m 離開平衡位置之位移以 x 表示，若物體受到如右下圖所示之水平施力 F 與彈簧力－kx 作用，由平衡位置移動至 x＝1.00m 處，則下列關於此運動過程之敘述，何者正確？ (A)施力 F 與彈簧力合力對物體所作之功為零 (B)彈簧力對物體所作之功為正，等於 0.250J (C)彈簧－物體系統的位能減少 0.250J (D)物體的動能增加 0.250J (E)物體的速率愈來愈慢。【91 指考】答：(D)



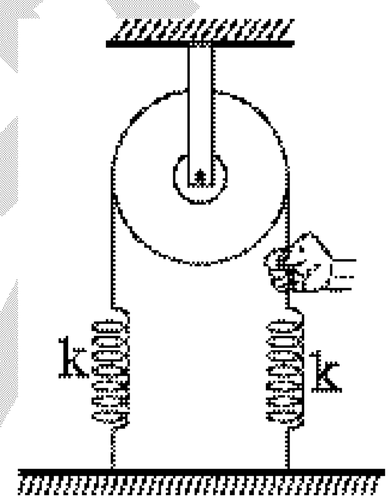


※家庭作業

1.力常數均爲 k，而長度差爲 ℓ 之二彈簧，如附圖放置於光滑水平面上，若以一水平力擠壓，欲使小彈簧產生 ℓ 之形變，共須作功若干？答：$\frac{5}{2}k\ell^2$



2.如圖所示力常數 k＝75 N/m 的兩相同輕彈簧以輕繩相連接而繞過無摩擦的定滑輪，他端則固定於地面上，兩彈簧皆已伸長 0.111m。今用手將右繩拉下 0.055m，求作功多少？答：0.223J



3.一物體質量爲 5 公克，作振幅 10 公分，週期 12 秒之 S.H.M.，若此物體自最大位移處運動 3 秒，則施於物體之力所作的功爲何？答：$\frac{125\pi^2}{18}$ 耳格

4.一氧化碳分子中，碳與氧原子在平衡時相距 1.13×10^{-10} 公尺，當兩原子之距離增大至 1.15×10^{-10} 公尺時，兩原子間之吸引力爲 3.74×10^{-10} 牛頓。假定虎克定律成立，則當兩原子距離自 1.13×10^{-10} 公尺增大至 1.15×10^{-10} 公尺時，分子位能增加：(A)2.46×10^{-20} 焦耳 (B)4.30×10^{-20} 焦耳 (C)7.58×10^{-22} 焦耳 (D)3.74×10^{-22} 焦耳。【70 日大】答：(D)

5.彈簧原長 10m，今自全長 12m 拉長至 15m 時，位能增加 E。若再拉長至全長 18m，需作功？答：$\frac{13}{7}$E

6.甲乙丙三人一起出遊...甲感冒了...晚上，大家同睡一床，甲睡中間...
半夜...甲打了一個大噴涕，乙丙整個臉上都是甲的口水及鼻涕...
乙丙很無奈的說：「下次要通知我們！」
過了半個時辰...甲：「注意了～～」
乙丙聞言趕緊鑽入棉被中，並確定與外界沒有連通。這時只聽到『ㄅㄨ～～～』的一聲..

例86. 質量分別爲 m 與 M 的兩物體，移動時所受的阻力相同，若
(1)初速相同，求①所行之距離比？②所經之時間比？
(2)初動能相同，求①所行之距離比？②所經之時間比？
(3)初動量相同，求①所行之距離比？②所經之時間比？

答：(1)①m：M ②m：M；(2)①1：1 ②$\sqrt{m}$ ：$\sqrt{M}$ ；(3)①M：m ②1：1

※家庭作業

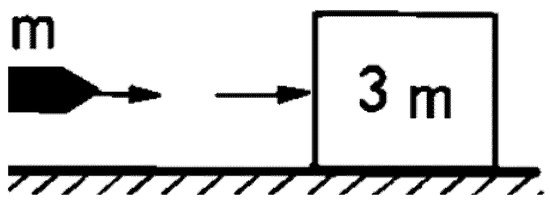
1.有 A、B 兩個物體，它們的質量是 $m_A>m_B$，如果開始時動能相同，分別受一定之外力 F_A 和 F_B 的作用，經過相同的位移後停下來，經歷的時間分別是 t_A 和 t_B，則： (A) $F_A<F_B$，$t_A=t_B$ (B) $F_A>F_B$，$t_A=t_B$ (C) $F_A=F_B$，$t_A>t_B$ (D) $F_A=F_B$，$t_A<t_B$ (E) $F_A=F_B$，$t_A=t_B$。答：(C)

2.物體 A 放在光滑水平面上，物體 B 放在粗糙水平面上，在相同水平推力下移相同的距離，而兩物體的動能變化量分別爲ΔE_A和ΔE_B，推力對二物體做功 W_A 和 W_B，則：(A)$W_A=W_B$，$\Delta E_A>\Delta E_B$ (B)$W_A=W_B$，$E_A=\Delta E_B$ (C) $W_A=W_B$，$\Delta E_A<\Delta E_B$ (D) $W_A>W_B$，$\Delta E_A>\Delta E_B$ (E) $W_A<W_B$，$\Delta E_A>\Delta E_B$。答：(A)

3.一質量爲 4kg 的物體靜止在光滑的水平面上，今以 4 牛頓的水平力作用於物體使它移動 8 米長，則
(1)物體所增加的動能？ (2)物體的末速？
(3)物體所增加的動量大小？【66.日大】答：(1)32J；(2)4m/s；(3)16 kg-m/s

4.時速 36 公里/小時的汽車剎車後，以等加速度滑行 20 公尺才停止，在同一路面上，汽車的時速增到 72 公里/小時，則剎車後所滑行的距離爲(公尺)：(A)30 (B)40 (C)60 (D)80 (E)100。【夜大】答：(D)

例87. 如右圖，質量 m 的子彈以速度 v 水平入射到靜置於固定水平面上，長度為 L 質量為 3m 的木塊，而子彈恰巧打入 L/2 深，若 m 與 3m 的作用力為定值，則子彈若要貫穿木塊，所須之速率至少為 (A)$\sqrt{2}v$ (B)$\sqrt{3}v$ (C)$2v$ (D)$\sqrt{5}v$ (E)$\sqrt{6}v$ 。答：(A)



※家庭作業

1.質量 m、速度為 400m/s 的子彈，恰可射穿 5cm 厚的固定紙板；若欲射穿厚 20cm 的固定紙板(假設子彈所受的阻力不變)，子彈的速度最小應為多少？答：800m/s

2.質量 m 之木塊置於一斜角 θ 的斜面上恰可等速下滑，現若以初速 v 由斜面底部沿斜面上滑，則其上滑的最大高度？答：$\frac{v^2}{4g}$

3.質量為 m 的木塊，以初速 v 沿仰角 30° 之粗糙斜面向上滑行 S 距離即停止，若初速改為 2v，則可向上滑行多少距離？答：4S

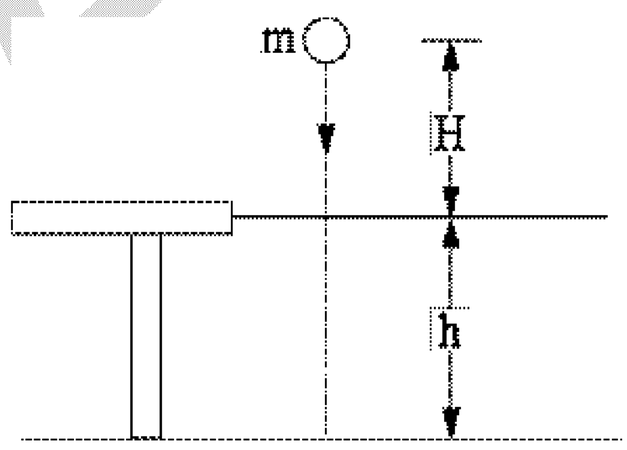
4.在光滑水平面上有一靜止的物體，現以水平恒力甲推這一物體，作用一段時間後，換成相反方向的水平恒力乙推這一物體。當恒力乙作用時間與恒力甲作用時間相同時，物體恰好回到原處，此時物體的動能為 32 焦，則在整個過程中，(1)恒力甲做的功？(2)恒力乙做的功？【1996 大陸高考】答：8 焦，24 焦

楊朝棟物理

例88. 一個重量爲 w 之小石子被垂直上拋，其初速率爲 v。設空氣施給小石子一固定大小之阻力 f，而阻力方向與小石子運動之方向相反。求：(1)小石子上升之最大高度？(2)小石子落地時之速率？(答案以 w、v、g 表示)【78 日大】

答：(1) $\dfrac{wv^2}{2g(w+f)}$ ；(2) $v\sqrt{\dfrac{w-f}{w+f}}$

例89. 一物體 m 自桌面上方 H 高處自由落下，桌高 h，如圖所示，設空氣阻力 f 恆與運動方向相反爲定值，設以桌面爲零位面，則物體在碰觸地面瞬間的總力學能爲
(A) $mg(H+h)$ (B) mgH (C) $mgH-f(H+h)$
(D) $(mg-f)h$ (E) $mg(H+h)-f(H+h)$。答：(C)

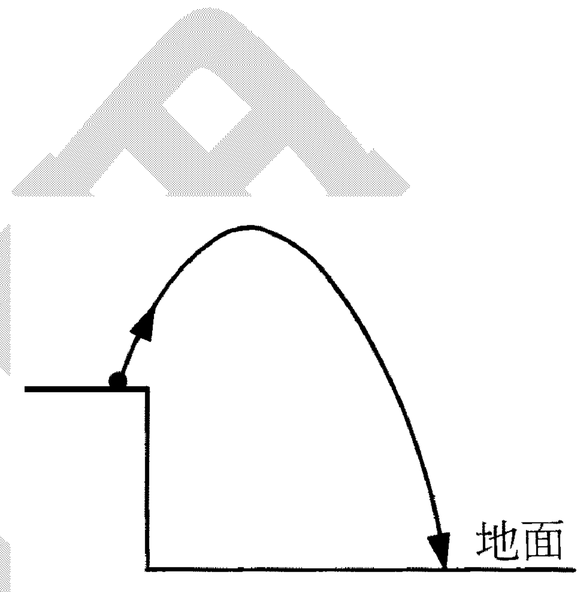


例90. 物體以 60J 的初動能被鉛直上拋，受空氣的阻力恒爲定值，升到某一高度時，動能減少了 30J，力學能則減少了 10J；那麼該物體落回拋出點時的動能？【93 校內初賽】答：20J

吳錫玠物理

※家庭作業

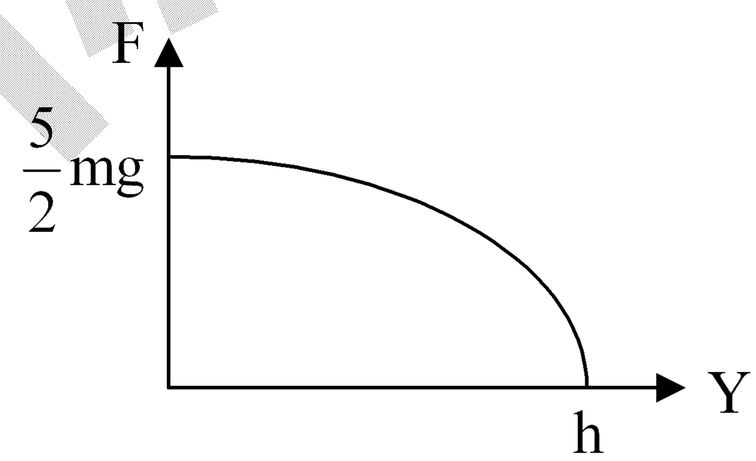
1.作鉛直上拋運動的物體，它在上升過程中，如果動能減少爲 A，位能的增加爲 B，物體克服重力所做的功爲 C，物體克服空氣阻力所做的功爲 D，下列表示哪些是正確的？(A)A＝C＋D (B)A－B＝C＋D (C)A－B＝D (D)A＋B＝C＋D (E)A＝B＋C。答：(A)(C)



2.如圖，將質量爲 100g 的小球自高度爲 20 公尺的 A 點以 18m/s 的初速斜拋出去，落回地面時的速率爲 20m/s，求空氣阻力所作的功。答：W=－15.8(J)

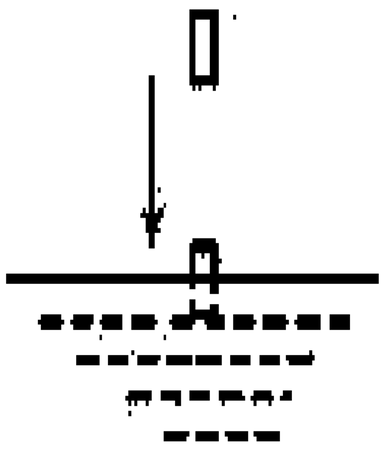
3.質量爲 100 克之石子自高處向地面落下，經過 100 米後，速度達到 20 米/秒。其消耗於空氣阻力之能量？【60 日大】答：78 焦耳

4.跳水運動員從高於水面 H=10 米的跳臺自由落下，假設運動員的質量 m=60 千克，其體形可等效爲一長度 L = 1.0 米、直徑 d = 0.30 米的圓柱體，略去空氣阻力。運動員入水後，水的等效阻力 F 作用與圓柱體的下端面，F 的量值隨入水深度 Y 變化的函數曲線如圖。該曲線可近似看作橢圓的長、短軸 OY 和 OF 重合。橢圓與 Y 軸相交於 Y = h 處，與 F 軸相交於 $F=\frac{5}{2}mg$ 處。爲了確保運動員的安全，試計算水池中水的深度 h 至少應等於多少。（水的密度 $\rho=1.0\times10^3$ 千克/米 ^{3}）（15 分）



【93 校內複賽】答：$\frac{1000+22.5\pi}{120(\pi-1)}\approx 4.94$

5.密度爲 $\rho(\rho<\rho_{水})$ 木棒，從某一高處自由下落，然後進入水中，水和空氣阻力忽略不計，則木棒在進入水的過程中，以下正確的分析是：(A)棒一進入水就作減速運動 (B)棒的動能先增大後又減小 (C)棒的力學能守恆 (D)棒所受合力爲零時，返回向上運動【94 校內初賽】答：(B)



例91. 一質量 2.0 公斤的物體放在水平桌面上，物體與桌面的滑動摩擦係數為 0.25，今以 6.0 牛頓的力沿水平方向推物體，使作等加速度運動，當物體移動 5.0 公尺時，此物體的動能約增加多少焦耳？ (A)30 (B)15 (C)10 (D)5 (E)2 。【92.指考】答：(D)

例92. 有一 2.0 kg 的木塊，在水平的桌面上作半徑為 1.2 公尺的圓周運動，轉一週後，其速率由 10 m/s 降到 8 m/s，則於停止前，木塊還能繞？週。答：16/9

※家庭作業

1.質量 6.0 kg 的物體，沿一粗糙水平面以 12 m / s 的初速滑行，8 秒末即停止，則摩擦力（設大小為一定值）對該物所作功為多少？答：– 432 J

2.質量 2 公斤的物體，以 20 公尺 / 秒向東的初速度，沿一粗糙水平面上滑行 50 公尺遠後即靜止不動，則摩擦力（設其大小為一定值）在此段時間內對該物體所作的功？答：– 400 焦耳

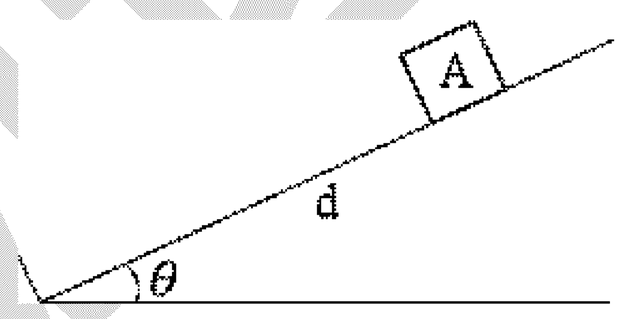
3.某人將質量為 420 g 的足球踢出，球速為 20 m/s，沿地面行進了 80 m 後停了下來，球和腳接觸的距離為 20 公分，忽略空氣阻力的作用，則：
(1)踢球時腳對球的平均作用力有多大？
(2)地面和球的平均摩擦力？答：(1)F＝420(N)；(2)f＝1.05(N)

4.欲使一部時速 108 公里，車重 1500 公斤的 BMW 停止，地面施於輪胎摩擦力需作多少負功？(A)6.75×10^5 (B) 8.25×10^5 (C) 4.5×10^5 (D) 2.15×10^5 焦耳。答：(A)

吳錫玠物理

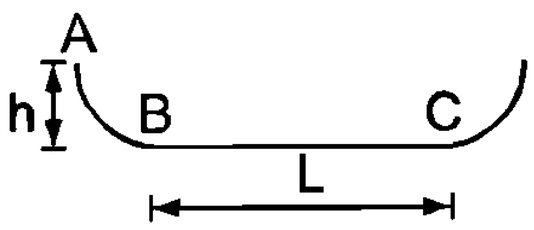
例93. 一質量為 m 的物體以一初速沿斜角為 θ 的斜面上滑，滑行 d 距離後折返下滑。當其滑回原處時的速率為初速的 $\frac{1}{3}$，求物體與斜面之間的動摩擦係數？【2002 奧林匹亞初選】答：$\frac{4}{5}\tan\theta$

例94. 在斜角為 θ 的斜面底端有一個與斜面垂直的彈性擋板，一物塊 A 在距擋板 d 處，沿斜面初速 v_0 開始運動，每次物塊 A 與擋板碰撞時均無力學能損失，如圖所示，已知物塊 A 與斜面間的摩擦係數為 μ ($\mu < \tan\theta$)，則物塊 A 從開始運動到最後靜止通過的總路程？答：$\frac{d}{\mu}\tan\theta + \frac{{v_0}^2}{2\mu g\cos\theta}$



例95. (1)如圖一質點在兩端抬高而中間平坦之軌道滑行，平坦部分長 L=2m，動摩擦條數 0.2，彎曲部分之軌道無摩擦，由 A 點釋放質點，A 高於軌道的平坦部分 h=1m，最後質點停止於距 B 點若干遠處？

(2)若 h=2，L=3，質點最後恰停在 BC 中點，則下列何者不可能是 BC 間之動摩擦係數？ (A)4/3 (B)4/7 (C)4/9 (D)4/15 (E)4/21。答：(1)1m；(2)(B)



※家庭作業

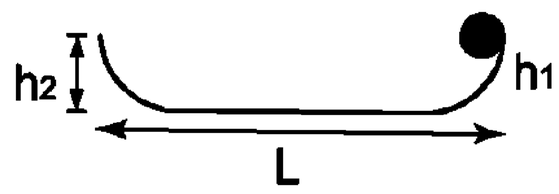
1.質量 m 的物體以初速 v 沿斜面直線向上滑距離 S 瞬間靜止後，立刻又由斜面沿原路徑直線下滑。經過原出發點時速率爲 v/3，全程共費時 t，則(1)斜面作用在物體的摩擦力大小？(2)摩擦力對物體所施的平均功率？答：(1) $\frac{2mv^2}{9S}$ ；(2) $\frac{-4mv^2}{9t}$

2.(1)一物體以 9.8 米/秒的初速從地面沿仰角 30° 的光滑斜面向上運動。此物體所能達到的最大高度爲 (A)2.45 米 (B)4.9 米 (C)9.8 米 (D)14.7 米 (E)19.6 米。

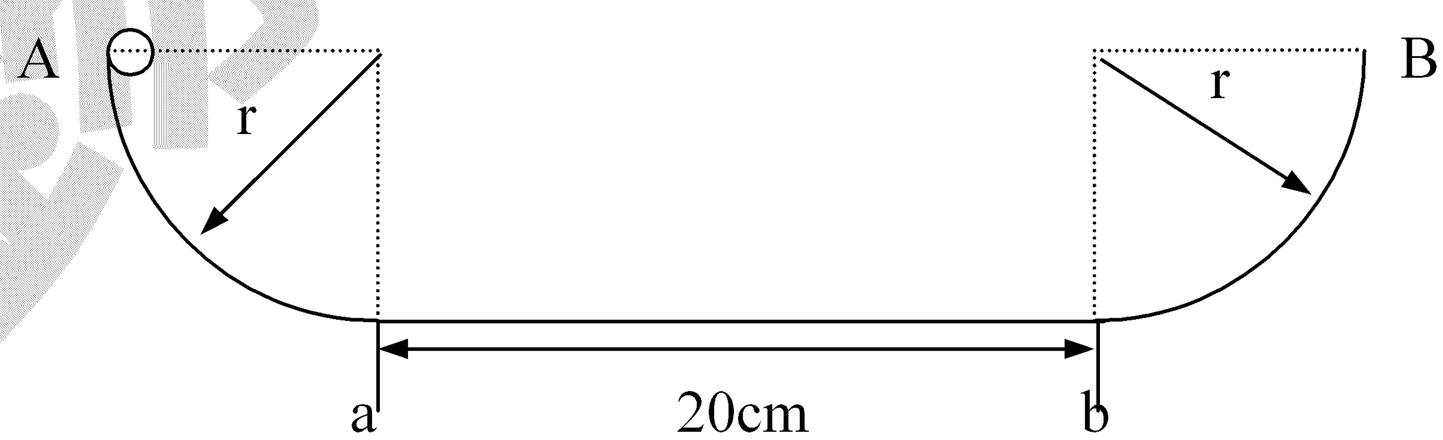
(2)若斜面有摩擦而摩擦係數爲 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，則物體所能達到的最大高度爲 (A)2.45 米 (B)4.9 米 (C)9.8 米 (D)14.7 米 (E)19.6 米。答：(1)(B)；(2)(A)

3.一人坐在雪橇上，從靜止開始沿著高度爲 15 米的斜坡滑下，到達底部時速度爲 10 米/秒。人和雪橇的總質量爲 60 千克，下滑過程中克服阻力做的功？(取 g=10 米/秒 ^{2})【1995 大陸高考】答：6000 焦

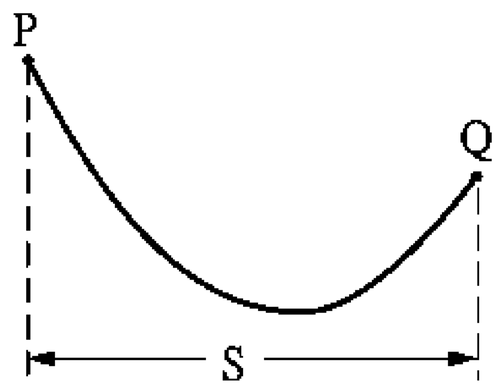
4.右圖中斜面光滑，水平面有摩擦，m 由右邊高 h_1 下滑爬升到左邊 h_2 高處，則水平面之摩擦係數爲？答：$\frac{h_1-h_2}{L}$



5.如圖所示之一碗，其邊緣部分由光滑圓弧形曲面構成，半徑爲 10cm，底部則爲粗糙水平面，長 20cm，動摩擦係數 μ_k=0.15，今有一質量爲 50 克的小木塊，由碗左邊緣上端沿碗內面下滑，若碗固定於地面，則(1)該木塊最後停於何處？(2)又其經過 a、b 兩點時之速率各爲若干？【1994 奧林匹亞初選】答：(1)停於距 b 點 6.7cm；(2)第一次 v_A=1.4m/s，v_B=1.2m/s，第二次 v_A=0.92m/s，v_B=1.2m/s，第三次 v_A=0.89m/s，v_B=0.51m/s，第四次 v_B=0.51m/s

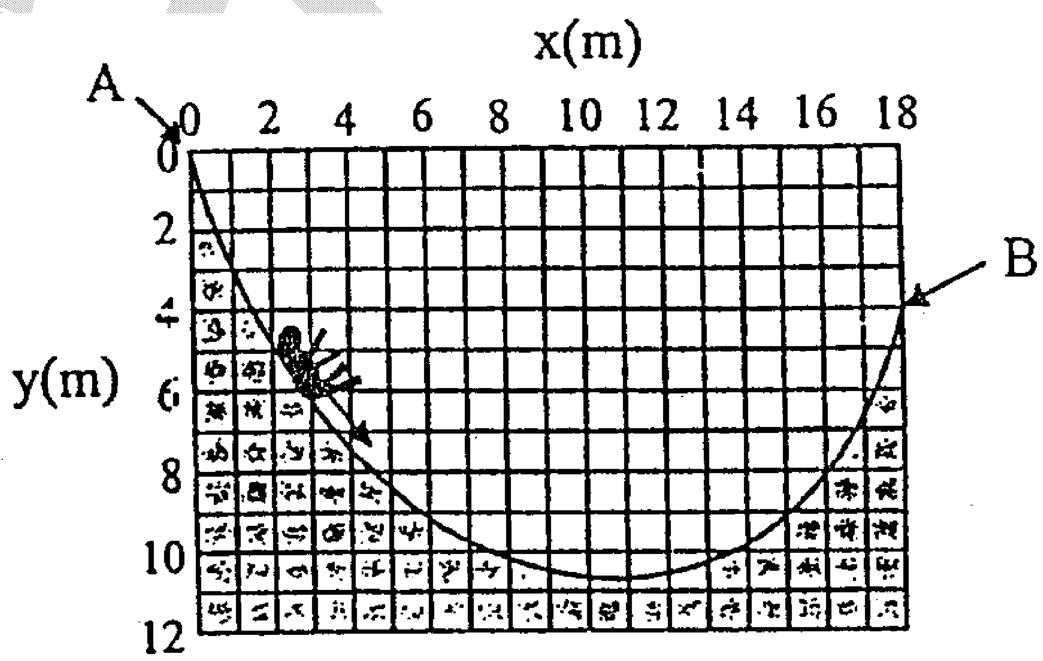


例96. 一滑雪者從 P 點由靜止開始滑下山坡，如圖，在途中不轉彎也不剎車，滑到 Q 點時恰好停止，若 P、Q 兩點之間的水平距離爲 S，滑雪板與雪地之間的動摩擦係數爲 μ，則 P、Q 兩點之間的鉛直高度差爲？(假設滑行速率甚小)答：μS



※家庭作業

1.有一呈弧面的固定滑梯，如右圖所示，一小孩從頂端 A 點自靜止開始沿弧面自由滑下。若小孩和滑梯表面之間的動摩擦係數 μ=0.5，則小孩滑停處的坐標（x，y）爲何？【2002 奧林匹亞初選】【註：由於滑行速率甚慢，可忽略在弧面滑動時的法線加速度。】答：(16，8)



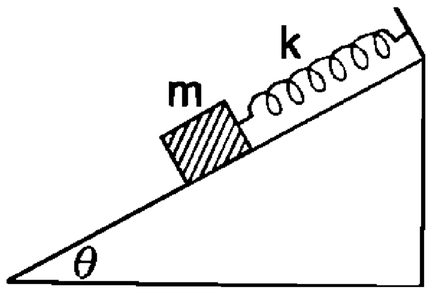
2.一台水肥車停在路口，準備倒車，好開進一旁的巷道。 由於路口狹窄，怕撞到東西，車上就下來一個人，在後面指揮。

後面指揮的揮舞著手，說：「八股！八股！（台語：倒車之意）」可是司機沒聽見。指揮的人就很大聲的叫道：「叫你ㄉㄜ\ㄙㄞ\（台語：亦是倒駛之意）啦！沒聽到是嗎」

司機嚇一跳，立刻啓動開關，把水肥車的蓋子打開。霎時，無數屎尿一齊湧出，把指揮的人給淹沒了.....。

曾俊物理

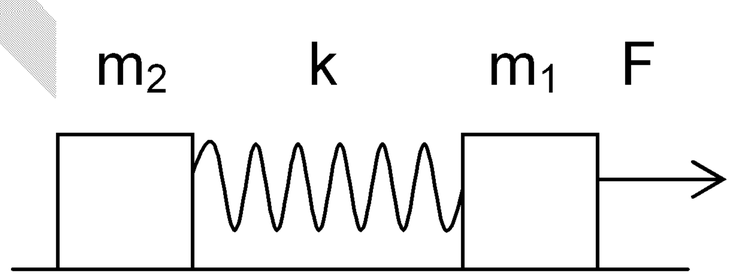
例97. 質量 2kg 的木塊，與 k=8N/m 的彈簧相連，木塊與斜面間的動摩擦係數 μ=0.125，θ=37°。設木塊在彈簧未伸長時由靜止開始運動($g=10m/s^2$)，問：



(1)當木塊沿斜面下滑 0.5 公尺時，其速率若干？

(2)木塊沿斜面下滑若干距離時，瞬時速率為零？答：(1)2m/s；(2)2.5m

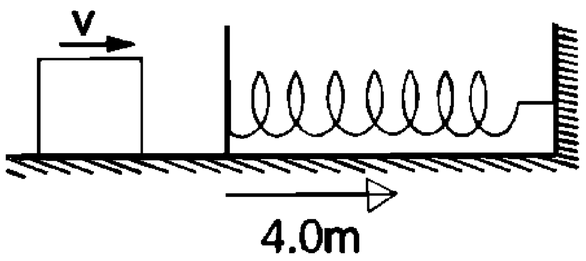
例98. 如右圖所示，兩木塊之質量分別為 m_1 及 m_2，以一力常數為 k 的輕彈簧相連接。此一彈簧木塊系統被置放於水平桌面上，設彈簧的質量可以忽略不計，木塊與桌面間之滑動摩擦係數為 μ_1，靜摩擦係數為 μ_2。今施一量值為 F 之水平力將整個系統向右拉動。設 F 之值夠大足以使 m_1 移動並使 m_2 所受摩擦力到達最大靜摩擦狀態，則在 m_2 開始移動之瞬間，m_1 之速度為多少？【1999 奧林匹亞初選】答：$\sqrt{\frac{2}{m_1}(F-\mu_1 m_1 g)\frac{\mu_2 m_2 g}{k}-\frac{(\mu_2 m_2 g)^2}{m_1 k}}$



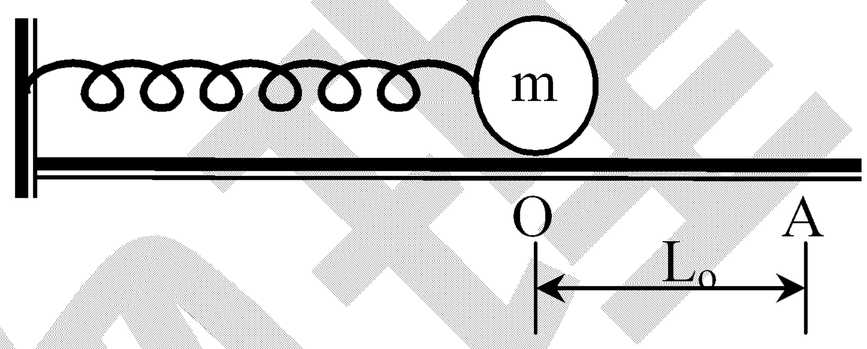
吳錫玠物理

※家庭作業

1. 質量 1kg 物體沿水平面撞及一端固定於牆的理想彈簧(k=2N/m)，若彈簧由靜止位置被壓縮 4.0m，設木塊與水平地面之動摩擦係數為 0.2，則木塊撞擊彈簧前的速率為？答：4.04m/s



2.如圖，水平彈簧一端固定，另一端繫一質量為 m 的小球，彈簧的彈性係數為 k，小球與水平面的動摩擦係數為 μ。當彈簧為原長時，小球位於 O 點。開始時小球位於 O 點右方的 A 點處，O 與 A 之間的距離為 L_o，從靜止釋放小球。

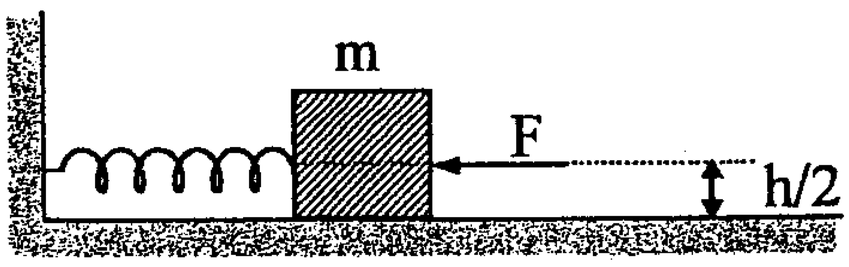


(1)小球第一次通過 O 點時的速度若干？

(2)若小球運動至 O 點就停住，則摩擦係數 μ 應為何？

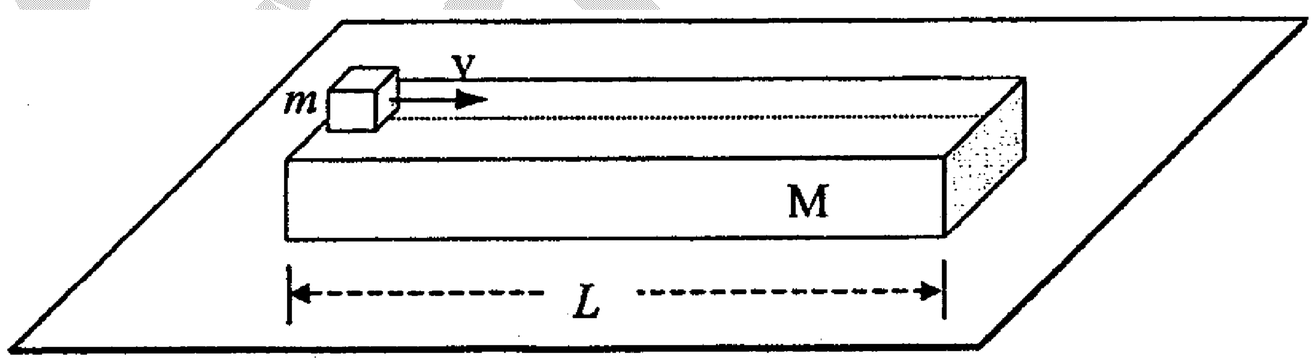
(3)若使小球能通過 O 點，且只通過一次，則摩擦係數 μ 的範圍應為何？【92 校內初賽】答：(1) $\sqrt{\frac{kL_o^2}{m}-2\mu gL_o}$ ；(2) $\frac{kL_o}{2mg}$ ；(3) $\frac{kL_o}{4mg}<\mu<\frac{kL_o}{2mg}$

3.一密度均勻，質量為 m，邊長為 h 的正立方體水平置放在桌面上，其左側輕觸一力常數為 k 的輕彈簧。現以外力 F 作用在物體的右側，因而壓縮此彈簧，使彈簧的長度縮短 $\Delta\ell$，並呈靜止（如右圖所示）。設物體與桌面之間的滑動摩擦係數為 μ，則(a)當外力除去時，物體離開彈簧之瞬間的速率為何？(b)在物體離開彈簧後，桌面作用於物體的正向力，對物體質心所施的力矩大小為何？【2003 奧林匹亞初選】答：$\sqrt{\frac{k}{m}(\Delta l)^2-2\mu g(\Delta l)}$ ；$\frac{1}{2}\mu mgh$



例99. 質量 m 的子彈以 v 的速度，水平射入靜置於光滑水平面上長度 L、質量 M 的木塊，若木塊原本固定在地面上，而子彈恰能深入 L/2，則
(1)子彈若要恰可貫穿木塊，所須之入射速度爲何？答：
(2)若木塊不固定在地面上，則當子彈以 v 之速度入射時，子彈進入木塊中深度爲若干？(設 m 所受阻力爲定值與速率無關)答：(1) $\sqrt{2}v$ ；(2) $\dfrac{ML}{(M+m)\times 2}$

例100. 如下圖所示，在一光滑水面上，靜置有一質量爲 M，長度爲 L 的長方體。一質量爲 m、長度可忽略的小木塊，在長方體上面，由左端沿中線以水平初速 v 開始向右滑行。若木塊與長方體之間的動摩擦係數爲 μ，且木塊不會由長方體右端掉落，則木塊初速 v 之最大值？【2001 奧林匹亞初選】

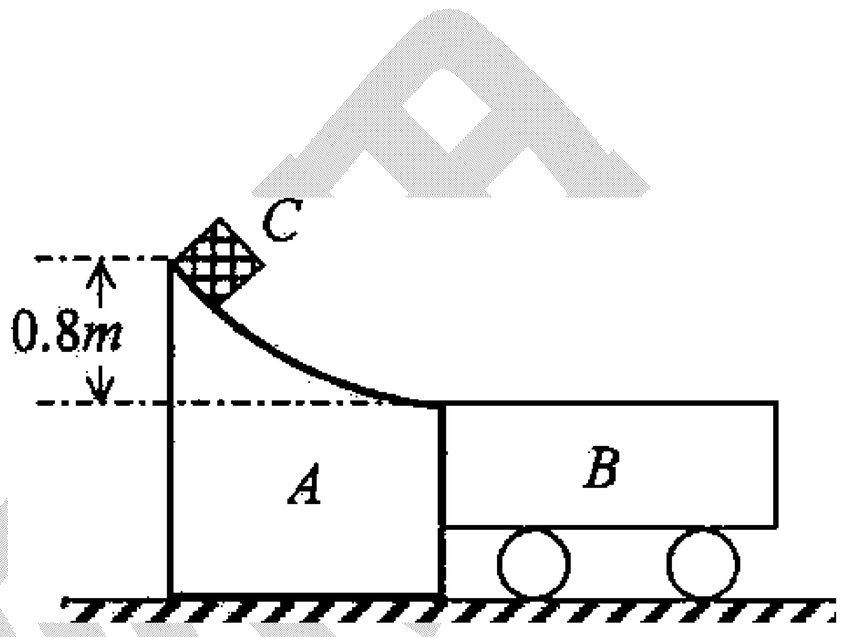


答：$\sqrt{2\mu gL(1+\dfrac{m}{M})}$

※家庭作業

1.有一質量 M 公斤的木塊停在粗糙的平面上，木塊和平面間的動摩擦係數爲 μ，當 m 公斤的子彈打入木塊時，子彈埋入木塊中，且木塊滑走 S 公尺才靜止，則子彈打入木塊瞬間的速度爲【69 夜大】答：$\frac{M+m}{m}(2S\mu g)^{1/2}$

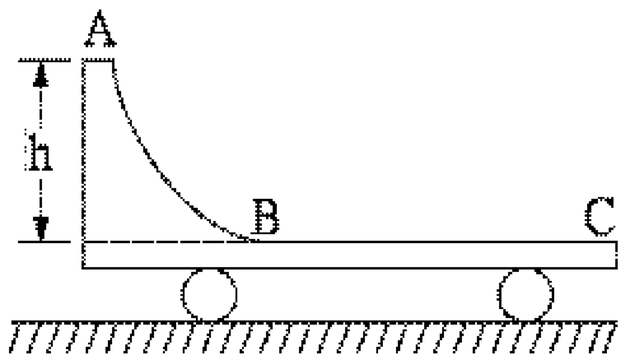
2.如右圖所示，A 爲一固定不動的光滑軌道，質量 30Kg 的台車 B 緊靠著 A 的右側。現有一質量 20Kg 的塊狀重物 C，在高出台車平面 0.8m 處，沿軌道以 3m/s 的初速度下滑，衝上小車。設 C 與 B 車板面間的摩擦係數爲 0.3，B 車與地面間的摩擦可以忽略，則(A)B 台車的長度至少應爲_____m，重物 C 才不致滑出其板面；(B)B 車被撞後的最後速度爲_____m/s。【1996 奧林匹亞初選】答：(A) 2.6 ；(B) 2.0



3.質量爲 m 的子彈以初速爲 v_o，沿水平方向入射一質量爲 2m，長度爲 L 的木塊。若起始時，木塊靜置於一光滑水平面上，當子彈射穿木塊時，其速率減爲初速的一半，則(1)子彈在木塊內所受的平均阻力爲何？(2)又當子彈剛穿出時，木塊共滑行了多少距離？【2000 奧林匹亞初選】答：(1) $\frac{5mv_o^2}{16L}$ ；(2) $\frac{L}{5}$

4.質量爲 m 的子彈，以初速 v_o 沿水平方向，射入一質量亦爲 m，靜置在光滑水平面上的木塊，在其內穿行 d 的厚度後，並以速度 v 沿同一方向穿出。若木塊被射擊後，僅在平面上滑動而不轉動，且假設木塊對子彈的阻力爲固定不變的恆力，則(1)在此過程中，子彈-木塊系統所損失的動能？(2)子彈由射入到穿出木塊，所經歷的時間？(3)在此時間內，木塊的位移？【2003 奧林匹亞初選】答：(1) $mv(v_o-v)$ ；(2) $\frac{d}{v}$ ；(3) $\frac{v_o-v}{2v}d$

5.如圖所示，光滑的水平面上停放著一輛帶弧形槽的平板小車，AB 部分光滑，BC 部分與物體的摩擦係數爲 μ，開始時離平板車水平底板表面 h 高處有一木塊處於靜止狀態，放手後，木塊沿 AB 弧形槽滑下，最後靜止在 BC 面上，則木塊在平板車的底面上滑行的距離爲_____。答：$\frac{h}{\mu}$



例101.質量 5 公斤的物體在光滑地面上以 6m/s 的速度向東運動，則
(1)受向東 10 牛頓的力作用 5 秒，作用力對物體所作的功？
(2)受向北 10 牛頓的力作用 5 秒，作用力對物體所作的功？答：(1)550J；(2)250J

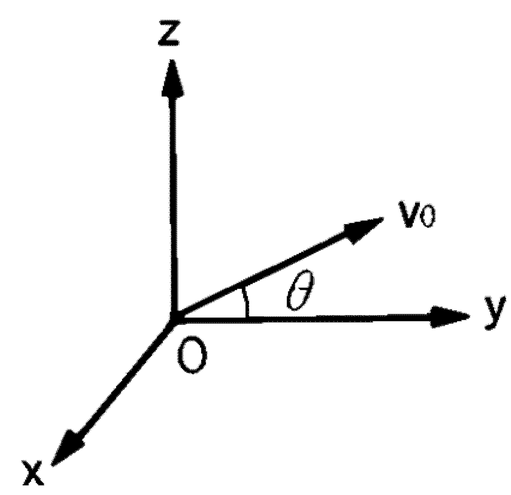
※家庭作業

1.質量爲 1kg 之物體，以 6m/s 之速度向西運動，受一向南之力作用，歷時 4 秒，已知力爲時間之函數，其關係式爲 $F=t$(其中 F 之單位爲牛頓，t 之單位爲秒)，則：
(1)物體第 4 秒末之動能爲多少焦耳？ (2)力共作功多少焦耳？答：(1)50；(2)32

2.一物體質量 m 原來以 v_o 的速度向東運動，受到一向北之定力 F 作用了 Δt 時間，則外力對物體所作的功爲若干？
(A)$\frac{1}{2}mv_o^2$ (B)$\frac{(F\Delta t)^2}{2m}$ (C)$\frac{(F\Delta t)^2}{2m}-\frac{1}{2}mv_o^2$ (D)$\frac{2m}{(F\Delta t)^2}$ (E)$\frac{2m}{(F\Delta t)^2}-\frac{1}{2}mv_o^2$ 。答：(B)

3.m=1kg 的物體以 30m/s 向東運動，受向北的力作用 4 秒，已知力對時間的關係爲 $F=\frac{5}{4}t$，則物體的動能增加？答：50J

4.如圖所示，xy 爲水平地面，一質點質量 m 從原點 O 處沿 yz 面斜向拋出。設在 y 方向的初速分量爲 $v_o\cos\theta$，在 z 方向之初速分量爲 $v_o\sin\theta$，重力在負 Z 方向(即鉛直向下)。此質點自拋出後。受一沿 x 方向之定值橫向力 F(F 爲常數)。
(1)此質點落地時，其位置坐標(x，y ，z)爲何？答：
(2)落地時其動能較拋出時增加多少？【1996 奧林匹亞初選試題】



答：(1)$(\frac{2Fv_o^2\sin^2\theta}{mg^2},\frac{v_o^2\sin^2\theta}{g},0)$；(2)$\frac{2Fv_o^2\sin^2\theta}{mg^2}$

吳錫玠物理

觀念九　功率

一、功率的定義：

功率 P 是指每單位時間內，施力者所作的功，(或每單位時間內，有多少的功轉換為能量。)

(1)平均功率

平均功率：$P=\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=\dfrac{\text{在時間間隔內所作的功}}{\text{時間間隔}}$

(2)瞬時功率

瞬時功率：$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv\cos\theta$　其中 θ 為作用力與瞬間速度的夾角

證明：$P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{S}}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv\cos\theta$

二、功率單位：

	功 W	時間 Δt	功率 P
M.K.S.制	焦耳 J	秒 sec	瓦特 $W=J/\text{sec}$

(1)1 kW (千瓦)＝1000 W (瓦特)

(2)1 hp (馬力)=746 W (瓦特)

三、 W(功)＝P(功率)×t(時間)⇨功＝P-t 圖的面積

四、丫寶跟丫龜是監獄裡的牢友，一天兩人在閒聊打屁....

丫寶：進監獄之後我體會到什麼叫做一大一小

丫龜：說來聽聽吧！

丫寶：進監獄前腰圍大，進監獄之後腰圍小

丫龜：監獄伙食不好咩！說到一大一小我也有相同的體會！

丫寶：說來聽聽吧！

丫龜：進監獄前我的屁眼小！進監獄後，我的屁眼變大了！

丫寶：@＃＄％＆＊.....

例102.在高為 9 公尺的檯上放置一圓形水槽，其圓底面的面積為 5 平方公尺，高為 2 公尺。若一馬達抽水機欲以 4 分 40 秒的時間由地面抽水充滿水槽，則其平均功率應為幾仟瓦？ (A)3.5 (B)3.85 (C)3.15 (D)9.8 (E)315 。【72 夜大】答：(B)

※家庭作業

1.一只電燈泡接上 50V 的電源，通過的電流為 2A，如果將該燈泡使用 49 分鐘所消耗的電能，完全轉換成力學能時，約能將多少瓶 1kg 的飲料抬上離地 4m 高的二樓？(重力加速度為 $9.8m/s^2$) (A)100 (B)750 (C)4900 (D)7500 (E)9800。【92.指考】答：(D)

2.起重機在 10 秒內將長 12 公尺，質量 1000 公斤的均勻鋼管由平放於地面吊至鉛直豎立的位置，其功率約為：(A)4.9×10^2 瓦特 (B)5.9×10^3 瓦特 (C)3.6×10^3 瓦特 (D)1.2×10^4 瓦特 。【81 三專】答：(B)

3.水由水庫中以每秒 300 立方公尺的流量衝至 500 公尺下的發電廠，推動發電機以產生電能，假設因摩擦而損失的能量為 20%，則此發電廠的發電能力？答：1.2×10^6 仟瓦

4.若你是機械工程師，接受客戶委託製造昇降機(即電梯)，客戶要求此昇降機必需可載重 600 公斤，且在 20 秒內從地面上升至 50 公尺的高樓，如用一馬達來驅動此昇降機，則你所選用的馬達，最小輸出功率？答：15000 瓦特

5.一質量為 m 的質點，沿一條水平的直線運動時，緊急減速停下，若此質點速度由 v 降到零時，其位移為 x，平均加速度為 a，所花時間為 t，則下列哪一項敘述，不論質點停下的過程為何，均為正確？ (A)質點在減速停下期間的平均速度為 v/2 (B)質點在減速停下期間的位移 x 等於 $vt+\frac{1}{2}at^2$ (C)質點在減速停下期間的平均加速度 $\bar{a}$ 等於 $-v^2/(2x)$ (D)在減速停下過程中，作用於質點的外力，其衝量等於 $-mx/t$ (E)在減速停下過程中，作用於質點的外力，其平均功率為 $-mv^2/(2t)$。答：(E)

例103.空氣阻力不計，以60°仰角，初速v_o，自地面拋出質量爲 m 之小球，求重力對球所施之功率，當球在

(1)出發點之瞬時？ (2)仰角爲30°之瞬時？ (3)最高點之瞬時？

(4)著地點之瞬時？ (5)拋出至頂點之平均功率？【67 夜大改】

答：(1)$-\dfrac{\sqrt{3}mgv_o}{2}$；(2)$-\dfrac{\sqrt{3}mgv_o}{6}$；(3)0；(4)$\dfrac{\sqrt{3}mgv_o}{2}$； (5)$-\dfrac{\sqrt{3}mgv_o}{4}$

例104.一球自 H 高處自由落下，全程需時 T 秒，則

(1)前$\dfrac{T}{2}$與後$\dfrac{T}{2}$的平均功率比？ (2)前$\dfrac{H}{2}$與後$\dfrac{H}{2}$的平均功率比？

(3)t=$\dfrac{T}{2}$與 t=T 的瞬時功率比？ (4)h=$\dfrac{H}{2}$與 h=0 的瞬時功率比？

均衡物理

※家庭作業

1.在一粒小石自空中由靜止自由落向地面的過程中，若不計空氣阻力，則每隔 0.1 秒，下列哪個物理量的變化量均維持不變？ (A)位移 (B)速度 (C)動能 (D)位能 (E)重力對石頭所做的功。【93.指考】答：(A)(B)(E)

2.高空下落的雨滴，因受到空氣阻力，落地前會以等速下降。一雨滴的質量為 2.7×10^{-7} 公斤，落地前以等速度 20 公尺/秒下降，設在此等速運動期間，雨滴受空氣阻力所生之熱量全部被雨滴吸收，且雨滴之質量保持不變，則此雨滴每秒溫度約升高幾度？(A)5° C (B)O.5℃ (C)(5×10^{-2})℃ (D)(5×10^{-3})℃(D)(5×10^{-3})℃(E)(5×10^{-4})℃。【79 日大】答：(C)

3.一跳傘員自高空跳下，由於空氣的阻力，在著地前有一段時間他是等速下降的。設著地時之終端速度是 10.米/秒，此人體重及裝備共重 100 公斤，則在此段等速下降時間內每秒產生之熱能約為 (A)10^2 焦耳 (B)10^3 焦耳 (C)10^4 焦耳 (D)10^5 焦耳。【69.日大】答：(C)

4.等重之 A、B 同時同地出發，若 A 自由落下，B 以 20 m/s 作水平拋射，B 落地時與地面成 37° 夾角，則落地之瞬時功率之比為？答：1:1

5.鉛球質量為 1kg，自地面鉛直上拋，第 4 秒末與第 6 秒末均經空中同一定點，設 $g=10m/s^2$，則重力對球作功之瞬時功率最大值？答：500W

6.質量 10kg 之物由距地面 20m 高自由落下，當其落至地面時 (A)重力作功 1000J (B)重力作功 2000J (C)平均功率 1000W (D)重力作功之平均功率 2000W (E)著地時之瞬時功率 2000W。(令 $g=10\ m/s^2$)答：(B)(C)(E)

7.自高 H 處自由落下質量 m 的物體，求未著地前

(1)第 t 秒內重力所作之功？ (2)t 秒內重力所作之功？

(3)第 t 秒末重力所施之瞬時功率？ (4)全程重力之平均功率？

答：(1) $mg^2(t-\frac{1}{2})$ ；(2) $\frac{mg^2t^2}{2}$ ；(3) mg^2t ；(4) $m\sqrt{\frac{g^3H}{2}}$

例105.船用引擎發出能量之功率爲 3000 瓦特，使船以 v=9 公里/小時的等速率航行，問：
(1)船所受的阻力爲若干？
(2)設船所受的阻力與速度成正比，今欲使船速加倍，引擎輸出功率應增爲幾倍？
(3)若引擎輸出功率增爲 27 仟瓦，船速 v'爲何？答：(1)1200nt；(2)4 倍；(3)27km/hr

※家庭作業

1.假設以等速率拉船所需之力與船速的 $\frac{3}{2}$ 次方成正比，若以 v 之速率拉船需功率 P，則以 4v 的速率拉船需功率 (A)P (B)$\frac{1}{8}P$ (C)8P (D)$\frac{1}{32}P$ (E)32P。答：(E)

2.船以等速行駛，引擎的功率爲 P，當船速增倍後，引擎功率爲原有的 $4\sqrt{2}$ 倍，則船所受之平均阻力 F_R 與船速 v 成_____次方正比。答：$\frac{3}{2}$

3.假設一船在航行時，所受之阻力和速率成正比。若使所需之功率變爲原有之 9 倍，則船速應爲原來之 (A)1.5 倍 (B)2 倍 (C)3 倍 (D)4 倍 (E)9 倍【70 夜大】答：(C)

4.已知噴射機飛行時的空氣阻力與其速率的平方成正比，當該飛機以 600km/hr 水平等速飛行時，引擎的輸出功率爲 160000KW，若該飛機欲以 900km/hr 之速飛行時，則引擎的輸出功率應增爲？答：540000 KW

李俊物理

例106.有兩個質量均爲 3.0kg 之物互相以力作用，某時刻甲之速度爲 0.50m/sec 向右，乙之速度爲 0.30m/sec 向右，故二者之接近速度爲 0.20m/sec。若此互相作用之力係斥力，大小爲 0.1nt，則此時動能之減少率爲： (A)0.01 (B)0.02 (C)0.03 (D)0.04 (E)0.05 焦耳/秒。答：(B)

※家庭作業

1.以定力F作用於光滑水平面上質量m的靜止物體，使其開始運動，則下列何者正確？ (A)經 t 秒物體的速率爲 $\frac{Ft}{m}$ (B)經 t 秒物體的動能爲 $\frac{F^2t^2}{2m}$ (C)第 t 秒時，物體的瞬時功率爲 $\frac{F^2t}{m}$ (D)第 t 秒內的平均功率爲 $\frac{F^2t}{2m}$ (E) t 秒內的平均功率爲 $\frac{F^2t}{2m}$。答：(A)(B)(C)(E)

2.一人在水平路上推進一購物車，推力 50 牛頓與路面成 60° 。若車子在 10 秒內以等速前進 8 公尺，則： (A)推力所作之功爲 200 焦耳 (B)推力之功率爲 20 瓦特 (C)摩擦力所作之功爲 200 焦耳 (D)重力所作之功爲 346 焦耳 (E)淨力作功爲零。答：(A)(B)(C)(E)

3.質量均爲 4 公斤之甲、乙兩物體，以大小爲 0.1 牛頓之斥力互相作用，某時刻甲之速度爲 5m/s 向西，乙之速度爲 10m/s 向西，求此時

(1)甲物之動能變化率？

(2)乙物之動能變化率？

(3)整個體系之動能變化率？答：(1)0.5W；(2)-1W；(3)-0.5W

例107.質量 1kg 之靜止物體，受到方向一定之變力作用，設力 F（牛頓）與時間 t（秒）之關係式為 F=3t，則此物受力後在 2 秒末，拉力所耗之(1)平均功率為_____瓦特。(2)瞬時功率為_____瓦特。答：(1)9；(2)36

例108.一物質量 2kg 受力使其沿直線運動，若質點之位置(米)與時間(秒)關係 $x=2+3t-5t^2+6t^3$，則(A)2 秒內所做之功？(B)2 秒內之功率？(C)第 2 秒末之功率？答：(A)3016J；(B)1508 瓦；(C)6820 瓦

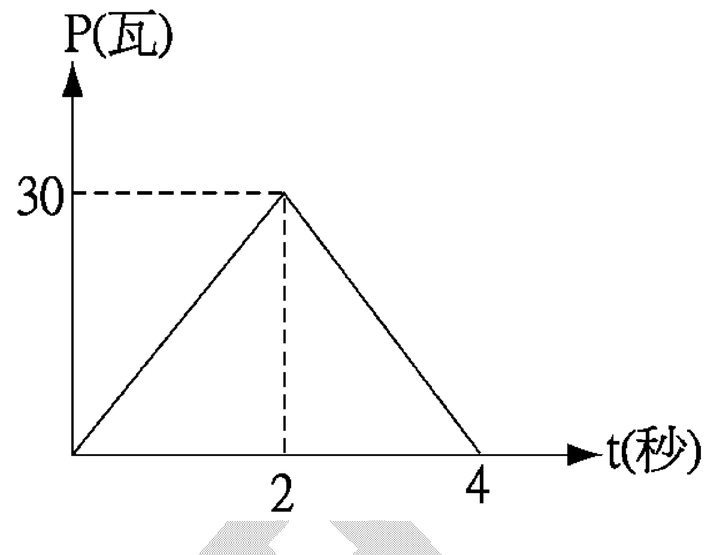
※家庭作業

1.質量 1 kg 的質點由靜止開始受力而直進，若力 F（牛頓）與時間 t（秒）的關係式為 $F=10-t$，則自 t=5 秒到 t=10 秒的時間內，拉力對質量作功功率為_____。(以整數表示)答：109 W

2.以 3N 的水平力拉一個原為靜止於光滑平面的物體，此物質量為 2kg，若前 4 秒內的平均功率為 P_1 瓦特，第 4 秒末的瞬時功率為 P_2 瓦特，則 P_1 與 P_2 分別為(A)$P_1=P_2=18$ (B)$P_1=P_2=9$ (C)$P_1=12$，$P_2=24$ (D)$P_1=24$，$P_2=12$ (E)$P_1=9$，$P_2=18$。答：(E)

李領物理

例109.質量爲 2 公斤的靜止物體，受有外力作用，該力所施之功率與時間之關係如附圖所示，則下列何者正確？



(A)在第 4 秒末之速度爲 $2\sqrt{15}$ m/s (B)在第 2 秒末之動能爲 30 焦耳 (C)在第 4 秒內，外力所施之平均功率爲 15 瓦 (D)第 2 秒末與第 4 秒末之速度量值之比爲 $1:\sqrt{3}$ (E)物體在運動過程中恆受定力作用。答：(A)(B)

※家庭作業

1.將力常數爲 k 之彈簧一端固定，另一端以等速 v 拉長，則經 t 時間

(1)作功？ (2)平均功率？ (3)瞬時功率？答：(1) $\frac{kv^2t^2}{2}$ ；(2) $\frac{kv^2t}{2}$ ；(3) kv^2t

2.半徑 0.4 公尺之砂輪以 5 次/秒旋轉，一人持一鐵刀以 80 牛頓之力使鐵刀受砂輪磨利，兩表面摩擦係數爲 0.4，則砂輪所作功率爲何？答：402W

3. 川島雖遠走　白石在我側　飯島成舊愛　舞子好可愛
青沼一級棒　棒棒皆艱辛　澤圓有點膩　還待新秀出

學物理

例110.有一斜度 30°，速率爲 0.4m/sec 的電動扶梯，今有一體重 50kg 的人踏上扶梯上樓，那麼驅動扶梯的馬達對人作功的功率爲： (A)9.8 (B)98 (C)4.9 (D)49 (E)980 watt 。
答：(B)

例111.汽車在斜角 $\sin^{-1}\frac{1}{50}$ 之斜坡上以 40m/sec 等速上坡，須功率 P，設斜面之阻力正比於速率，上坡阻力爲物重的 1/25(質量 m)。則若以相同功率下坡，其(1)功率？(2)速率爲何？答：(1) $\frac{12}{5}$mg；(2)60m/s

例112.施力推物體以速度 v 沿傾角 θ 的斜坡等速上駛，如果保持功率不變，推力能使物體以 3v 大小的速度在這個斜坡上等速下滑，則物體與斜面間的動摩擦係數？【93 校內初賽】答：$2\tan\theta$

學物理

※家庭作業

1.一斜面長 20 m，高 10 m，今將沿斜面施以 50 kgw 之力，可把一 90 kgw 物體由斜面底等速推上至斜面頂，費時 20 秒，此力所作平均功率為多少？答：490 瓦特

2.一斜面斜角 θ，頂點 A，一物自斜面頂點 A 滑至底端 B 時，重力作功之平均功率 P_1，自 A 落至與 B 同一水平面之 C 時，重力作功之平均功率為 P_2，則 P_1/P_2 之值為何？答：$\sin\theta$

3.將一質量 m 之物體沿斜角 30° 之斜面下滑，見其等速下滑，今將此物體以 v 之初速自斜面底沿斜面上滑，則在停止前： (1)所行之時間若干？ (2)所能到達之最大高度若干？ (3)物體消耗成熱能之平均功率若干？答：(1) $t=\frac{v}{g}$ ；(2) $h=\frac{v^2}{4g}$ ；(3) $\frac{mgv}{4}$

4.某質量 1200 公斤的汽車，在水平路面上維持 90 km/hr 的穩定速率行駛時，所需的功率 10 kw，則：

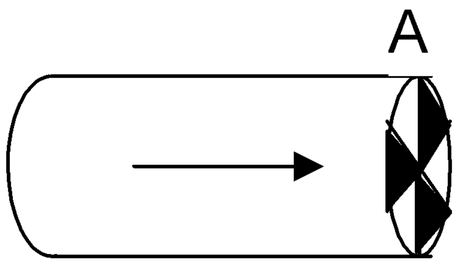
(1)汽車所受來自路面與空氣之總阻力為？

(2)若汽車以相同速率爬坡(坡度 $\sin\theta$ 為 5/49)，所受的總阻力相同，則所需的功率？

答：(1)400N；(2)40kW

5.在無風時，以速度 v 跑步，則跑者所受到的空氣阻力為 $\frac{1}{2}C\rho Av^2$ ，C 為阻力係數、ρ 為空氣的密度、A 為跑者在垂直於運動方向上的截面積。已知某人於平地上等速跑步時，身體持續提供 80W 的功率。若此人 60kg 重、A＝0.40 m^2、C＝2.0、ρ＝1.3 kg/m^3，且跑步時沒有任何打滑，則(1)此人的跑速？(2)若肌肉消耗熱量做功的效率為 25%，則此人跑步 30 分鐘消耗的熱量？(3)若此人身體所能持續提供的最大功率為 150W，則此人想以 2.0m/s 的等速度沿一斜坡往上快走時，斜坡與水平面之間的夾角不能大於？【2003 奧林匹亞初選】答：(1)5.4 m/s；(2)138kcal；(3) 7.1°

例113.密度為 1.29g/ℓ 的空氣以 20m/s 的風速通過截面積為 A 的圓柱狀風車，如圖所示，則此風車單位面積可獲得的最大功率為_____W/m^2。【1998 奧林匹亞初選】答：5.16×10^3



例114.有一均勻盤曲在水平光滑桌面上之鐵鏈，每米長為 2.0kg，今施力將其一端沿水平方向以 4.0m/s 的速度拉走，則： (A)施力大小？ (B)施力所做之功率？ (C)每秒增加之動能為何？答：(A)32nt；(B)128W；(C)64J

※家庭作業

1.有一盤曲在水平光滑桌面上之鐵鏈，每公尺長度之質量為 2.5kg，若將其一端沿水平方向以 4m/s 之速度拉走，求:(1)施力者之功率？(2)每秒鐵鏈所增加之動能？答：(1)160W；(2)80J

2.直昇機可以停滯在空中，是因為利用裝置在其上方的螺旋槳轉動時，向下推壓空氣，藉所產生的向上反作用力以支撐其重量。(1)假設被推壓向下的空氣流速為 v，空氣的密度為 ρ，螺旋槳葉片掃過的面積為 A，則直昇機引擎驅動螺旋槳所產生的向上推力 F？(以 v、ρ 和 A 表示之) (2)若一直昇機的引擎需要發出 10^5 W 的功率才可以停滯在空中，現有一模型直昇機是以比例尺 1：10 依照實際直昇機的式樣複製打造，則此模型機欲停滯在空中時，所需的引擎輸出功率？。【2002 奧林匹亞初選】
答：(1) $\rho A v^2$；(2) 32 W

觀念十　重力位能的普遍形式

※當物體的高度變化達幾百公里時，重力場不可視為均勻，即不再是定值，因此重力位能不可表為 mgh(只適用於地表附近)。

一、重力位能：$U_r = -\dfrac{GMm}{r}$

1、物體在地表外部的重力位能：$U_r = -\dfrac{GMm}{r}$

(1)將物體自距地心∞處等速移至與地心相距為 r 處($r \geq$ 地球半徑R)：

①外力對物體所做的功=($-\vec{F}_{萬有引力}$與$\vec{r}$)曲線下所包圍的面積。

將物體等速移動所需外力為：

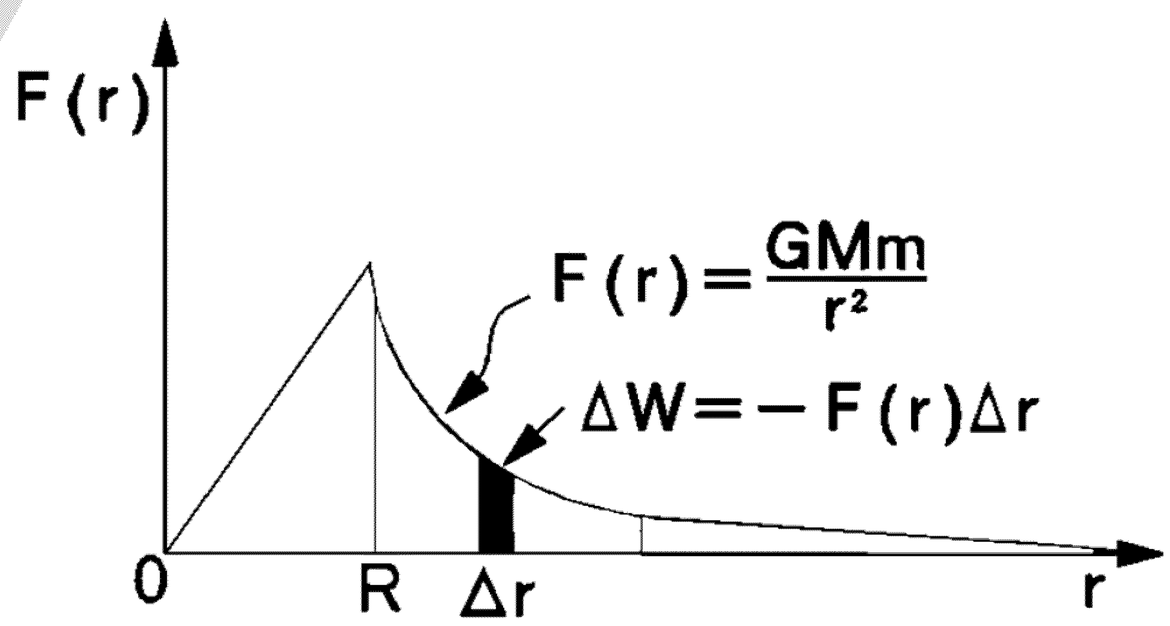
$\vec{F}_{外力} = -\vec{F}_{萬有引力} = \dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$　($\hat{r}$ 為$\vec{r}$ 方向的單位向量)

自距地心∞處等速移至與地心相距為 r 處外力對物體所做的功

$$W_{\infty\to r} = \int_{\infty}^{r} \vec{F}_{外力}\cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{r} -\vec{F}_{萬有引力}\cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r}$$

②因為動能保持不變，外力對物體所作的功等於物體增加的位能。

$$W_{\infty\to r} = \Delta E = U_r - U_\infty = -\frac{GMm}{r}$$



(2)零位面的選定：

①選定無窮遠的重力位能為零($U_\infty = 0$)，表示物體與地心距離無窮遠時，物體的重力位能為零。

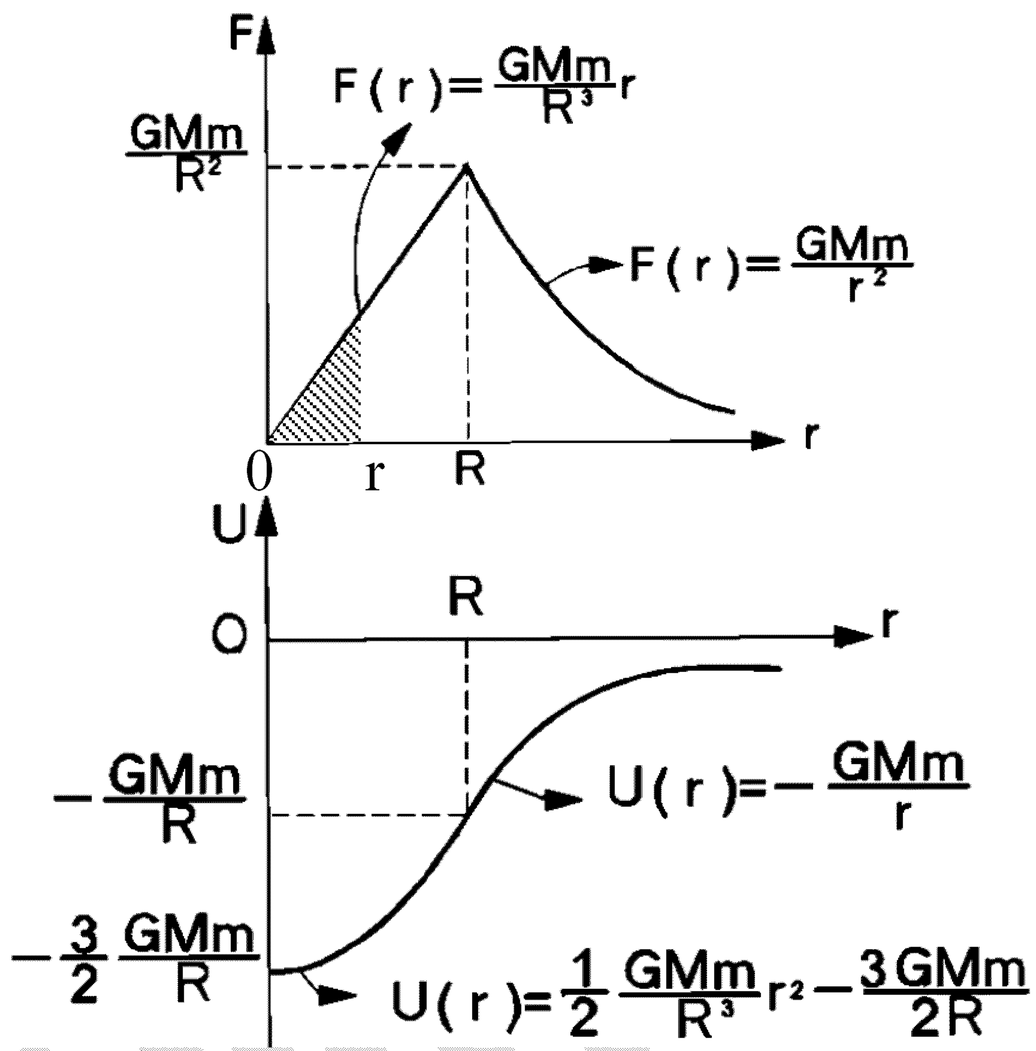
②在地球外部，物體與地心距離 r 處的重力位能為$U_r = -\dfrac{GMm}{r}$，表示除無窮遠處外，所有地點的位能皆為負值。其中在地球(半徑為 R)表面，物體的重力位能為$U_R = -\dfrac{GMm}{R}$。

吳錫玠物理

2、物體在地球內部的重力位能(參考教材)

地心：$U_r = -\dfrac{3GMm}{2R}$

距地心 r：$U_r = -\dfrac{3GMm}{2R} + \dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{R^3}r^2$



(1)地心位能：

將物體自地表等速移至地心，外力對物體所做的功

$W_{R\to 0} = \vec{F}_{外力}\cdot\vec{r} = -\vec{F}_{萬有引力}\cdot\vec{r} = -(\vec{F}_{萬有引力}與\vec{r})$

曲線下所包間的面積

$= -(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{GMm}{R^2}\cdot R) = -\dfrac{GMm}{2R}$

地心位能 $U_0 = U_R + W_{R\to 0} = -\dfrac{GMm}{R} - \dfrac{GMm}{2R} = -\dfrac{3GMm}{2R}$

(2)與地心相距 r 處之位能：

將物體自地心等速移至距地心 r 處，外力對物體所做的功

$W_{0\to r} = \vec{F}_{外力}\cdot\vec{r}$ 曲線下所包間的面積 $= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{GMm}{R^2}\dfrac{r}{R}\cdot r = \dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{R^3}r^2$

距地心 r 處位能 $U_r = U_0 + W_{0\to r} = -\dfrac{3GMm}{2R} + \dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{R^3}r^2$

(3)零位面的選擇

當選定不同處為零位面時，各地的位能值亦隨著調整。

	地心 U_0	地表內 U_r	地表 U_R	地表外 U_r	無窮遠 U_∞
以∞為零位面	$-\dfrac{3GMm}{2R}$	$-\dfrac{3GMm}{2R}+\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{R^3}r^2$	$-\dfrac{GMm}{R}$	$-\dfrac{GMm}{r}$	**0**
以地表為零位面	$-\dfrac{GMm}{2R}$	$-\dfrac{GMm}{2R}+\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{R^3}r^2$	**0**	$-\dfrac{GMm}{r}+\dfrac{GMm}{R}$	$\dfrac{GMm}{R}$
以地心為零位面	**0**	$\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{R^3}r^2$	$\dfrac{GMm}{2R}$	$-\dfrac{GMm}{r}+\dfrac{3GMm}{2R}$	$\dfrac{3GMm}{2R}$

3. 說明

(1) $U_g = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$ 只適用於任何粒子或球形物體的系統。

(2) U_g 是純量，只有正負，沒有方向。

(3) $U_g = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$ 屬於 m_1、m_2 共同所有，無法分割。

⇒任何一對粒子之間都有萬有引力的交互作用，也因此具有重力位能。

整個系統的重力位能等於所有成對粒子的重力位能的代數和。

如三個質量分別為 m_1、m_2 和 m_3 的粒子組成一個系統，彼此間的距離分別為 r_{12}、r_{23} 和 r_{31}，

則該系統的重力位能為 $U_g = -\dfrac{Gm_1m_2}{r_{12}} - \dfrac{Gm_2m_3}{r_{23}} - \dfrac{Gm_3m_1}{r_{31}}$

二、人造衛星

衛星 m 作等速率圓周運動，以軌道半徑 r 繞地球 M 運動：

(1)位能 $U_g = -\dfrac{GMm}{r}$

(2)動能 $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{GMm}{2r} = -\dfrac{U_g}{2}$

【證明】引力=向心力

$$\frac{GMm}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

(3)力學能 $E = E_k + U_g = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{GMm}{2r} - \dfrac{GMm}{r} = -\dfrac{GMm}{2r} = \dfrac{U_g}{2}$

	動能 E_k	位能 U	力學能 E
動能 E_k		$E_k = -\dfrac{U}{2}$	$E_k = -E$
位能 U	$U = -2E_k$		$U = 2E$
力學能 E	$E = -E_k$	$E = \dfrac{U}{2}$	

吳錫玠物理

三、束縛能、脫離動能、脫離速度

(1)束縛能 E_b：欲使物體脫離重力場至 ∞ 處，所需補充之最少能量

$$E_b + (E_k + U) = 0$$

(2)脫離動能 E_e：欲使物體脫離重力場至 ∞ 處，所需具備之最小動能

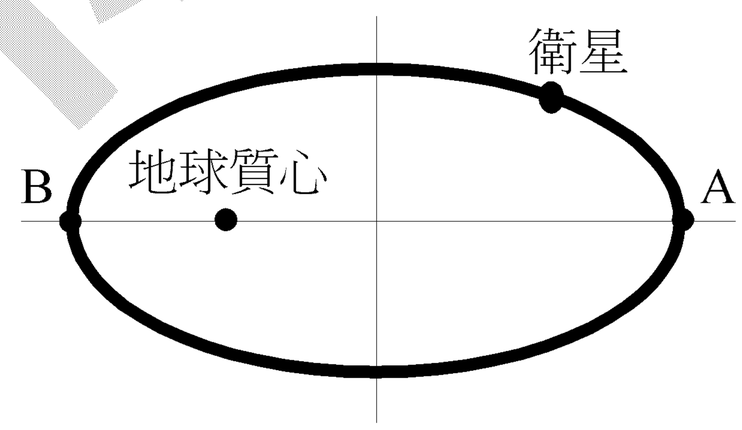
$$E_e + (U) = 0$$

	原有動能 E_k	原有位能 U	原有力學能 E	E_b	E_e
束縛能 E_b	$E_b = E_k$	$E_b = -\frac{U}{2}$	$E_b = -E$		$E_b = \frac{E_e}{2}$
脫離動能 E_e	$E_e = 2E_k$	$E_e = -U$	$E_e = -2E$	$E_e = 2E_b$	

四、橢圓軌道

衛星繞地球以橢圓軌道運行時，須遵守

$$\begin{cases} \text{克卜勒第二定律} \\ \text{力學能守衡定律} \end{cases}$$



說明：

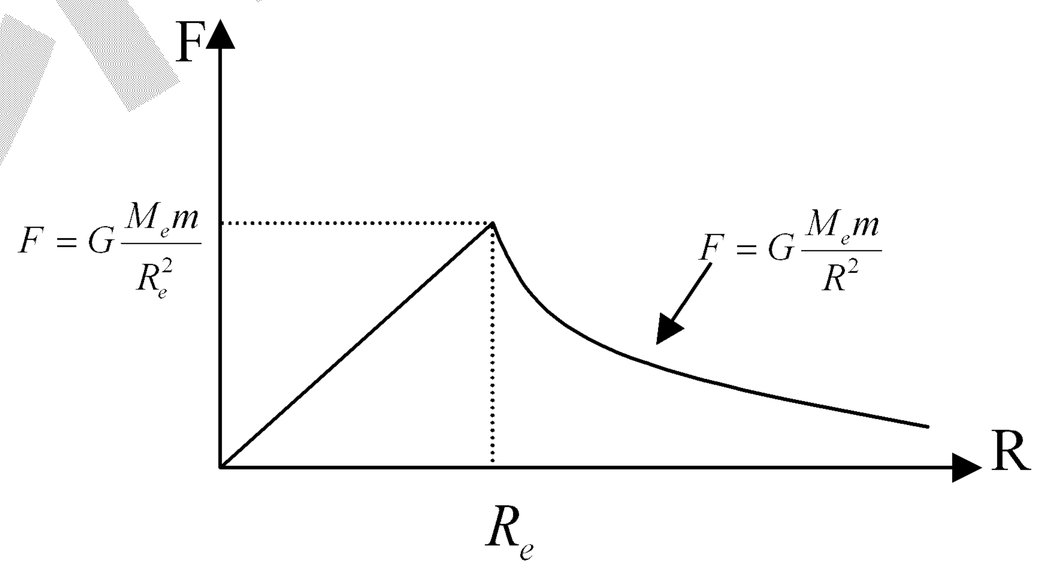
$E_k = -\frac{U}{2}$ 只適用於圓形軌道上之衛星，不適用於橢圓軌道

吳銘物理

例115.由地面以初速度 10^4 m/s 鉛直發射一砲彈，不計空氣阻力，若地球半徑 6.4×10^6 m，則砲彈上升最大高度？答：2.6×10^7 公尺

例116.質量為 m 的人造衛星距地面的高度為 h，設地球半徑為 R，質量為 M，今取地面為零位能面，g 為地表的重力場強度，則：
(1)人造衛星之位能為何？ (2)若 h<<R，則位能可表為？【1997.奧林匹亞初選試題】
答：(1) $-\dfrac{GMm}{R+h}+\dfrac{GMm}{R}$ ；(2)mgh

例117.若已知物與地球間萬有引力 F 與物體距地心之距離 R 之關係如右圖，則



(a)以∞處為零為能處，求(1)地表處之位能為何？ (2)地心處之位能為何？
(b)以地心處為零為能處，求(1)地表處之位能為何？ (2)∞處之位能為何？
(c)若以∞處為零位能，則繪出位能 U 與距地心之距離 R 之關係。
答：(a)(1) $-\dfrac{GMm}{R_e}$ ；(2) $-\dfrac{3GMm}{2R_e}$ ；(b)(1) $\dfrac{GMm}{2R_e}$ ；(2) $\dfrac{3GMm}{2R_e}$ ；(c)自己畫

吳錫玠物理

※家庭作業

1.若設距地表 2R(R 爲地球半徑)爲零位能之處，則地表上重量 mg 物體其重力位能爲

(A)$\frac{2}{3}mgR$ (B)$-\frac{1}{2}mgR$ (C)$-\frac{2}{3}mgR$ (D)$-\frac{5}{3}mgR$ (E)$\frac{5}{3}mgR$。答：(C)

2.質量爲 m 之太空船在距地心爲 r 處測得重力加速度爲 g，則該處的重力位能爲 (A)mgr

(B)$\frac{1}{2}mgr$ (C)$-mgr$ (D)$-\frac{1}{2}mgr$ (E)$-2mgr$。答：(C)

3. 設地球半徑爲 R，地球表面之重力場強度爲 g。一質量爲 m 的物體，原爲靜止狀態，因受地心引力的作用，由無限遠處以加速運動達地面。求其抵達地面時之速率爲何？

答：$\sqrt{2gR}$

4.在外太空(設沒有其他星體引力)有質量 m_1 與 m_2 兩物體相距 d，由靜止釋放，當兩物相距 $\frac{d}{2}$ 時，求：(a) m_1 與 m_2 之動量比？ (2) m_1 與 m_2 之動能比？ (3) m_1 之動能？

答：(1)1：1；(2) m_2 ： m_1 ；(3) $\frac{Gm_1m_2^2}{d(m_1+m_2)}$

5.地球半徑爲 R，地表重力加速度量值爲 g，如選定物體在地表時重力位能爲零，則當某質量 m 的物體在距地表高 h 處時(不限於 h<<R)，該物體與地球系統的重力位能值應爲 mgh 的幾倍？答：$\frac{R}{R+h}$

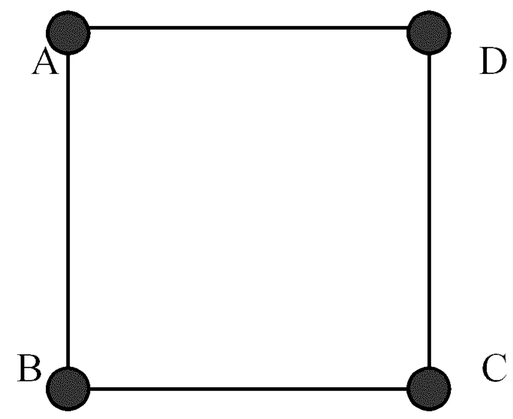
6.設地球質量 M，半徑爲 R_e，有一質量爲 m 的物體自距地表面 $\frac{1}{2}R_e$ 高處自由落到地面上，則當它落至地面上時，其速率爲若干？答：$v=\sqrt{\frac{2GM}{3R_e}}$

例118.如右圖示，在邊長為 a 之正方形四頂點上置有質量均為 m 之四質點，求

(1)系統之重力位能？

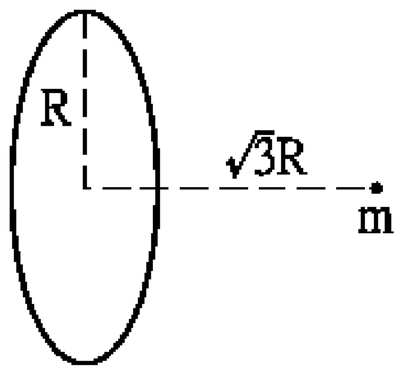
(2)欲將此系統拆散，分別推移四質點至無窮遠處至少需作功若干？

(3)欲將其中一質點移至無窮遠處至少需作功若干？



答：(1) $-\dfrac{(4+\sqrt{2})Gm^2}{a}$ ；(2) $\dfrac{(4+\sqrt{2})Gm^2}{a}$ ；(3) $\dfrac{(4+\sqrt{2})Gm^2}{2a}$

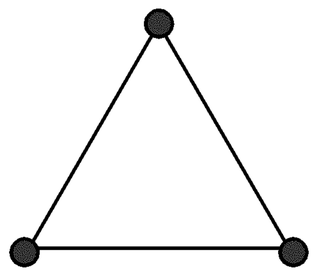
例119.有一均質圓環半徑為 R，質量為 M，在環的中心軸上，距環心 $\sqrt{3}$ R 處有一質量 m 的質點，由靜止射向環心，當質點到達環心處時，其速率=？答：$\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$



吳錫玠物理

※家庭作業

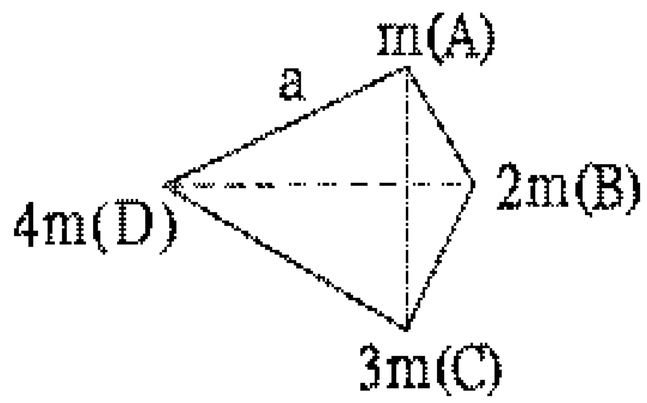
1.外太空有質量爲 m 的三顆星，位於邊長爲 L 的三頂點，由靜止釋放，任其在相互間之萬有引力作用下，互相接近到邊長爲 $\frac{L}{2}$ 時，系統的總動能爲何？答：$\frac{3Gm^2}{L}$



2.在外太空有一半徑爲 R，質量爲 M 的均勻圓環，一質量爲 m 的粒子，以初速 V_0 從無限遠處沿垂直於圓環面的中心軸入射，當粒子到達圓環中心點時，其速率應爲？(設 $m << M$)【2000 奧林匹亞初選】答：$\sqrt{v_o^2 + \frac{2GM}{R}}$

3.半徑 R 的環狀星雲質量均勻分布大小爲 M。質量 m 的星球在環心正下方距離 R 處，受 M 的吸引而由靜止沿中心軸上移，求 m 通過環心時之速率 v=？答：$\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})GM}{R}}$

4.如圖，邊長爲 a 的正四面體頂點各置質量 m、2m、3m 及 4m 的質點，若以無窮遠爲零位面，則此系統的重力位能 U_G=？答：$\frac{-35Gm^2}{a}$



5. 5 歲的女兒不明白媽媽的肚皮爲什麼有一個疤痕，
媽媽向女兒解釋說："這是醫生割了一刀，把你取出的地方。"
女兒認真想了一會兒，很認真地問媽媽："那妳爲什麼要先把我吃掉呢？"

例120.一質量爲 m 的太空船，以半徑 a 繞地球做圓軌道運動。現欲進入半徑 b 的圓軌道（a 和 b 均從地球中心算起，且 b>a），若不計空氣阻力的影響，則太空船的引擎至少需提供多少能量？(設地球質量爲 M，萬有引力常數爲 G)【2002 奧林匹亞初選】答：$\frac{GMm}{2}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$

例121.設地球質量 M，人造衛星質量 m，起初軌道半徑 r，後來因空氣阻力而逐漸減小軌道半徑爲 $\frac{r}{2}$，則:(a)總力學能減少若干？ (b)摩擦力作功若干？ (c)動能增加多少？(d)重力做功多少？答：(a) $\frac{GMm}{2r}$ ；(b) $-\frac{GMm}{2r}$ ；(c) $\frac{GMm}{2r}$ ；(d) $\frac{GMm}{r}$

例122.有一人造衛星在地表附近繞地球作爲等速率圓周運動，其動能爲 K，今欲使其被升至距地心 $3r_e$ 處繞地球運轉，則須再補充若干能量？答：$\frac{2}{3}K$

吳錫玠

※家庭作業

1.一衛星在距地心為 R 處以動能 E_k 繞地作圓運動，今欲使該衛星在軌道半徑為 nR 處（n ＞1）繞地運動，需再供給能量 xE_k，則 x 為：

(A)$\frac{n}{n+1}$ (B)$\frac{n}{n-1}$ (C)$\frac{n+1}{n}$ (D)$\frac{n-1}{n}$ (E)$\frac{1}{n}$。答：(D)

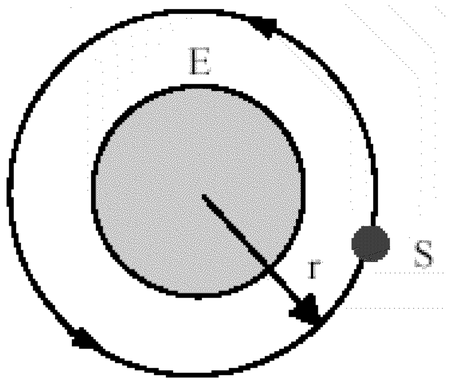
2.人造衛星質量 m，在地表發射，已知地表重力場強度 g，地球半徑 r，則欲發射至高於地表 3r 處運行(作圓周運動)所需能量為若干？答：$\frac{7}{8}mgr$

3.質量為 m 之人造衛星在距地心 R 處之軌道繞地球(質量 M)運行，若欲將此衛星推升至離地心 2R 處 之軌道運行，則需作功？【78 三專】答：$\frac{GMm}{4R}$

4.一人造衛星以動能 E_k 繞地運轉，若欲使其軌道半徑增倍，則需作功若干？答：$\frac{E_k}{2}$

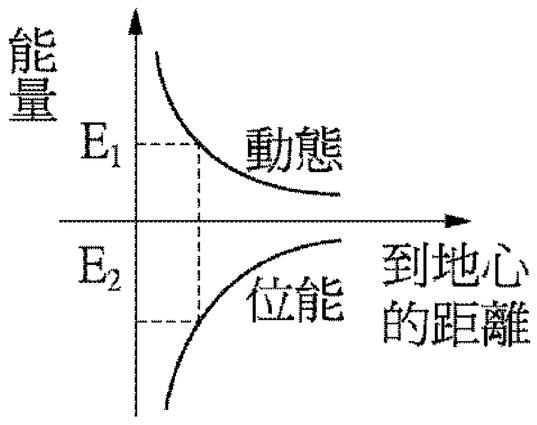
5.一人造衛星環繞地球做圓形軌道運行，如持續受到微小摩擦力的作用，它的什麼量會漸漸減少？ (A)動能 (B)重力位能 (C)動能與重力位能的和 (D)向心加速度的絕對值 (E)它與地球的距離。【73 日大】答：(B)(C)(E)

6.如圖所示，當人造衛星(S)環繞地球(E)做半徑為 r(從地球中心算起)的圓軌道運動時，下列有關該衛星物理量的量值，哪些隨半徑 r 的增加而增加(衛星的質量固定)？



(A)圓周運動速率 (B)圓周運動的角速率
(C)圓周運動的週期 (D)相對於地球中心點的角動量
(E)動能 【93.指考】答(C)(D)

7.某人造衛星繞地球作等速率圓周運動，其動能與位能函數圖如下所示，則附圖中 $\frac{E_2}{E_1}$ 之值為多少？答：-2



例123.一質量為 m 的人造衛星繞地心作圓周運動，軌道半徑為地球半徑 R 的 4 倍，假設地球質量 M，若衛星的力學能損失 $\frac{GMm}{12R}$ ，則衛星的軌道半徑必須變為多少？(A)1.2R (B)2.4R (C)3.6R (D)2R 。答：(B)

例124.一繞地球運轉之人造衛星具有動能 E_k ，因受阻力而使總能量損失 E_k 之後，則衛星之 (A)動能加倍(B)加速度量值加倍 (C)周期減半 (D)速率減半 (E)軌道半徑減半。答：(A)(E)

例125.考慮由一個小行星和一個恆星所構成的系統，質量為 m 的小行量，在半徑為 r 的圓形軌道上，以速度 v 環繞恆星運行。今有一質量同為 m 的殞石，自無窮遠處以相同的速率 v 進入此系統。隕石通過此系統後，其趨近於無窮遠處的速率變為原來的一半。在隕石離開後，此系統的小行星仍以圓軌道環繞恆星運轉。上述所涉及的速度皆指相對於恆星而言。假設在本題中不考慮自轉的影響，則最後小行星的環繞週期為？軌道半徑為？(答案以已知量表示之)【2004 奧林匹亞初選】

答：$\frac{16\pi r}{v}$ ；$4r$

吳錫玠物理

※家庭作業

1.有一衛星繞地球運轉，軌道半徑爲 R 時，動能爲 E_k ，今該衛星增加能量 $\frac{E_k}{4}$ ，則其軌道半徑變爲 (A) $\frac{R}{2}$ (B) $\frac{4R}{3}$ (C)2R (D) $\frac{5R}{4}$ (E) $\frac{3R}{2}$ 。答：(B)

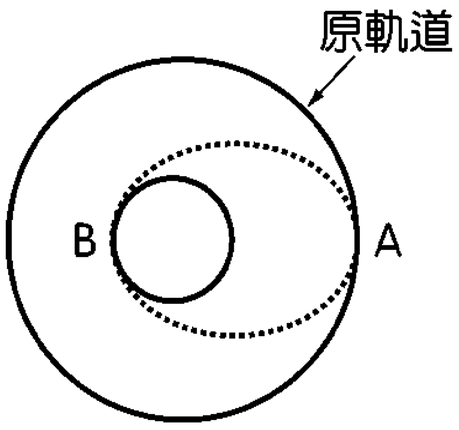
2.質量爲 m 之人造衛星在距地心 R 處之軌道繞地球（置量 M）運行，動能爲 K，(a)若欲將此衛星推升到離地心 2R 處之軌道運行，則需作功__(1)__ $\frac{GMm}{R}$ 。(b)若加入 $\frac{K}{3}$ 之能量，則軌道半徑會由 R 變爲__(2)__R。答：(1) $\frac{1}{4}$ ；(2) 1.5

3.人造衛星以 K 的動能，繞地球作圓周運動，若人造衛星獲得 mk(m<1)的能量，則人造衛星的繞轉半徑將變爲原來的_____倍。答：$r' = \frac{r}{1-m}$

4.人造衛星以 K 的動能，繞地球作圓周運動，因爲某種因素，使得人造衛星的總能損失 nk(n<1)，則人造衛星的繞轉半徑將變爲原來的_____倍。答：$\frac{1}{n+1}$

5.在某國小課堂上，老師在問了學生一個問題：「當鹽跟糖融解在水中時 ，要如何把它們分開？」
這個問題問小學生太難了吧... 那群小學生抱著頭想了半天，突然一個小學生恍然大悟地說：「老師！我知道了，首先把它們蒸乾～」
這時老師很滿意的點點頭，其他的同學也都投以崇拜的眼光 ...
他接著說：「然後把螞蟻丟進去，螞蟻就會把糖給搬出來！」
--> 真是聰明的小孩!!

物理



例126.當要發射太空梭與繞行在外太空的太空站結合，需先將太空梭發射至較接近地球的圓軌道 1。然後再次點火沿橢圓軌道 2，將太空梭送到太空站的圓軌道 3 進行結合。軌道 2 與軌道 3 相切於軌道 2 的遠地點 A，軌道 2 與軌道 1 相切於軌道 2 的近地點 B。設太空梭在圓軌道 1 的束縛能為 E_{b1}、脫離能為 E_{e1}；在圓軌道 3 的束縛能為 E_{b3}、脫離能為 E_{e3}；而在橢圓軌道遠地點 A 的束縛能為 E_{bA}、脫離能為 E_{eA}；及近地點 B 的束縛能為 E_{bB}、脫離能為 E_{eB}；則下列選項中正確的為 (A) $E_{b1}=E_{bB}$ (B) $E_{e1}=E_{eB}$ (C) $E_{b3}=E_{bA}$ (D) $E_{e3}=E_{eA}$ (E) $E_{bA}=E_{bB}$。答：(B)(D)(E)

※家庭作業

1.自地面發射一人造衛星，使其進入繞地球運行之軌道運行，若軌道半徑欲愈大，則：(A)發射時所需的能量愈大 (B)在軌道上束縛能愈小 (C)在軌道上運行動能愈小 (D)在軌道上之位能愈大 (E)在軌道上總能量愈大。答：全

2.假設表面衛星的束縛能為 E，則距地面高度為 R 的同質量人造衛星的束縛能為_____E。(R 為地球半徑)答：$\frac{1}{2}$

3.月球表面無大氣層存在，下述原因中何者比較正確？ (A)月球表面物體的脫離速度較小，氣體分子有足夠的速度脫離月球 (B)月球表面太冷，所有氣體均凍結成固體 (C)月球自形成以來就無氣體產生。如果月球上能產生氣體，則這些氣體將長期留在月球表面 (D)月球表面的氣體都被質量較大的地球吸引而跑到地球表面上了。【70.日大】答：(A)

4.下列敘述何者正確？ (A)質量 m 的太空船距地心為 r 處測得重力加速度為 g，其於該處之重力位能為−mgr (B)靜止於地面上的物體不計地球自轉，其束縛能即為脫離能 (C)在圓形軌道下繞地運行的人造衛星，其束縛能等於脫離能的一半 (D)環繞地球作圓形軌道運行的人造衛星，如果持續受到阻力，那麼其動能會漸減 (E)於橢圓形繞地運行人造衛星，離地心愈遠時，總力學能愈大。答：(A)(B)(C)

例127.給一火箭能量 E，恰可到達距地心 $6R_e$（R_e為地球半徑）處而停止爬昇，則欲使其脫離地球束縛尚需補充能量：(A)$\frac{E}{9}$ (B)$\frac{E}{10}$ (C)$\frac{E}{5}$ (D)10E (E)9E 。答：(C)

※家庭作業

1.假定一質點自地球表面拋出而脫離地球重力場，其脫離速度為v_o，若將此質點先送至離地球中心距離為地球半徑 2 倍之高處靜止，則此時此質點之脫離速度為：

(A)2 v_0 (B)$\sqrt{2}\,v_0$ (C)$\frac{1}{\sqrt{2}}v_0$ (D)$\frac{1}{2}v_0$ (E)4v_0。【64.日大】答：(C)

2.一火箭獲得燃料所作之功 W 後，已由地面上升至距離地心為 d 之高空，而停止運動。若此火箭欲脫離地球吸引力束縛，尚需能量 W/9，則 d 為地球半徑之多少倍？答：10

3.一火箭由燃料作功 W 時可由地面直升到距地面 nR_e（R_e為地球半徑）之高空而停止，若欲使此火箭能脫離地球之重力場，則尚須給能量若干？

(A)$\frac{W}{n}$ (B)$\frac{W}{n-1}$ (C)$\frac{W}{n+1}$ (D)$\frac{(n-1)W}{n}$ (E)$(\frac{n+1}{n-1})W$ 。答：(A)

4.幼稚園老師拿起一顆雞蛋教育小朋友說：「雞蛋是由母雞那裡生來的。」

小朋友紛紛點頭～

隨後老師繼續問道：「那麼小朋友，你們是怎麼來的？」

只見底下所有小朋友不約而同的回答～

「我們是坐娃娃車來的 .... 」

例128.人造衛星以速率 v 繞地球作等速率圓周運動，今人造衛星欲脫離地球重力場的束縛，則其速率應變爲？答：$\sqrt{2}v$

例129.設地球半徑爲 R，自地面發射質量 m 的人造衛星，使之到達離地面 2R 之軌道上繞地作等圓周運動，若地球質量爲 M，則：(1)發射之初速率若干？ (2)在軌道上的速率若干？ (3)欲使軌道半徑變成地球直徑的 2 倍則需要補充多少能量？ (4)要將衛星(3)之軌道拿到無窮遠至少需供給多少能量？

答：(1) $\sqrt{\dfrac{5GM}{3R}}$ ；(2) $\sqrt{\dfrac{GM}{3R}}$ ；(3) $\dfrac{GMm}{24R}$ ；(4) $\dfrac{GMm}{8R}$

例130.(a)在完成登月任務後,登月艇自月球表面升空與母船與登月艇會合後一起繞月球作圓周運動,其速率爲 v。母船與登月艇的質量均爲 m，月球的質量爲 M，重力常數爲 G，求母船與登月艇繞月球軌道運動的：(1)週期？(2)軌道半徑？

(b)在啓動歸程時，船上火箭作一短時間的噴射(噴出廢氣的質量及動量均可忽略)，在登月艇與母船分離，且分離方向與速度方向平行。若分離後母船恰能完任脫離月球的引力，求：(1)在剛分離後登月艇的速率。(2)母船與登月艇在火箭噴射的過程中共獲得的力學能。(所有答案以 G、M、m 與 v 表示之) 【88 日大】

答：(a)(1) $\dfrac{2\pi GM}{v^3}$ ；(2) $\dfrac{GM}{v^2}$ ；(b)(1) $(2-\sqrt{2})v$ ；(2) $(3-2\sqrt{2})mv^2$

※家庭作業

1.將一衛星自地面以初速 v_o 發射恰可脫離地球引力範圍，則欲其在貼近地面之軌道繞地球運轉，其所須之發射速率為(A) $4v_o$ (B) $2v_o$ (C) $\frac{v_o}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{v_o}{2}$ (E) $\frac{v_o}{4}$ 。答：(C)

2.已知某人造衛星繞地球作半徑為 r 的圓周運動，則下列敘述何者正確？(地球質量 M，衛星質量 m) (A)衛星與地球之間的重力位能為 $-\frac{GMm}{r}$ (B)衛星繞地球之動能為 $\frac{GMm}{2r}$ (C)欲使衛星脫離地球重力場的束縛需供給 $\frac{GMm}{2r}$ 的能量 (D)衛星動能加倍，半徑亦加倍 (E)衛星的速率與其質量成平方根正比。答：(A)(B)(C)

3.質量 200 kg 的太空船，環繞某行星作圓周運動，高度距行星表面 5.0×10^7 公尺，而行星半徑亦為 5.0×10^7 公尺，行星表面的重力加速度為 20 m/s^2，則 (1)太空船的動能？ (2)束縛能？ (3)當太空船的動能增為若干，即能脫離此行星？ (4)若太空船登陸該行星表面後，想能脫離行星，脫離速率？

答：(1) $5\times10^{10}J$ ；(2) $5\times10^{10}J$ ；(3) $10\times10^{10}J$ ；(4) $4.47\times10^4 m/s$

4.一人造衛星繞地運行，因補充能量使其軌道半徑增加，則此衛星下列那一項物理量隨之增加？(A)動能 (B)總力學能 (C)繞轉週期 (D)束縛能 (E)軌道速率。答：(B)(C)

5.一個小男孩怕黑，一天晚上媽媽叫他去大門口拿掃把。

『媽媽！我不敢出去，外面很黑』

『不要怕，孩子，有菩薩在那兒，他會保護你的。』

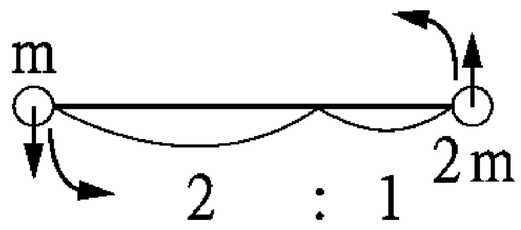
『妳確定菩薩在外面嗎？』小男孩懷疑的問。

『當然，菩薩是無時不在的，你需要他幫忙的時候，他就會出現的！』

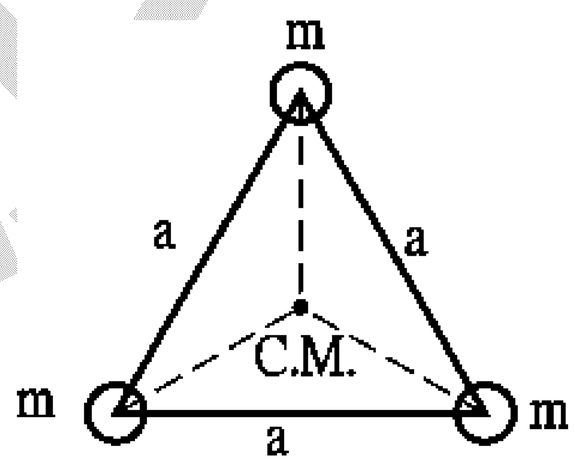
小孩子想了想，慢慢的走到門口，對著外面喊道：

『菩薩，你在外面嗎？幫我把掃把拿進來好不好？』

例131.於外太空，質量分別爲 m 和 2m 的雙星相距 d，受萬有引力繞共同質心做圓周運動，則：(A)m 和 2m 週期相同 (B)m 和 2m 之速率比爲 1：2 (C)m 和 2m 對質心之角動量相同 (D)m 的動能爲 $\frac{2Gm^2}{3d}$ (E)使二者相距∞，至少須作功 $\frac{Gm^2}{d}$。答：(A)(D)(E)

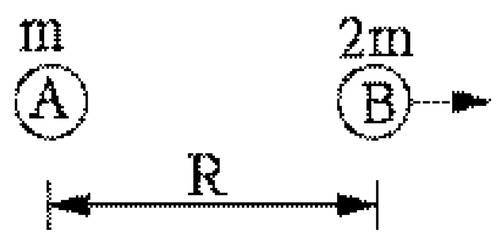


例132.如圖爲 3 顆質量均爲 m 的小行星，各自繞質心運行，若小行星均相距爲 a，則欲拆散此一系統必須給予的能量至少爲？答：$\frac{3Gm^2}{2a}$



例133.如圖所示，A、B 兩小球質量分別爲 m 與 2 m，當兩球相距 R 時，A 靜止而 B 以速度 v 沿兩球連線方向離去，若兩球只受彼此間萬有引力吸引，則 v 值至少爲何，方不致被吸回？

(A)$\sqrt{\frac{6Gm}{R}}$ (B)$\sqrt{\frac{4Gm}{R}}$ (C)$\sqrt{\frac{3Gm}{R}}$ (D)$\sqrt{\frac{2Gm}{R}}$ (E)$\sqrt{\frac{GM}{R}}$。答：(A)



吳錫玠物理

※家庭作業

1.一系統由可視爲質點的甲、乙兩星球組成，其質量分別爲 m 與 M (M＞m)，在彼此間的重力作用下，分別以半徑 r 與 R 繞系統的質心 O 做圓周運動。若質心 O 靜止不動，兩星球相距無窮遠時，系統的總重力位能爲零，則下列敘述，哪些正確？ (G 爲重力常數，亦即萬有引力常數)

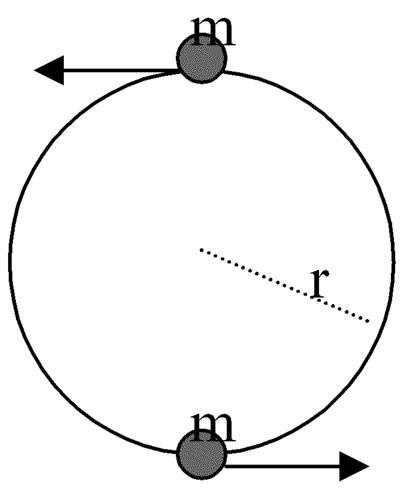
(A)兩星球的動量和爲零　　(B)兩星球的動能相等

(C)兩星球繞 O 運動的週期相等　(D)兩星球的總重力位能爲 $-GmM(\frac{1}{r}+\frac{1}{R})$

(E)兩星球的質量與繞行半徑有 mR＝Mr 的關係。【94.指考】答：(A)(C)

2.兩質量比爲 2：1 之雙星在外太空中互繞其質心運轉，則兩者： (A)角速率之比爲 1：1 (B)向心加速度量值之比爲 1：2 (C)動能之比爲 2：1 (D)面積速率之比爲 1：2 (E)力學能比爲 1：1。答：(A)(B)

3.設有二星球相距 2r，其質量均爲 m，在相互吸引之重力作用下，同時以半徑 r 對此兩星球之質量中心作圓週運動，如圖所示，則至少需多少能量，才能將此二星球拆散成相距無窮遠？

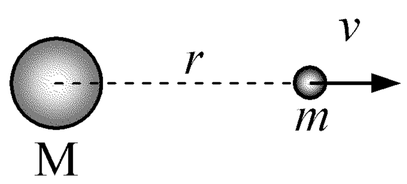


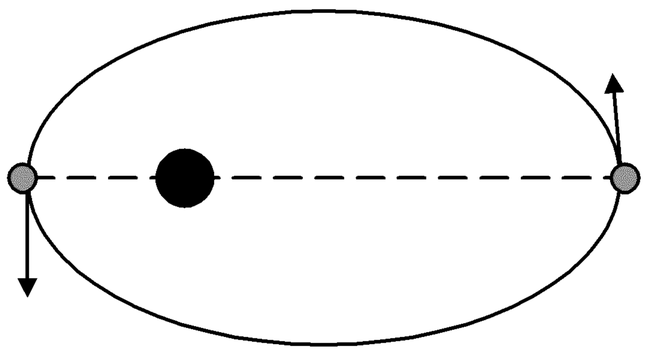
(A) $\frac{2Gm^2}{r}$ (B) $\frac{Gm^2}{r}$ (C) $\frac{Gm^2}{2r}$ (D) $\frac{Gm^2}{4r}$ (E) $\frac{Gm^2}{8r}$ 。【84 日大】

答：(D)

4.兩個質量皆爲 m 的小球在相距 r 時同時以相同速率朝相反方向分開，若兩球間僅有萬有引力之作用，則欲兩球永遠分離其初速至少應爲若干？答：$\sqrt{\frac{Gm}{r}}$

5.如下圖，相距 r 的兩物體，質量分別爲 M、m，若 m 欲脫離 M 的引力範圍所需的最小速度大小爲？答：$\sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}}$





例134.一人造衛星質量爲 m，以橢圓軌道繞地球運行；衛星離地球中心最近的距離爲 R，離地心最遠的距離爲 3R。設地球之質量爲 M，重力常數爲 G，試求(1)衛星在離地心最近和最遠處之動能比。(2)衛星在離地心最近和最遠處之動能差？ (3)此衛星繞地球時系統之力學能 E 爲何？(4)在近日點時之曲率半徑 R 爲何？【86 年大學改】答：(1)9：1；(2)$\frac{2GMm}{3R}$；(3)$-\frac{GMm}{4R}$；(4)1.5R

例135.一質量爲 m 的行星沿橢圓形軌道環繞太陽運動，已知此行星離太陽的最大和最小距離分別爲 R 和 r；行星的最小速率爲 v，此行星在近日點的動能減去在遠日點的動能，其差值爲何？【92 指考】

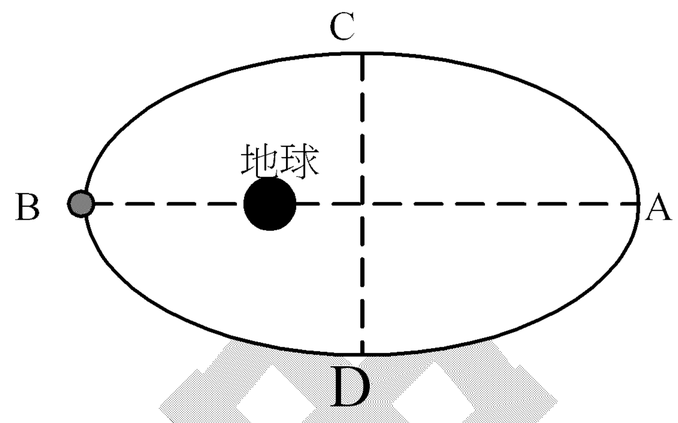
(A)0 (B)$\frac{m(R-r)v^2}{2r}$ (C)$\frac{m(R-r)v^2}{2R}$ (D)$\frac{m(R^2-r^2)v^2}{2r^2}$ (E)$\frac{m(R^2-r^2)v^2}{2R^2}$。答：(D)

例136.假想從地球的北極處，沿水平方向以初速 $v=\sqrt{\frac{4Rg}{3}}$ 發射一物體，式中 R 爲地球的半徑，g 爲地表面的重力加速度。若不考慮大氣對物體運動的影響，則(1)該物體的運動軌跡爲何種形狀？(2)又該物體在運動過程中，離開地球表面的最大高度爲何？【2004 奧林匹亞初選】答：(1)橢圓；(2)R

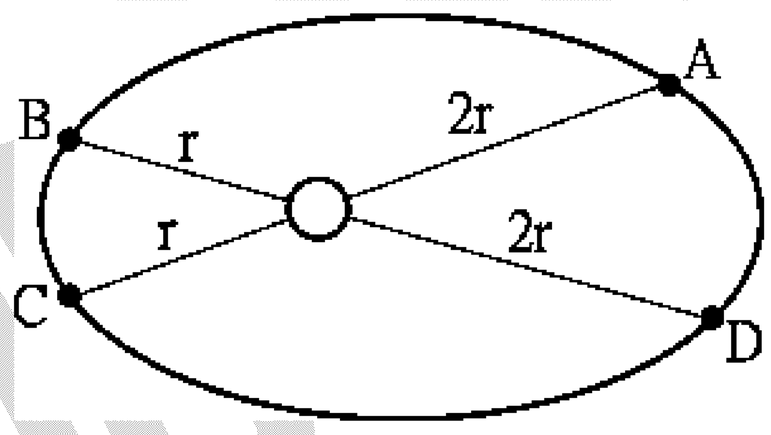
吳錫玠物理

※家庭作業

1.某人造衛星(質量 m)繞地球的橢圓軌道，距地球最近與最遠距離為 1：2，若在近日點的速率為 v，則：(1)由 A 至 B 萬有引力對衛星作功若干？ (2)C 至 D 萬有引力對衛星作功若干？答：(1)$\frac{3}{8}mv^2$；(2)0



2.如圖，一人造衛星繞地球作橢圓軌道運轉時，若僅受重力作用，則下列敘述何者正確？(地球與衛星質量分別為 M 與 m) (A)衛星在 A 處的位能較 B 處的位能小 (B)衛星在 B 處的動能為$\frac{GMm}{2r}$ (C)衛星在 B，C 兩處的速率相等 (D)衛星在 A，B，C，D 處的力學能相等 (E)衛星由 A 處運行至 B 處時，重力對它作正功$\frac{GMm}{2r}$。答：(C)(D)(E)



3.質量 m 之行星繞質量 M 之太陽，作軌道平均半徑 5R，離心率 0.20 之橢圓軌道運轉：

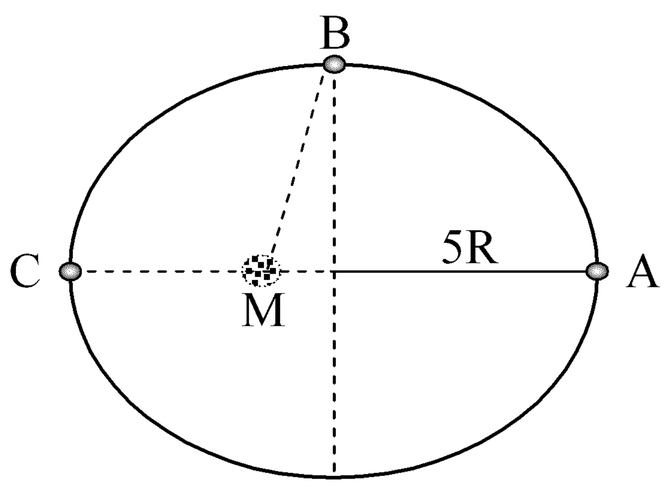
(1)行星自遠日點 A 移至短軸端點 B 與自短軸端點 B 移至近日點 C 所須時間之比值(T_{AB}/T_{BC})為若干？

(2)行星自遠日點 A 移至近日點 C 動能改變若干?

(3)行星在近日位置動能為遠日位置之幾倍？

(4)若取行星與日相距無窮遠處重力位能為零，則此行星運轉時之力學能若干？

(5)行星通過軌道上短軸端點時之速度為若干？



答：(1)≒1.3；(2)$\frac{GMm}{12R}$；(3)9/4；(4)$-\frac{GMm}{10R}$；(5)$\sqrt{\frac{GM}{5R}}$

4.一太空船以速率 v 繞地心做半徑 R 的等速圓周運動。太空船上的推進器於某一瞬間沿軌道切線方向噴射，使其速率變成 rv(r>0)。若太空船仍能環繞地球運行，則(1)r 必須小於若干？(2)太空船離地心的最遠點和最近點之間的距離為？(3)太空船環繞地球運行的週期變為？【2000 奧林匹亞初選】答：(1)$r<\sqrt{2}$；(2)$\frac{2R}{2-r^2}$；(3)$\frac{2\pi R}{v(2-r^2)^{3/2}}$

觀念十一　物理量的因次

1. 物理量包含「數字」及「單位」兩部分

2. S. I. 制：

物理量	時間	長度	質量	電流	溫度	光度	物質量
單位	秒	公尺	公斤	安培	度	燭光	莫耳
符號	s	m	kg	A	K	Cd	$mole$

3. 力學所使用的基本量的因次：

物理量	時間	長度	質量
S. I. 單位	秒 s	公尺 m	公斤 kg
因次	T	L	M

4. 力學常用物理量的因次：

物理量	S. I. 單位	因次
位移	m	L
速度	m/s	LT^{-1}
加速度	m/s^2	LT^{-2}
週期	s	T
頻率	$1/s$	T^{-1}
角速度	rad/s	T^{-1}
力	$Nt = kg \cdot m/s^2$	LMT^{-2}
彈力常數	$Nt/m = kg/s^2$	MT^{-2}
力矩	$Nt \cdot m = kg \cdot m^2/s^2$	L^2MT^{-2}
動量	$kg \cdot m/s$	LMT^{-1}
衝量	$Nt \cdot s = kg \cdot m/s$	LMT^{-1}
萬有引力常數	$Nt \cdot m^2/kg^2 = m^3/(kg \cdot s^2)$	$L^3M^{-1}T^{-2}$
動能	$J = kg \cdot m^2/s^2$	L^2MT^{-2}
功	$J = Nt \cdot m = kg \cdot m^2/s^2$	L^2MT^{-2}
功率	$W = J/s = kg \cdot m^2/s^3$	L^2MT^{-3}

5. 物理量的運算：

(1)具有相同因次的物理量才可以進行代數運算(加減)

(2)不同因次的物理量只可以進行乘除，不能行代數運算(加減)

6.利用因次分析物理量的單位

【證明】找出彈簧週期 T 與彈力常數 k、物體質量 m、最大伸長量 x 的關係。

將週期以長度、時間、質量三個物理量表之。

設 $T = k^a m^b x^c$

以因次表示：$T = (MT^{-2})^a (M)^b (L)^c = L^c M^{a+b} T^{-2a}$

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = a + b \\ 1 = -2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0.5 \\ b = 0.5 \\ c = 0 \end{cases}$$

所以週期與 $k^{-1/2} \cdot m^{1/2}$ 正比，可以表為 $T \propto \sqrt{\frac{m}{k}}$，與 x 無關。

例137.設 f 為力，m 為質量，x 為位移，t 為時間，v 為速率，k 為彈力係數，則下列各量中具有加速度單位的是 (A) $\frac{ft}{m}$ (B) $4\pi\frac{x^2}{t^2}$ (C) $\frac{kx}{m^2}$ (D) $\frac{v^2}{x}$ (E) $\frac{mv}{t}$ 。答：(D)

※家庭作業

1.下列哪些物理量的因次是相同的？ (A)力矩和功 (B)力矩和動能 (C)功和動能 (D)動量和衝量 (E)速度和角速度。答：(A)(B)(C)(D)

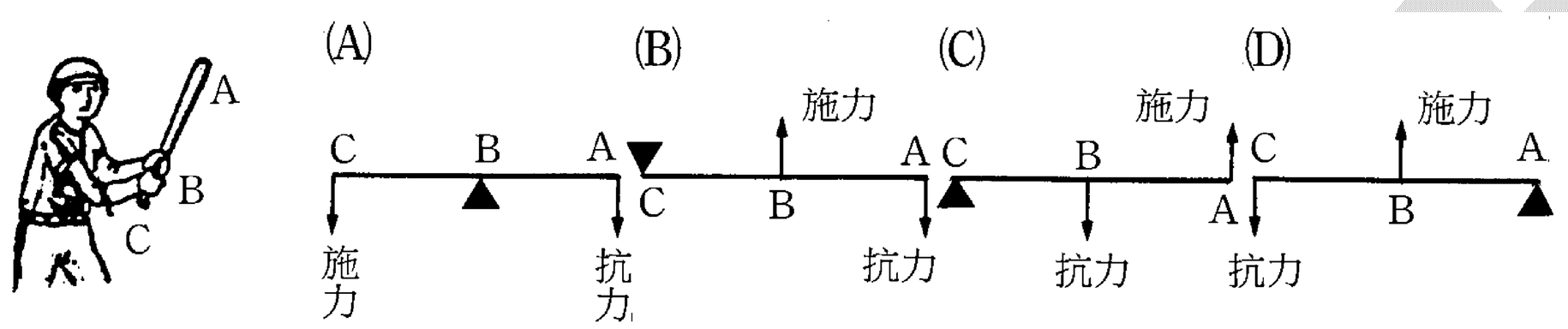
2.下列物質科學物理篇(上)量的單位何者正確？ (A)力：牛頓 (B)動能：焦耳 (C)動量：牛頓・米 (D)力矩：牛頓・秒 (E)加速度：公尺/秒。答：(A)(B)

3.證明衝量和動量有相同的因次；功和動能有相同的因次。答：(1)衝量 I=Ft⇒因次為 $MLT^{-2} \times T = MLT^{-1}$，動量 P=mv⇒因次為 MLT^{-1}；(2)功 W=Fs⇒因次為 $MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$，動能 $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ ⇒因次為 $M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}$

觀念十二　簡單機械(補充教材)

※槓桿

例138.棒球員手持球棒擊中一球，正確的圖形應為下列那一種？答：(B)



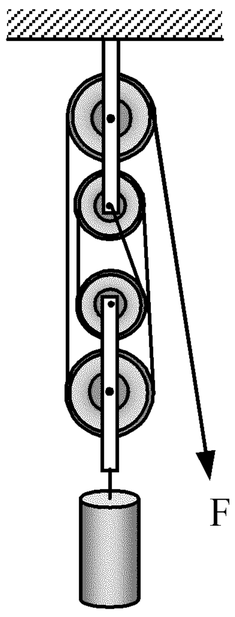
※滑輪

例139.如右圖所示為一用來便利提重物的滑輪組，假定沒有摩擦力，連接重物的動滑輪總重量 2.0 kg，有一重物 10 kg 要被提升 50 厘米：

(1)至少需要多少的 F 才能提起此重物？

(2)施力須拉多長的距離？須多少功？

答：(1)3.0kgw；(2)2.0m；58.8J



吳錫玠物理

※斜面

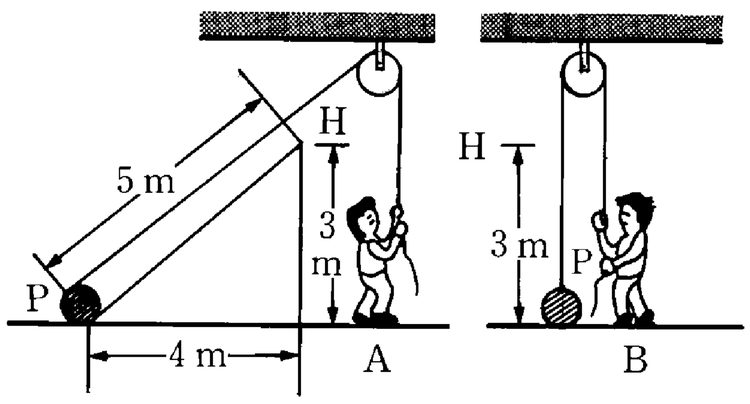
例140.A、B 兩人分別以斜面及定滑輪將 20 公斤之物體拉至 3 公尺高處 H，使用斜面，斜面長為 5 公尺。試回答下列問題：

(1) A 作功共？焦耳；B 作功？焦耳。

(2)若 A 施力 F_A，B 施力 F_B，則 F_A、F_B 何者較大？

(3)A 將重物高 3 公尺需時 5 秒，則其功率為？瓦特。

答：(1)588；588；(2) F_B ；(3)117.6



※家庭作業

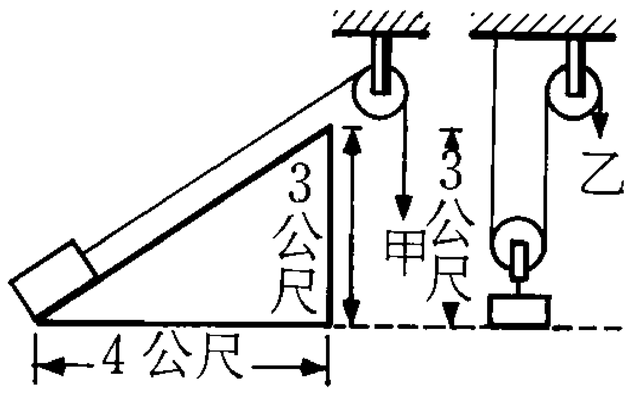
1.附圖中，甲以斜面將 40 公斤重之物體等速拉至 3 公尺高處，歷時 40 秒；乙以滑輪組將同一物體等拉至相同高度，歷時20秒。若不計摩擦力及滑輪重，則下列敘述何者正確？

(A)甲比乙省力，但甲對物體作功較多，功率較大

(B)乙比甲省力，但兩人對物體作功相同，功率也相同

(C)甲比乙省力，但兩人對物體作功相同，功率以甲較大

(D)乙比甲省力，但兩人對物體作功相同，功率以乙較大。答：(D)



2.甲、乙、丙三人各用輪軸、斜面、定滑將同重物體，慢慢拉至同樣之高度，則三人作功以 (A)甲最大 (B)乙最大 (C)丙最大 (D)三人一樣大。答：(D)

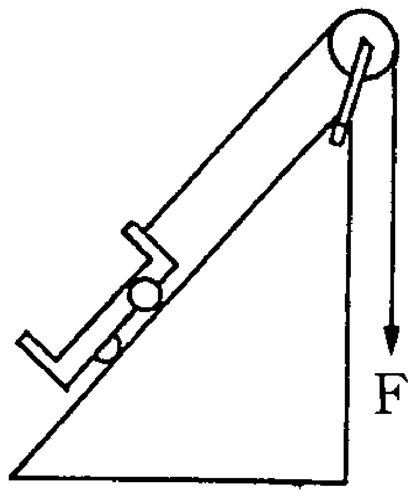
※機械利益(A)與機械效率(E)

例141.附圖的車子重 5 公斤重，斜面長 1 公尺、高 60 公分，小明在定滑輪下方施力 4 公斤重，恰可將車子等速率由斜面底拉至斜面頂，試回答下列問題：

(1)施力 F 共作功？　　(2)小車的位能增加？

(3)摩擦力阻力共作功？　　(4)機械的機械效率？

答：(1)39.2J；(2)29.4J；(3)-9.8J；(4)75%



※家庭作業

1.對某機械輸入 500 J，因摩擦而消耗 100 J，則該機械的機械效率？答：0.8

2.有關機械的機械效率(E)之敘述，下列何者正確？ (A) E 必小於 1 (B) E 愈大，則損失的能量愈大 (C) 輸入機械的能和機械所完成的功之比稱爲 E (D) E 的大小的摩擦力無關。答：(A)

3.甲、乙、丙三人各用輪軸、斜面、定滑將同重物體，慢慢拉至同樣之高度，則三人作功以 (A)甲最大 (B)乙最大 (C)丙最大 (D)三人一樣大 。答：(D)

4.帶小兒子參觀清泉崗空軍基地時，兒子在大樓前指著伍將軍銅像問：「那是什麼人」於是老爸我義正詞嚴告訴他：「那個人因爲飛機失事掉下來，所以塑像紀念他 .. 」這時兒子一臉疑惑問我：「爲什麼開飛機的人掉下來就會變成石頭？」

吳錫玠物理