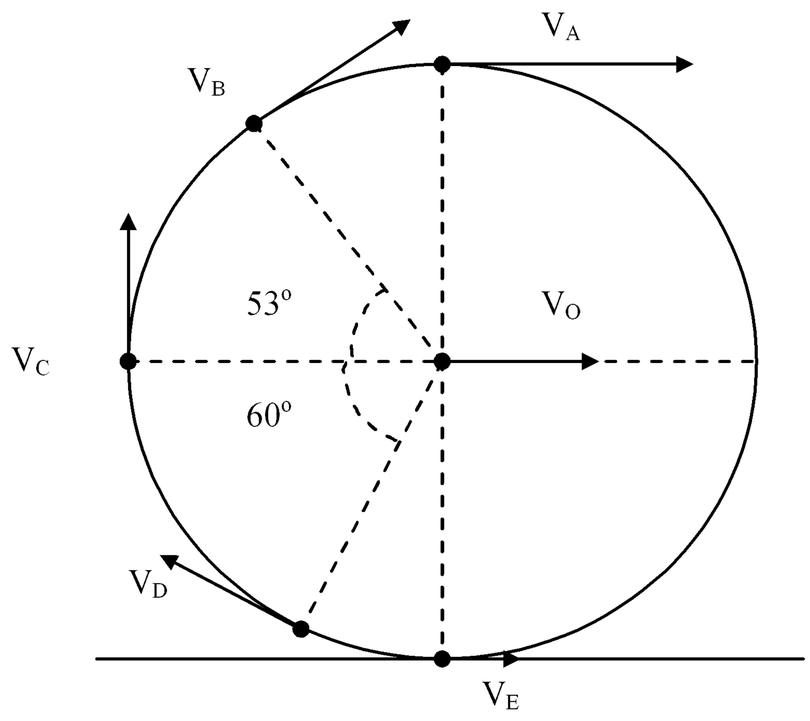
PHYSICS

第九章

轉動



_____年 _____班 _____號

姓名：_____

吳錫玠老師 編授

第九章 轉動

9-1 角速度和角加速度

物理量	平移	轉動	圓周運動時二者關係
(角)位移	Δx	$\Delta\theta$	$\Delta x = r\Delta\theta$
平均(角)速度	$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$	$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$	$v=r\omega$
平均(角)加速度	$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	$a_t=r\alpha$ $a_n=r\omega^2$
等(角)加速度	$v=v_\circ+at$ $\Delta x=v_\circ t+\frac{1}{2}at^2$ $v^2=v_\circ^2+2a\Delta x$	$\omega=\omega_\circ+\alpha t$ $\Delta\theta=\omega_\circ t+\frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2=\omega_\circ^2+2\alpha\Delta\theta$	

一、角位移、角速度、角加速度

1.角位移：物體或質點所轉過的角度，以 $\Delta\theta$ 表示；單位為弧度**(**或弳度**)**，以 **rad** 表示。

2.角速度：單位時間 Δt 內所轉過的角度 $\Delta\theta$，以 ω 表示；單位為 **rad/s**。

(1)平均角速度：$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta_2-\theta_1}{\Delta t}$

(2)瞬時角速度：$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}$

(3) $\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$

3.角加速度：單位時間 Δt 內角速度的變化量 $\Delta\omega$，以 α 表示；單位為 rad/s^2。

(1)平均角加速度：$\overline{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega_2-\omega_1}{\Delta t}$

(2)瞬時角加速度：$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}$

二、線量(移動)&角量(轉動)的關係

當質點以半徑 **r** 作圓周運動時，質點的移動與轉動有以下關係

(1) $\Delta x=r\Delta\theta$

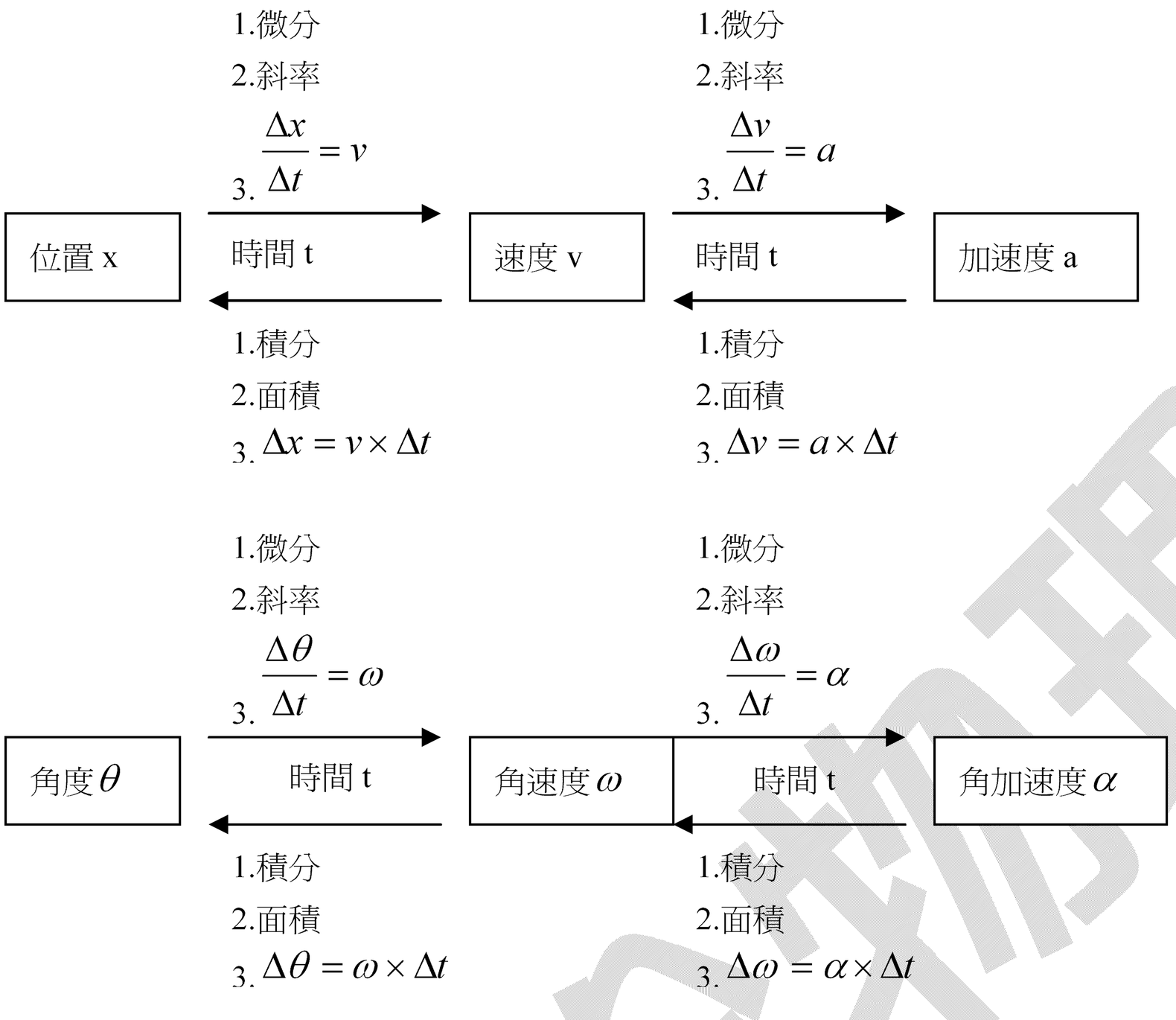
(2) $v=r\omega$

(3) $a_t=r\alpha$

(4) $a_n=r\omega^2$

吳錫玠物理

移動與轉動的比較



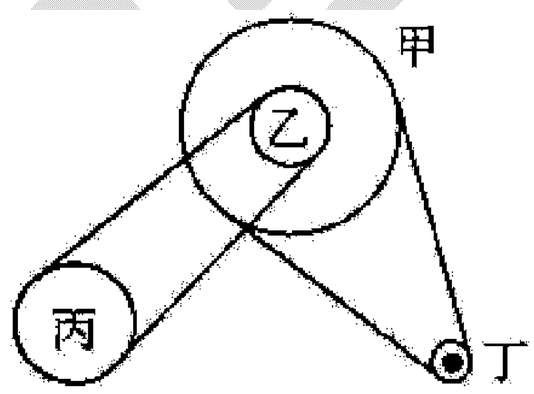
阿蔥的姊姊有一天和先生回娘家,晚上就睡在娘家,
第二天早上,阿蔥起床準備上學,
出門前問媽媽說:姊姊和姐夫起床了嗎?,
媽媽說:還沒,
於是阿蔥就去上學了,
中午阿蔥回家吃飯,又問媽媽:姊姊和姐夫起床了嗎?,
媽媽說:還沒,
下午阿蔥放學回家,一進門就問媽媽說:姊姊和姐夫起床了嗎?,
媽媽又說:還沒,你今天為甚麼一直問你姊姊和姊夫起床了沒?,
阿蔥回答:昨晚我要睡覺前聽見姊姊要姊夫去浴室拿潤滑劑,可是我早上起床的時候，發現我放在浴室的一條強力接著劑不見了

吳錫玠物理

※轉動&移動 $v=r\omega$ 、 $a_t=r\alpha$ 、 $a_n=r\omega^2$

例1. 一對齒輪契合，半徑比為 3：2，求在變速旋轉時 (1)角速度之比 (2)輪緣上之點的切線速度比 (3)輪緣上之點法線加速度比 (4)輪緣上之點切線加速度比。答：(1)2：3；(2)1：1；(3)2：3；(4)1：1

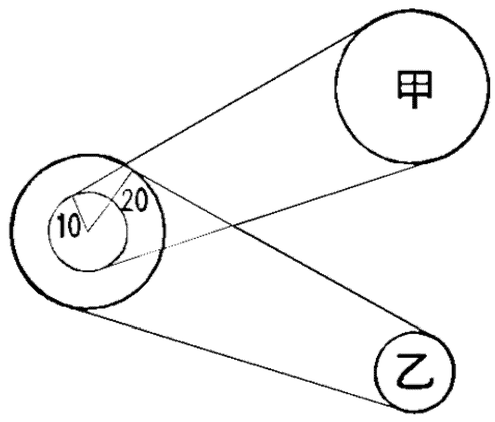
例2. 右圖表示一飛輪傳動系統，各輪的轉軸均固定且相互平行。甲、乙兩輪同軸且無相對轉動。已知甲、乙、丙、丁四輪的半徑比為 5：2：3：1，若傳動帶在各輪轉動中不打滑，則丙及丁輪角速度之比值為_____。【80 年大學】答：$\frac{2}{15}$



類 1.一飛輪保持 8π弧度/秒之等角速度轉動，試求：(a)半小時內共轉若干轉？ (b)設飛輪之半徑為 40 厘米，則其邊緣上一點之切線速度及加速度為若干？答：(1)7200 轉；(2)v=1005cm/s；a_t=0；a_n=2.52×10^4cm/s^2

類 2.一準確時鐘面上，秒針、分針、時針、角速度之比為何？答：720：12：1

類 3.一電動機之轉速為每分鐘 1800 轉，在其軸上有二個滑輪，其半徑各為 10cm 與 20cm，求：
(1)滑輪表面上之線速度各為多少 m/s？答：6π ；12π
(2)此二滑輪可用皮帶與半徑 20cm 之甲滑輪、半徑 10cm 之乙滑輪相連如右圖，則甲、乙兩滑輪之轉速(轉/秒)各為若干？答：15r.p.s.；60r.p.s.



類 4.一電動機之轉速為每分鐘 1800 轉，在其軸上有三個滑輪，其直徑分別為 5、10 與 15 厘米。(a)求諸滑輪表面上之切線速度各為多少cm/sec？ (b)此諸滑輪可用皮帶與另一軸同樣一組滑輪連起;5 厘米者對著 15 厘米者，10 厘米者對著 10 厘米者，15 厘米者對著 5 厘米者，求此另一軸上三種可能之角速度各為每分鐘若干轉？答：(a)v_5=471cm/s；v_{10}=942cm/s；v_{15}=1413cm/s；(b)f_{15}=600r.p.m.；f_{10}=1800r.p.m.；f_5=5400r.p.m.

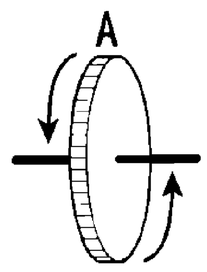
類 5.腳踏車前後兩齒輪分別為 60 齒及 20 齒，以鏈條連接，若後車輪輪緣距軸心 0.5 m，且和地面間沒有滑動現象，腳踩一圈，車子前進_____m。答：3π

※等角加速度 $\omega = \omega_{。} + \alpha t$

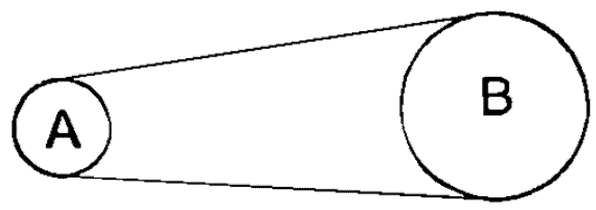
例3. 有一物體作等角加速度轉動。若該物體的角速度在 t=1 秒及 t=6 秒時，分別為 5 弧度/秒及 10 弧度/秒，則下列敘述何者正確： (A)此物體轉動的角加速度為 2.0rad/sec^2 (B)此物體在 t=4 秒時的角速度為 11rad/sec (C)此物體在 t=2 秒時的角速度為 4rad/sec (D)此物體在 t=1 至 t=3 秒間的角位移為 12rad。【79 年三專】【單選】答：(D)

類 1.一物體在 t＝0 秒時，角速度爲 5.0 rad/sec，t＝3 sec 時爲 8.0 rad/sec，t＝6 sec 時爲 14 rad/sec，則此物體之運動爲： (A)變角速度運動 (B)等角加速度運動 (C)變角加速度運動 (D)t＝3 sec 至 t＝6 sec 間之平均角加速度爲 2 rad/sec (E)t＝0 至 t＝6 sec 間之平均角加速度爲 1.5 rad/sec。答：ACDE

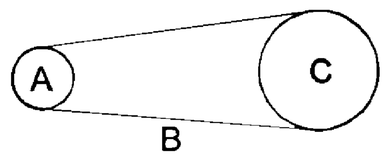
類 2.半徑 R=0.5 之轉輪，繞軸由靜止均勻加速轉動，在 5 秒內角速度增加至 900r.p.m.。則原在輪頂上一點 A，經 1 秒後的位置在 (A)輪底 (B)原點 (C)自原點轉 $\frac{\pi}{2}$ 處 (D)自原點轉 $\frac{3\pi}{2}$ 處 (E)以上皆非。答：(A)



類 3.如右圖，A、B 兩輪半徑爲 10cm 與 25cm，A 輪由靜止加速，角加速度 $\alpha_A = \frac{\pi}{2} rad/s^2$，帶動 B 輪(設皮帶不滑動)，使 B 輪轉速達 10 轉/秒，需時幾秒？答：100 秒



類 4.半徑 10cm 的 A 輪以傳送帶 B 與半徑 25cm 的 C 輪偶合如圖所示，A 自靜止以 $\frac{\pi}{2}$rad/s^2 之等角加速度旋轉，當 C 之轉速達到 100rev/min 時全程歷時多少？答：$\frac{50}{3}$ 秒



類 5.A、B 兩輪半徑比爲 R_A：R_B＝1：2，兩者以傳送帶連接。B 輪以等角加速度 $\frac{\pi}{2}$ rad/s^2 由靜止轉動，經 10 秒 A 輪角速度爲_____rad／s。答：10π

類 6.某汽車引擎的角速率於 10 秒內由 25r.p.s 增至 50r.p.s，設其爲等角加速度運動，則此角加速度爲何？ (A)15.7 (B)31.4 (C)78.5 (D)157 (E)314 rad／s^2。答：(A)

※等角加速度 $\Delta\theta = \dfrac{\omega + \omega_o}{2} \cdot t$

例4. 一汽車引擎在無負荷時之轉速為 500rpm，當加速器的按鈕被壓下時，角速度在 5 秒內增至 3000rpm，設角加速度為常數。(a)用每秒弳度來表示它的最初和最後之角速度？ (b)求其角加速度，(以每秒平方弳度算) (c)求在加速期內共轉了多少轉？答：(a) $\dfrac{50\pi}{3}$ rad/s；100π rad/s；(b) $\dfrac{50\pi}{3}$ rad/s^2；(c)145.8 轉

類 1.某輪在 15 秒內轉了 90 轉，於此時間末了之角速率爲 10 轉/秒，若爲等角加速度運動，則輪在開始時的角速率爲何？答：2 轉/秒

類 2.作等角加速度運動的飛輪，其角速度由 5 rad/s 在 10 秒內變成 15 rad/s，則在此時距內轉過的圈數爲_____圈。答：$\dfrac{50}{\pi}$

類 3.某汽車引擎的角速率於 10 秒內由 25r.p.s 增至 50r.p.s.，在此時間內引擎轉過若干轉？(A)78.5 (B)125 (C)250 (D)314 (E)375。答：(E)

類 4.有一飛輪作等角加速度轉動，其角速度由 ω_1 變成 ω_2，共歷時 t 秒，則在此時距內的平均角速度爲若干？ (A) $\dfrac{w_1+w_2}{t}$ (B) $\dfrac{w_2-w_1}{t}$ (C) $\dfrac{w_1+w_2}{2}$ (D) $(\omega_1+\omega_2)\times t$ 。答：(C)

類 5.一飛輪繞軸轉動，由於軸承受摩擦關係，在 ω ＝240 r.p.m.時，僅再歷時 10 分鐘便停止運轉，則在該 10 分鐘內飛輪轉了幾圈？ (A)60 (B)800 (C)1200 (D)1600 (E)2400。答：(C)

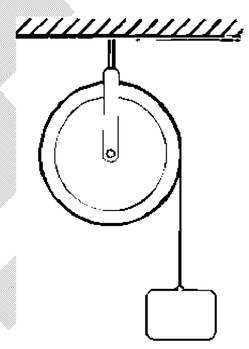
類 6.某日，一位小女孩子搭某班飛機從台北飛高雄，這班飛機是她姐姐在服務的航空公司
而她姐姐也正好在這班飛機上做 service.
姐姐在家裡向小妹交代：「上飛機不要吵別人，不要亂要東西給別人增加麻煩。」
小妹在座位上安份守己乖乖的坐著，但姐姐的同事卻認出了小妹妹，特別拿了罐可樂給小妹妹喝，姐姐在不久後過來巡查時看到了，順手就拿起手上的報紙捲起來，從妹妹頭上就是一棒，說道：「就叫妳不要麻煩別人了，妳還講不聽!!!」
後來這班飛機的後艙在整個旅程都安安靜靜，沒人跟空姐點飲料或是要報紙
.....。

吳錫玠物理

※等角加速度 $\Delta\theta = \omega_{\circ}t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

例5. 一半徑為 2 呎之輪，由靜止開始以等角加速度轉動，在 10 秒鐘內共轉過 40 轉，設求：(a)角加速度 (b)10 秒末輪之角速度 (c)10 秒末輪緣上一點之切線速度，切線加速度，及法線加速度各為若干？答：(a)5rad/s^2；(b)50rad/s；(c)100ft/s；10ft/s^2；5000ft/s^2

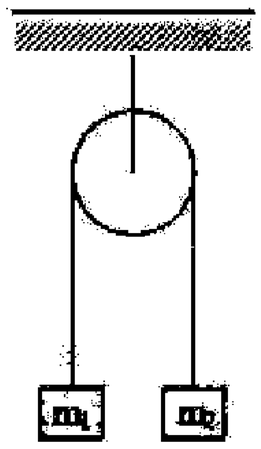
例6. 如右圖示，一長繩繞過半徑為 0.5 公尺的定滑輪繫了一物體，並將物體自靜止釋放之，至三秒末時物體下降了 18 公尺，求此時滑輪的角加速度與角速度。答：8rad/s^2；24rad/s



例7. 某物體作等角加速度運動，於第 4 秒內之角位移為 22rad，於第 8 秒內之角位移為 38rad，則：(1)初角速度若干？ (2)角加速度若干？答：(1)8rad/sec；(2)4rad/sec^2

類 1.甲、乙兩人沿圓軌道同向賽跑，甲沿著半徑為 r_1 的外跑道跑，乙則沿著半徑為 r_2 的內跑道跑，設甲以 v 的速率經過乙時，乙開始起跑。此後甲始終以 v 的速率跑。而乙則以等角加速度追甲，則在乙追及甲時，乙的速率為？(A) $2v\times\frac{r_1}{r_2}$ (B) $v\times\frac{r_1}{r_2}$ (C) v (D) $2v\times\frac{r_2}{r_1}$ (E) $v\times\frac{r_2}{r_1}$【88 日大】答：(D)

類 2.如圖 $m_1 > m_2$，滑輪半徑 R，只有轉動而無滑動，m_1 與 m_2 等高放手，t 秒後高度差 h，則滑輪角加速度若干？答：$\frac{h}{Rt^2}$



類 3.有一直徑 1 公尺之飛輪支於一水平軸上，一繩繞於輪之外緣，繩端施以定力 40 牛頓，2 秒後，繩被拉長 10 公尺，則此瞬時輪緣：(A)切線加速度之量值為 $5\,m/s^2$ (B)角加速度為 $10\,rad/s^2$ (C)角速度為 $20\,rad/s$ (D)法線加速度量值為 $200\,m/s^2$ (E)加速度量值為 $205\,m/s^2$。答：(A)(B)(C)(D)

※等角加速度 $\omega^2 = \omega_\circ^2 + 2\alpha\Delta\theta$

例8. 以 36km/hr 行駛的汽車，車輪直徑為 1m。試求：(a)輪對軸的角速率若干？(b)若使輪在 30 轉內停止轉動，則其等角加速度為若干？(c)在此剎車時間內汽車行駛多遠？答：(a)20rad/s；(b)-1.06rad/s^2；(c)94.2m

例9. 一圓盤作等角加速度，由初角速度 ω_o 加速至末角速度 ω 時，共轉過 n 圈，則轉過 $\frac{1}{2}$n 圈時，角速度為_____。答：$\sqrt{\frac{\omega_o^2+\omega^2}{2}}$

類 1.一飛輪由 1.5 弧度/秒的角速度經過 40 轉後，減至完全停止，假設角加速度不變，則：(a)至停止需時若干？(b)角加速度爲何？(c)完成 20 轉，需時若干？答：(a)335 秒；(b)-0.0045rad/s^2；(c)98.6 秒

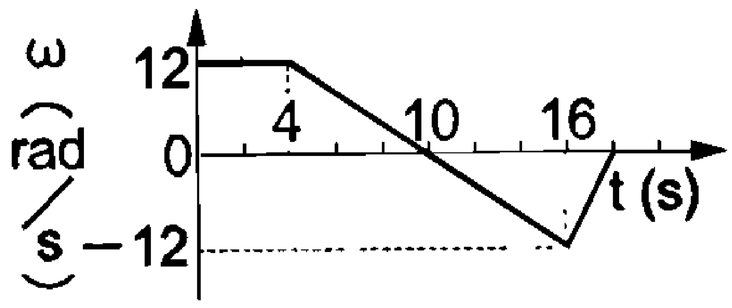
類 2.以 72 公里/小時行駛之汽車，車輪直徑 80 公分，求：(1)輪對軸的角速率？(2)若欲使輪在 30 轉內停止，則其角加速度爲何？(3)在剎車時間內汽車行駛多遠？答：(1)50rad/s；(2) $-\frac{125}{6\pi}$ rad/s^2；(3) 24π 公尺

類 3.一鏈球選手擲鏈球，鏈長 1 公尺，此人自靜止開始旋轉，角加速度爲 1rad/sec^2，於第五圈完成時，鏈球脫手飛出，此瞬間球之線速度爲_____m/s。答：7.9m/s

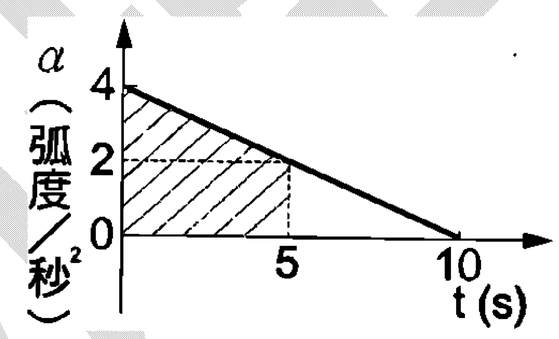
類 4.一輪其半徑爲 20 厘米，由靜止開始，以 0.2 弧度/$秒^2$ 之等角加速度轉動，試求：(a)2 分鐘末之角速度爲若干 r.p.s.？(b)2 分鐘內共轉若干周？(c)10 秒末其邊緣上一點之加速度大小爲若干？答：(a)3.82r.p.s.；(b)229.3 圈；(c)80.1cm/s^2

※$\omega-t$圖

例10. 右圖表示一轉動剛體之$\omega-t$圖，t=0 時剛體係在角位置為零處，則：(1)最後之角位置為何？(2)全程平均角速度為何？(3)全程平均角加速度為多少？答：(1)36rad；(2)2rad/s；(3)$-\frac{2}{3}$rad/s^2



類 1.轉動質點之角加速度與時間關係圖如右圖。在 t=0 時質點之角速度爲零，問：(1)在 t=5sec 時之角速度爲何？(2)t=5sec 時之角加速度爲何？(3)t=10sec 時之角速度爲何？(4)10sec 內之平均角速度爲何？答：(1)15rad/s；(2)2rad/s^2；(3)20rad/s；(4)$\frac{40}{3}$rad/s

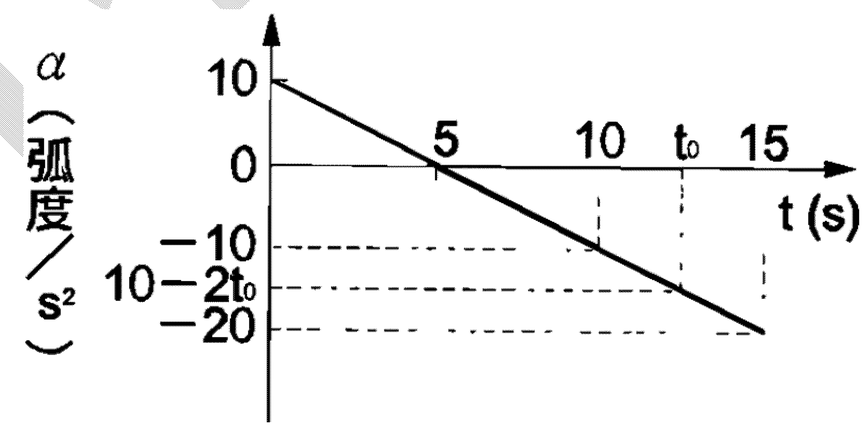


類 2.右圖爲一剛體轉動時之$\alpha-t$圖，設 t=0 時，剛體之角速度爲 10 弧度/秒，求：

(1)最大之正向角速度？答：35rad/s

(2)何時角位移最大？答：$5+\sqrt{35}$ 秒

(3)第 5 秒末至第 15 秒末之平均角加速度？答：$-10rad/s^2$



類 3.一剛體繞一定點分三階段運動，第一階段由靜止開始以$+\alpha$角加速度旋轉達ω之角速度後，接著第二階段以等角速度ω運轉，第三階段施以$-\alpha$角加速度而後停止，若此三階段之角位移均相等，則全程：(1)歷時若干？答：$\frac{5\omega}{2\alpha}$

(2)角位移如何？答：$\frac{3\omega^2}{2\alpha}$

類 4.一質點由靜止出發，以α_1之等角加速度轉動一段時間後，改以$-\alpha_2$之等角加速度轉動至停止，共歷時間 t，則全部的角位移爲：

(A)$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}t$ (B)$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}t^2$ (C) $\frac{\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_1+\alpha_2)}t^2$ (D)$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2}t^2$ (E)$\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2}{2\alpha_1\alpha_2}t$。答：(C)

類 5.圓盤由靜止以$\alpha_1=4$ rad/s^{2}等角加速度運轉，歷時 t_1 再改以$\alpha_2=-1$ rad/s^{2}減速，歷時 t_2 而停止轉動，則 $t_1:t_2$ 爲： (A)1：4 (B)1：2 (C)1：$\sqrt{2}$ (D)2：1 (E)4：1。答：(A)

※切線加速度&法線加速度 $a_t = r\alpha$　$a_n = r\omega^2$

例11. 一質點在半徑為 0.4m 的圓周上運動，在某瞬時間的角速度為 2rad/s，其角加速度為 5rad/s^2，求此質點的合加速度之量值。(取三位有效數字)答：2.56m/s^2

例12. 一物體對一固定軸以等角加速度由靜止開始轉動，當其加速度和法線加速度成 60° 角時，此物體轉過多少角位移？答：$\frac{\sqrt{3}}{6}$ rad

類 1.一輪由靜止開始繞對稱軸作等角加速度轉動，則對輪緣上一點而言，其在切線方向的加速度分量 a_T 與法線方向的加速度分量 a_N，分別與計時 t 成何種關係？ (A) $a_T \propto t$；$a_N \propto t^2$ (B) $a_T \propto t^2$；$a_N \propto t$ (C) $a_T \propto t$；a_N 與 t 無關 (D) a_T 與 t 無關；$a_N \propto t$ (E) a_T 與 t 無關；$a_N \propto t^2$。答：(E)

類 2.一圓盤通過其圓心且垂直於盤面之固定軸轉動，當該點之合加速度與切線加速度成 37° 角之瞬間，此飛輪恰好轉過若干弧度？ (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{7}{8}$ (E) $\frac{3}{4}$ 弧度。答：(B)

類 3.下列敘述何者正確？ (A)作等速率圓周運動的物體，其角加速度爲一不爲零之常數 (B)作等角加速度旋轉的物體，切線速度的大小均勻增加 (C)作等角加速度旋轉的物體，其向心加速度大小一定 (D)作等角加速度旋轉的物體，其切線加速度大小爲一定值 (E)作等角加速度旋轉的物體，其瞬時加速度恆指向圓心。答：(B)(D)

類 4.一質點靜止開始沿圓周作等角加速度運動，則 (A)其切線速度大小隨時間成正比例增加 (B)其法線加速度大小隨時間的平方成正比例增加 (C)其切線加速度大小隨時間成正比例增加 (D)其動能隨時間成正比例增加 (E)其動量大小隨時間成正比例增加。答：(A)(B)(E)

類 5.一質點在 $x-y$ 平面上運動，物體上之坐標爲 $x = R\cos\omega t$，$y = R\sin\omega t$，t 爲時間，R、ω 爲常數。求物體之 (a)運動軌跡？(b)合速度？(c)加速度大小？答：(a)圓；(b)Rω；(c)Rω^2

※微分

例13. 在旋轉輪邊緣上一點的角位置以$\theta = 4t - 3t^2 + t^3$來描述，θ的單位是弧度，t 的單位是秒，求：

(1)開始時間在 t=0，末時間為 t=1，2 和 3 秒角位移？答：2rad；4rad；12rad

(2)開始時間為 t=2 秒，末時間為 t=4 秒，在此間隔平均角速度？答：14rad/s

(3)承(2)平均角加速度若干？12rad/s^2

(4)t=4 秒瞬時角速度及角加速度？答：28rad/s；18rad/s^2

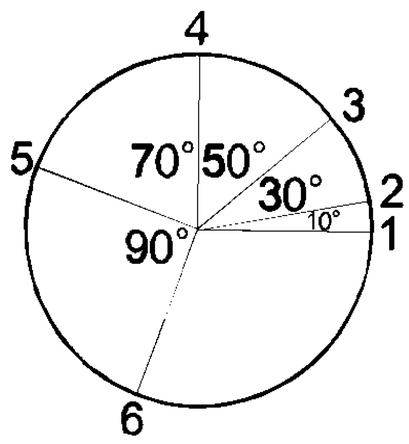
類 1.一物體上一點繞質心轉動，其角位移θ(弧度)與時間 t(秒)之關係為$\theta = 2t^2 + 3$，則 (A)第 2 秒末之角速度？ (B)2 秒內之平均角速度？ (C)第 2 秒末之角加速度？ (D)2 秒內之平均角加速度？答：(1)8rad/s；(2)4rad/s；(3)4rad/s^2；(4)4rad/s^2

類 2.剛體中一點 P 距固定轉軸為 0.5m，P 點做等角加速度運動，其角位移θ(rad)與時間 t(sec)之關係$\theta = 2t^2 - 3t$，求(a)角加速度？ (b)第 2 秒末之角速度？切線速度？向心加速度？答：(a)4rad/s^2；(b)5rad/s；2.5m/s；12.5m/s^2

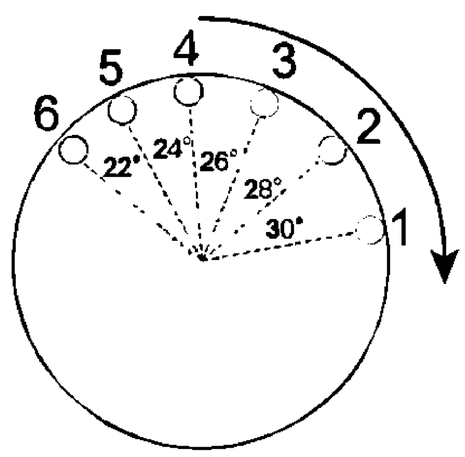
類 3.一質點作半徑固定的圓周運動，其角位置與時間之關係為$\theta = 2t^2 + 3$ (rad)，則 3 秒末的平均角速度為若干？ (A)3 (B)6 (C)9 (D)12 rad/sec。答：(B)

＊閃光攝影(類似於打點計時器)

例14. 某生用每秒閃光 10 次(Δt=0.1 秒)之同步閃光燈，拍攝在水平面上轉動的小球。經 0.5 秒後，共得 6 個影像。已知小球從位置 1 開始沿逆時針方向轉動，距軸心 20 公分，則小球的角加速度是多少弧度/秒^2？(A)0 (B)$\frac{100\pi}{9}$ (C)$\frac{200\pi}{3}$ (D)$\frac{25\pi}{18}$ (E)$\frac{25\pi}{9}$。答：(B)



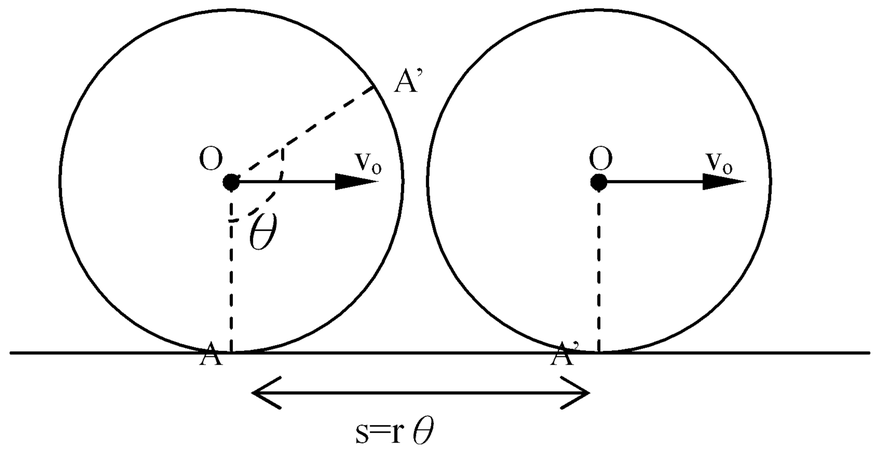
類 1.一轉盤可繞著一鉛垂方向的軸心旋轉，在盤上距軸心 r 處放一質量 m 之硬幣，當盤轉動時藉著摩擦力帶動硬幣作圓週運動。以高速閃光攝影術拍得某段過程如右圖，閃光頻率為 100Hz，求：編號 1~6 過程中摩擦力施於硬幣之平均力矩大小為何？答：$\frac{1000\pi}{9}mr^2$



9-2 純滾動

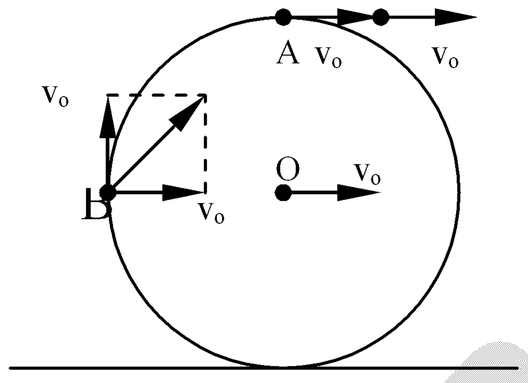
一、圓盤或球做純滾動的條件

(1) $s = r\theta$　**(2)** $v_o = r\omega$



二、圓盤上各點的對地速度

$\vec{v}_{A地} = \vec{v}_{AO} + \vec{v}_{O地}$　$\vec{v}_{B地} = \vec{v}_{BO} + \vec{v}_{O地}$



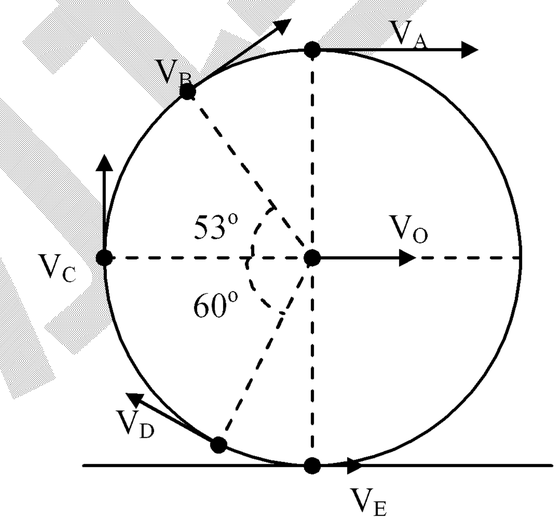
※純滾動

＊純滾動時各點之對地速度

例15.　有一半徑 0.6 公尺之輪在地面做純滾動，若其對地速度為 10m/s，求 V_O=？V_A=？V_B=？V_C=？V_D=？V_E=？答：

V_O=10m/s；V_A=20m/s；V_B=$6\sqrt{10}$ m/s；V_C=$10\sqrt{2}$ m/s；

V_D=$5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m/s；V_E=0



類 1.若有一汽車的輪胎直徑為 80cm，當車速為 72km/hr 時，車上的乘客及在地面上靜止的行人，其所觀察到輪胎最上緣的速度為何？其對輪胎中心的角速度為何？答：20m/s；40m/s；皆為 50rad/s

類 2.一架飛機剛抵達某機場，機上的空服員立刻將一個可疑的罐子交給當地的航警。
航警打開一看是粉狀的物質，於此把手伸進去沾了一點放在舌尖測試。
「嗯，不知道是什麼東西？我知道不是毒品，可是也不是糖?」
正當空服員和航警在狐疑之際，一位老太太慌慌張張的跑過來。
「我上飛機時帶的一個罐子不見了，請問你們有沒有看到？！裡面裝的是我先生的骨灰！」

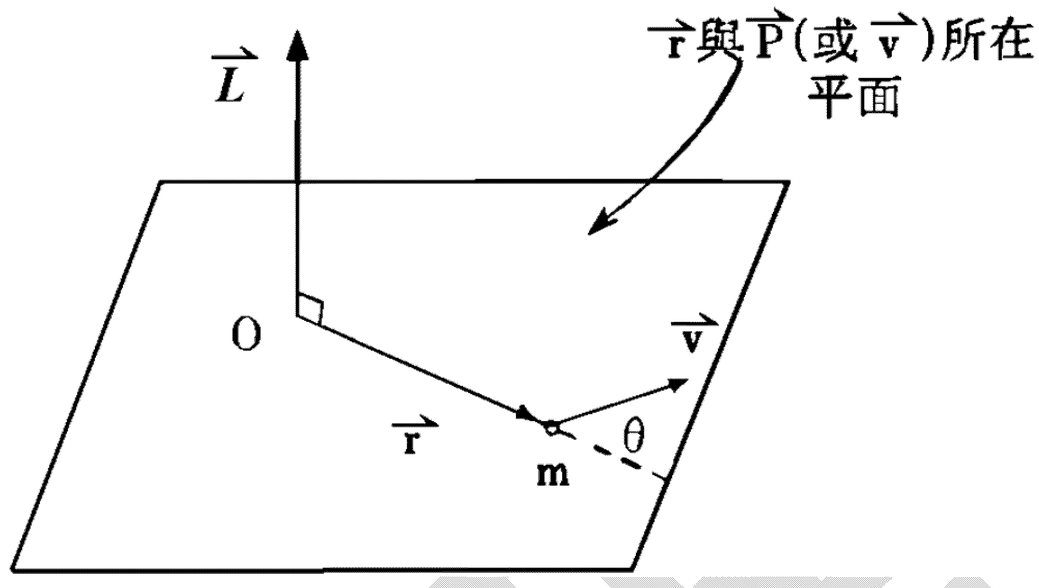
吳錫玠物理

9-3 力矩和轉動慣量

9-4 角動量和角動量守恆定律

※轉動慣量

轉動慣量是物體抗拒轉動狀態變化的慣性大小，物體對轉軸的轉動慣量越大，則改變其轉動狀態就越難。



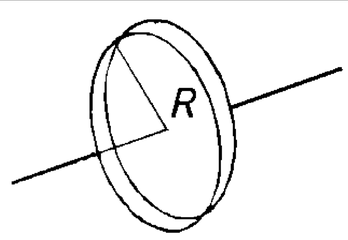
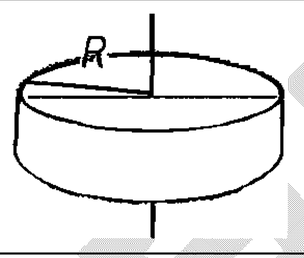
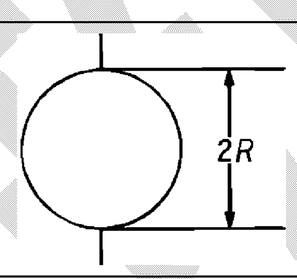
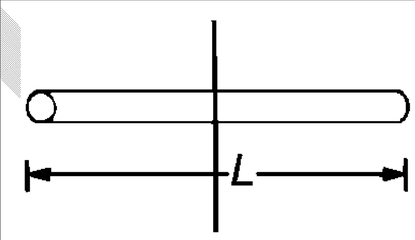
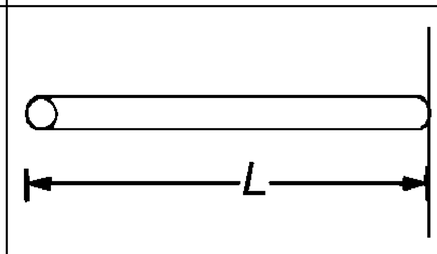
1.單一質點的的轉動慣量：若質點的質量為 **m**，與轉軸的距離為 **r**，則此質點的轉動慣量為

$I = mr^2$

2.剛體的轉動慣量：剛體內各質點之質量為 m_1、m_2、m_3……，與轉軸的距離為 r_1、r_2、r_3……，

則剛體之轉動慣量為 $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2$

3.常見形狀的均勻剛體的轉動慣量

中心軸通過環心且與環面垂直的環	中心軸通過圓心且垂直於盤面的圓盤	中心軸通過球心的球	中心軸通過細棍中心且與細棍垂直	中心軸通過細棍一端且與細棍垂直
				
$I = MR^2$	$I = \frac{1}{2}MR^2$	$I = \frac{2}{5}MR^2$	$I = \frac{1}{12}MR^2$	$I = \frac{1}{3}MR^2$

※角動量

1.公式：$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v})$

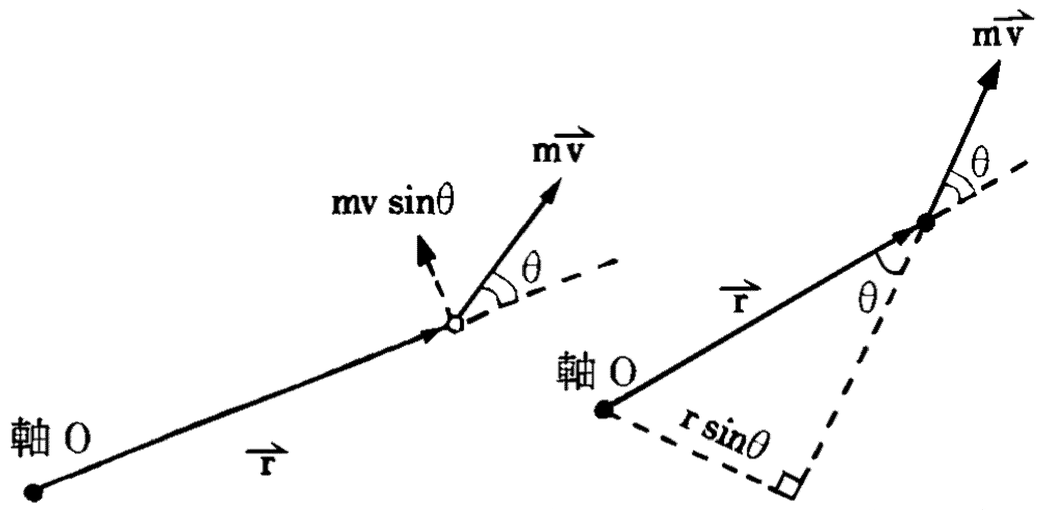
$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= rP\sin\theta = mrv\sin\theta = mr^2\omega = I\omega$$

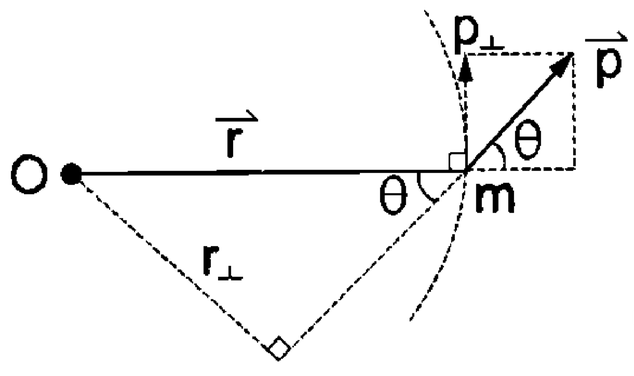
2.公式說明：

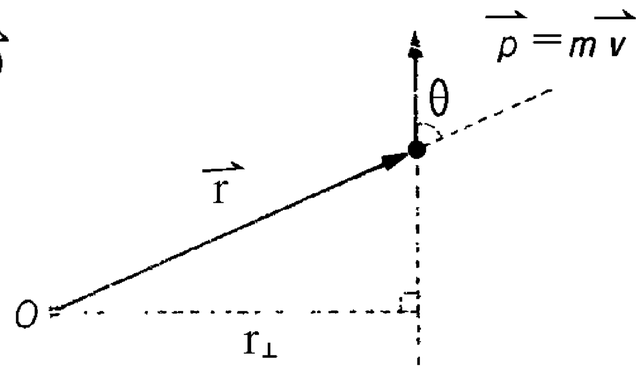
(1) $\vec{L} = rP\sin\theta = r(P\sin\theta) = rP_\perp$，式中

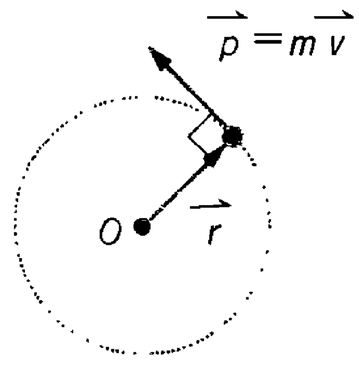
$P_\perp = P\sin\theta = mv\sin\theta$ 代表之物理意



$P_\perp = mv\sin\theta$ 與 $r_\perp = r\sin\theta$ 圖示法



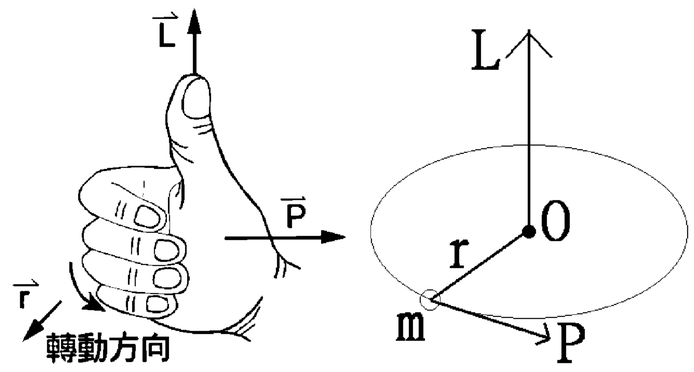




義為與$\vec{r}$垂直的有效垂直動量。

(2) $\vec{L}=rP\sin\theta=(r\sin\theta)P=r_{\perp}P$ ，式中$r_{\perp}=r\sin\theta$代表之物理意義為與$\vec{P}$垂直約有效垂直力臂。

(3)角動量$\vec{L}$的方向：依右手螺旋的方法，先將右手四指指向位置向量的方向，然後將四指握向動量的方向，此時大拇指所指的方向即為角動量的方向。



(4)單位：$kg\cdot m^2/s$

動量$\vec{P}$與角動量$\vec{L}$的比較

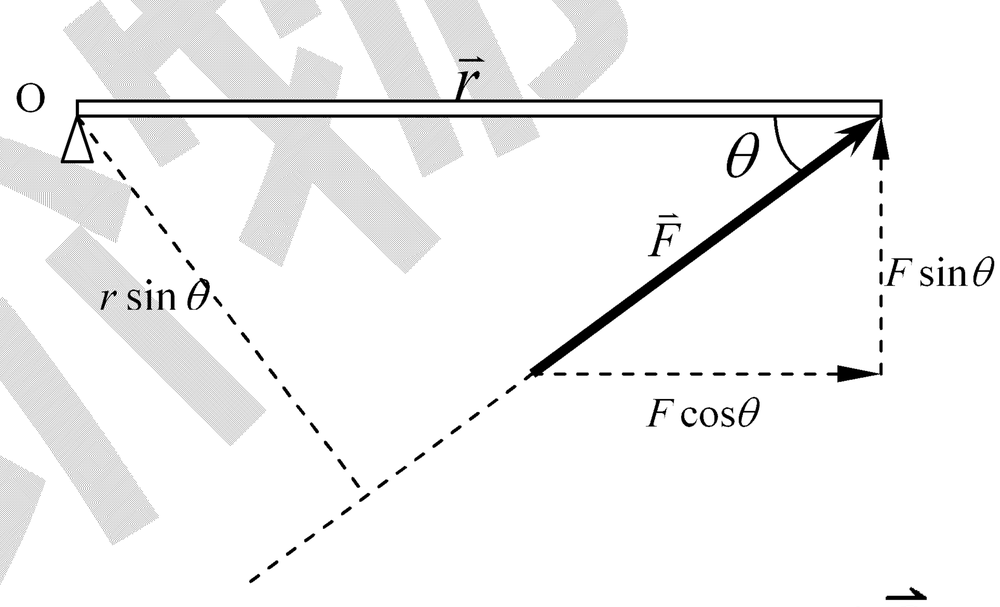
	質量(轉動慣量)	(角)速度	(角)動量	兩者關係
移動	**m**	$\vec{v}$	$\vec{P}=m\vec{v}$	$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$
轉動	**I**($I=mr^2$)	$\vec{\omega}$	$\vec{L}=I\vec{\omega}$	

※力矩

1. 定義：力矩是改變物體轉動狀態的一種作用，亦即力矩會使物體產生角加速度並改變物體之角動量(參考第 **3** 章)。

2.公式：

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=rF\sin\theta=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ r_x & r_y & r_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=I\vec{\alpha}=\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$



O：支點。

$\vec{r}$：為支點到力作用點的位移向量。

$\vec{F}$：作用力。

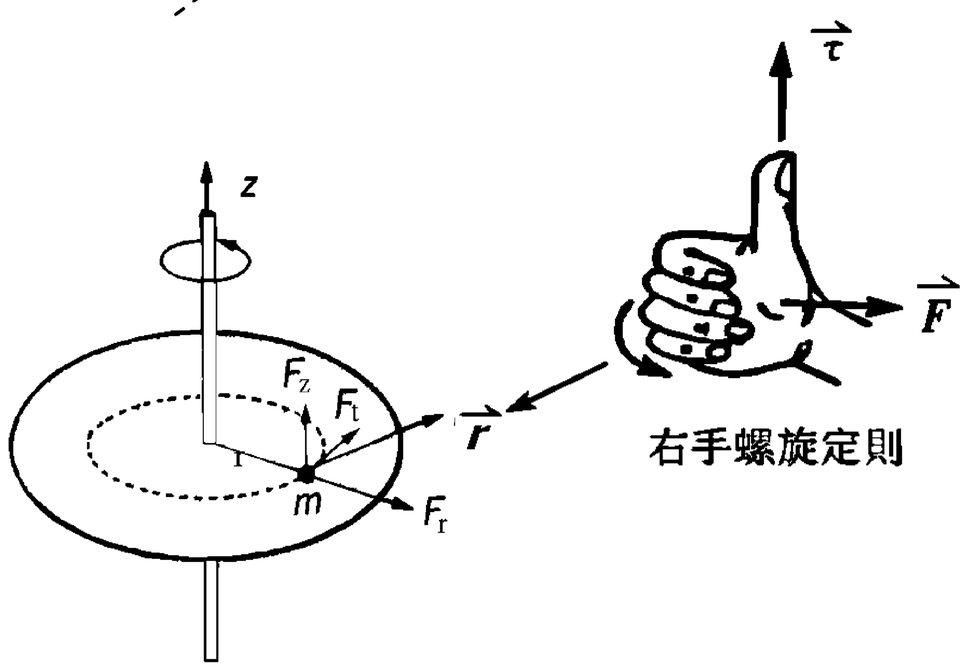
θ：$\vec{r}$與$\vec{F}$的夾角。

$r\sin\theta$：指與$\vec{F}$垂直的有效力臂。

$F\sin\theta$：指與$\vec{r}$垂直的有效分力。

3.方向：

(1)右手螺旋判斷：以右手四指伸直指向$\vec{r}$，然後四指向$\vec{F}$方向彎曲，則拇指所指的方向就是$\vec{\tau}$的方向。



(2)平面上規定(逆時針方向)轉動的力矩為正力矩、 (順時針方向轉動)的力矩為負力矩。

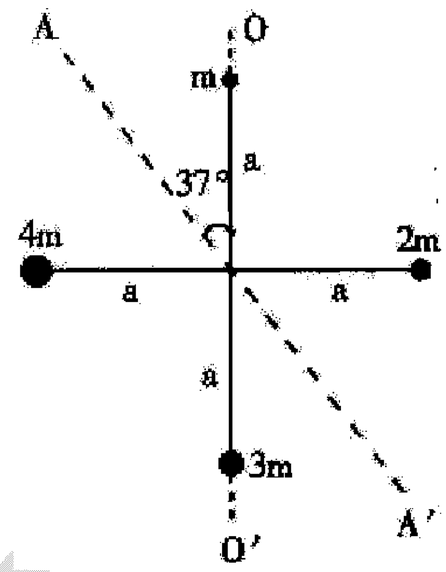
3.力$\vec{F}$與力矩$\vec{\tau}$的比較

	質量(轉動慣量)	(角)加速度	力(矩)	兩者關係
移動	**m**	a	$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}=m\vec{a}$	$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$
轉動	**I**($I=mr^2$)	α	$\vec{\tau}=\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}=I\vec{\alpha}$	

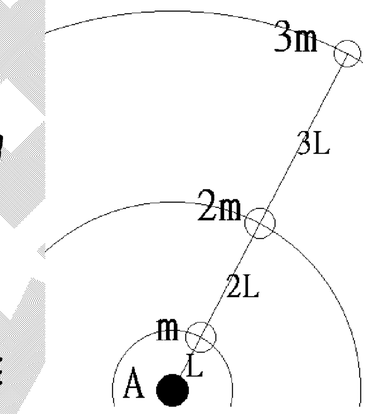
吳錫玠物理

※轉動慣量

例16. 如圖 m，2m，3m，4m 以質量不計的桿連接，今繞 OO' 與 AA' 軸之轉動慣量各為若干？答：$6ma^2$；$5.28ma^2$



類 1.質量 m、2m、3m 的小物體以輕棒串起，兩兩距離如圖所示，整個系統以角速度 ω 繞 A 作圓周運動，求對 A 而言，(1)2m 質點的轉動慣量 I_2 與角動量 l_2 為何？答：$18ml^2$；$18ml^2\omega$；(2)整個系統的轉動慣量 I 與角動量 L 為多少？答：$127ml^2$；$127ml^2\omega$



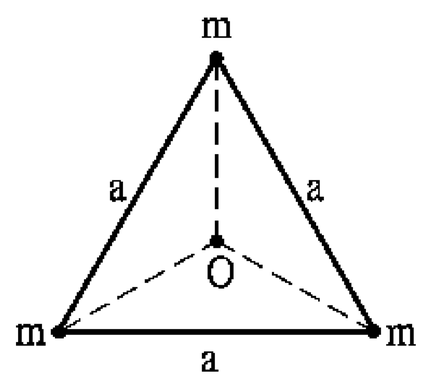
類 2.三質點質量各為 2kg，各位於一正三角形(邊長 2m)的三頂點，如三角形以過其重心之法線為轉動軸轉動，則其轉動慣量為多少 $kg\cdot m^2$？ (A)8 (B)16 (C)24 (D)32 (E)48。答：(A)

類 3.質量各為 3 公斤的四個小物體，排成邊長 0.5 公尺的正方形，物體間以輕棒連接。求對下列各轉軸之轉動慣量：

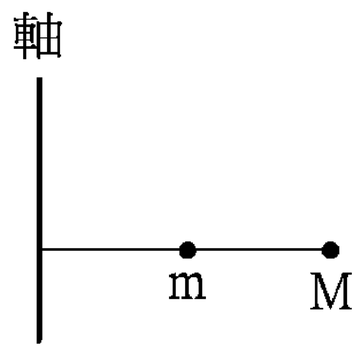
(1)經過正方形中間，垂直、於正方形平面之軸？答：$1.5\,kg\cdot m^2$

(2)等分正方形且平行兩對邊之軸？答：$0.75\,kg\cdot m^2$

類 4.正三角形頂點上各放置質量為 m 的質點，今以通過重心 O 點垂直紙面的軸為轉軸，則此系統對重心的轉動慣量為多少？ (A) ma^2 (B) $3ma^2$ (C) $\frac{1}{3}ma^2$ (D) $\sqrt{3}ma^2$。答：(A)



類 5.如圖，一輕質桿中點有一質點質量 m，末端另有一質點質量 M=2m，桿繞鉛直軸由靜止開始作水平面等角加速度運動，下列敘述何者正確？(A)M 與 m 角動量守恆 (B)M 與 m 的角速度比為 2：1 (C)M 與 m 的切線加速度比為 2：1 (D)M 與 m 所受向心力比為 2：1 (E)M 與 m 的轉動慣量比為 4：1。答：(C)



類 6.對於「角動量」的敘述，下列何者正確？ (A)等速度運動的質點對任一轉軸皆具有不隨時間改變之角動量 (B)對於某定點，具有線動量的質點必具有角動量 (C)改變剛體轉軸的位置會改變剛體角動量 (D)質點的角動量必與線動量垂直 (E)作等速率圓周運動的質點其角動量為定值。答：(A)(C)(D)(E)

※角動量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=m(\vec{r}\times\vec{v})=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ r_x & r_y & r_z\\ P_x & P_y & P_z\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ r_x & r_y & r_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}$

例17.　一質量 2 公斤的質點在位置 $\vec{r}=4\vec{i}+2\vec{j}$ (單位為公尺)時，其速度為 $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ (單位為公尺/秒)，則此時質點對原點之角動量量值為若干 kg·m^2/sec？ (A)8 (B)12 (C)16 (D)20 (E)40。答：(D)

類 1.有 2kg 之物體在 XY 平面上，以 $v_x=30m/s$ 及 $v_y=60m/s$ 之速度通過點 (x，y)=(3m，-4m)，試求該質點對 (1)原點；(2)點(-2m，-2m)之角動量各若干？答：(1)600 $kg\cdot m^2/s$；(2)720 $kg\cdot m^2/s$

類 2.兒子：媽媽我可以問妳一個問題嗎？
媽媽：當然可以呀！

兒子：嗯！爸爸不姓郭，妳也不姓郭，爲什麼我叫郭春海？
媽媽：咳！咳！也該是你知道身世的時候了
當初媽媽和爸爸在一起時，就有了你
而且媽媽同時跟三個男人交往，一個姓高，一個姓李，一個姓陳！
因爲實在不知道是誰下的種
所以每個姓氏取一部份之後
你就姓"郭"，因爲高先生喜歡在上面，李先生喜歡在下面，陳先生喜歡在旁邊！

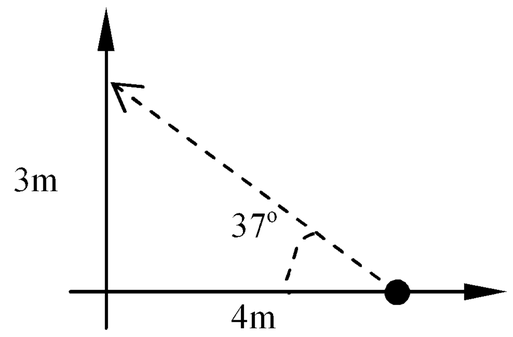
兒子：哦！我懂了！那"春海"是隨便取的吧？
媽媽：也不是，因爲那時三人輪流上陣，一人一日，所以你中間取名爲"春"。

兒子：哦！我懂了！那"海"是隨便取的吧？
媽媽：也不是，因爲事後和他們失去聯絡，實在不知道是誰下的種，所以想大概每人一滴吧，因此取個"海"字，你就叫"郭春海"！

吳錫玠物理

※角動量 $L = rP\sin\theta = rmv\sin\theta$

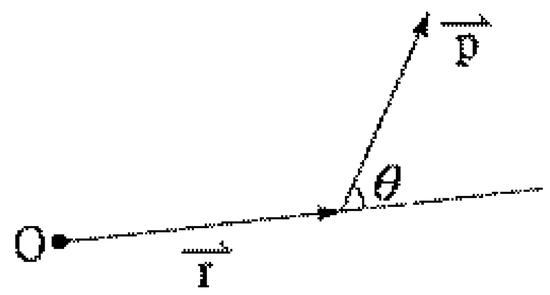
例18.　如右圖，在水平面上一質點質量 2.0kg，以 10m/s 之速度向西偏北 37° 度運動，則此質點相對於原點 O 之角動量為_____ kg-m^2/s。答：48



例19.　質量為 2kg 的質點以 25m/s 之初速度，拋射仰角為 53° 斜向拋出，求當達最大高度時，該質點對拋出原點之角動量為多少 $kg\cdot m^2/s$ (g=10 m/s^2) (A)100 (B)150 (C)300 (D)450 (E)600。答：(E)

類 1.參考圖示，r＝10 公尺，p＝5kg－m／s，θ＝60°，求角動量？

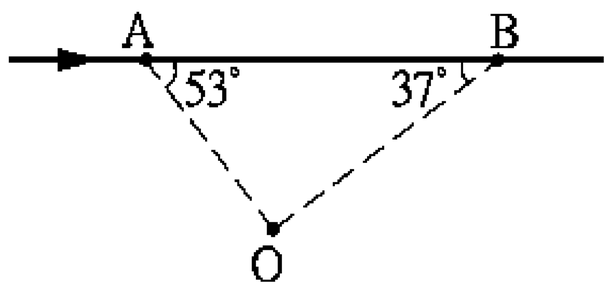
答：$25\sqrt{3}$（$kg\cdot m^2/s$），垂直於 $\vec{r}$ 與 $\vec{p}$ 決定的平面向上



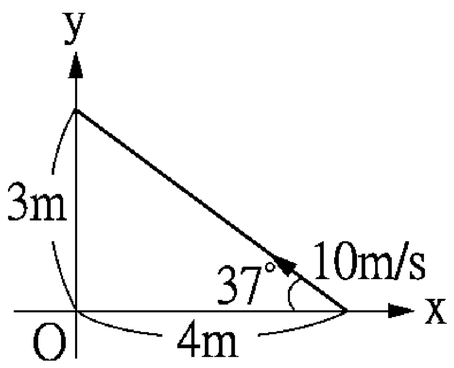
類 2.質量均分爲 10 公斤之三質點在水平面上距參考原點東方 5 公尺處以相同速率 6 公尺/秒分別向：(1)南方；(2)東偏北 37° 方向；(3)西方　運動，求三質點對原點之角動量各若干？答：(1)300kg-m^2/s 向下；(2)180kg-m^2/s 向上；(1)0

類 3.某獨立系統中，有質量皆爲 m 的雙星，相距 L，且互繞質量中心旋轉，線速率爲 v，則對質量中心的角動量應表示爲何？答：mvL

類 4.某質點以等速沿一直線運動，如圖，當其通過 A 點時，對 O 點的角動量爲 L_A;通過 B 點時，對 O 點的角動量爲 L_B，則 L_A/L_B ＝_____。答：1



類 5.如圖，在水平面上一質點質量 1.0kg，以 10m/s 之速度向西偏北 37°運動，則此質點相對於原點 O 之角動量大小爲_____。答：24kg • m^2/s

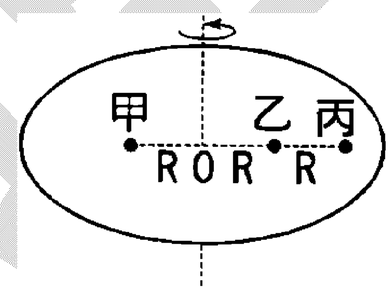


※角動量 $L = I\omega = mr^2\omega$

例20.　一繩長 3r 繞其一端以 ω 角速度旋轉，在等距離三處分別繫有 A、B、C 三球，其中 $m_A = m$，$m_B = 2\,m$，$m_c = 3\,m$，則總角動量為_____。答：$36mr^2\omega$

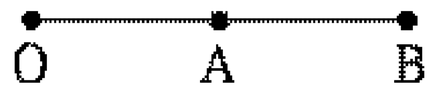
類 1.質量 m 的物體在平面上以角速度 ω 作半徑為 r 的圓周運動，則物體所受外力的合力為何？物體的角動量為多少？答：$mr\omega^2$；$mr^2\omega$

類 2.質量分別為 2m、m、m 的甲、乙、丙三物體，放在旋轉盤上。它們與軸心的距離分別為 R、R、2R，如圖所示。當圓盤以等角速度旋轉而物體在圓盤相對靜止時，則 (A)甲所受的向心力最小，甲對 O 點的角動量亦最小 (B)甲所受的向心力最小，乙對 O 點的角動量最小 (C)乙所受的向心力最小，乙對 O 點的角動量亦最小 (D)丙所受的向心力最小，丙對 O 點的角動量最大 (E)乙所受的向心力最小，甲、乙對 O 點的角動量相等。答：(C)



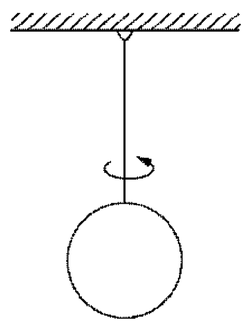
類 3.$m_A = 0.2$ kg、$m_B = 0.1$ kg，兩質點分別距輪盤中心軸 0.4 m 及 0.6 m 處轉動，若盤的角位移與時間關係 $\theta = 2 + t + t^2$，第 2 秒末盤上兩質點的總角動量值為若干 kg-m^2/s？ (A)0.34 (B)0.36 (C)0.48 (D)0.32 (E)0.2。答：(A)

類 4.如圖，質量比為 2：1 的 A、B 二物，以等長的二條輕繩連接好後，使其共繞 O 點作等速圓周運動，則 AB 二點之 (A)角速度之比為 1：2 (B)切線速率比為 1：2 (C)動量大小之比為 1：2 (D)對 O 點角動量之比為 1：2 (E)向心加速度大小之比為 1：2。答：(B)(D)(E)



類 5.天花板下方懸吊一半徑為 R 的金屬球，如附圖，其質量為 M，旋轉週期為 10π，已知其轉動慣量為 $\frac{2}{5}MR^2$，則金屬球對轉軸的總角動量大小為多少？

(A)$\frac{1}{15}MR^2$ (B)$\frac{1}{25}MR^2$ (C)$\frac{2}{25}MR^2$ (D)$\frac{2}{15}MR^2$。答：(C)



類 6.兩位士兵第一次休假要搭飛機返家，聽說機場港口都有憲兵會對士兵詳加檢查，
於是乎兩人特別注意服裝儀容，皮鞋也擦得特別光亮，
劃位時，兩人正慶幸都沒遇到憲兵刁難，
後面忽然傳來一聲“復興中華“，兩人一驚，馬上立正站好高聲答道“還我河山!!“
卻聽見周圍傳來哄堂大笑，一位行李員走過來說我問你們搭復興航空還是中華航空??要掛行李牌!!!.....

吳錫玠

※角動量⇨雙星&衛星&行星

例21.　質量為 m 和 2m 的雙子星，其間的距離 d，若重力常數為 G，則雙子星對其質心的總角動量大小為_____。答：$2\sqrt{\frac{1}{3}Gdm^3}$

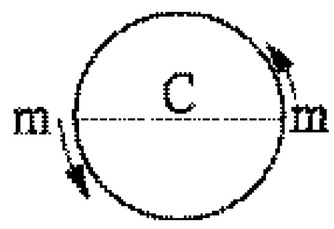
例22.　地球之兩個人造衛星 A、B，質量比為 1：2，軌道半徑比為 2：1，其 (A)角速率之比為 1:4 (B)向心加速度量值比為 1:4 (C)軌道速率之比為 1:$\sqrt{2}$ (D)角動量量值比為 1：2 (E)面機速率之比為 2：1。答：(B)(C)

類 1.質量比爲 2:1 之雙星在外太空繞其共同質心運轉，則兩者的 (A)角速度大小比爲 1:1 (B)向心加速度大小比爲 1：2 (C)動能之比爲 2：1 (D)面積速度之比爲 1：2 (E)角動量量值比爲 2：1。答：(A)(B)

類 2.質量 m 的人造衛星繞質量 M 的地球作半徑 r 作等速圓周運動，G 爲萬有引力常數，則 m 對中心垂直軸的角動量爲： (A) $\sqrt{GM^2mr}$ (B) $\sqrt{GMm^2r}$ (C) $\sqrt{GMmr^2}$ (D) $(GM^2mr)^2$ (E) $(GMmr^2)^2$。答：(B)

類 3.質量 m 的人造衛星，以半徑 r 繞地球作圓周運動，設地球質量爲 M，若衛星在運行中因摩擦使力學能減少，則下列敘述何者正確？ (A)衛星的半徑將變大 (B)衛星的重力位能將變大 (C)衛星的動能將變大 (D)衛星的向心力變小 (E)衛星的角動量不變。答：(C)

類 4.質量同爲 m 的兩質點在直徑 d 的兩端互繞共同質心 C 作等速率圓周運動，若系統對 C 的角動量大小爲 L，則 L^2＝？



(A) $\frac{1}{2}Gm^3d$ (B) $\frac{1}{4}Gm^3d$ (C) $\frac{1}{8}Gmd^2$ (D) $\frac{1}{16}Gmd^2$ (E) $\frac{Gm^2}{4d}$。答：(A)

吳錫玠物理

※角動量⇨克卜勒

例23.　一行星以橢圓軌道繞太陽運轉，近日距、遠日距之比為 1：2，則下列敘述何者正確？(A)行星在運動中遵守力學能守恆定律 (B)行星在近日點與遠日點之動能比為 4：1 (C)行星在運動中遵守動量守恆定律 (D)行星在運動中遵守克卜勒第二定律 (E)行星在近日點與遠日點之角速度比為 4：1。【複選】答：(A)(B)(D)(E)

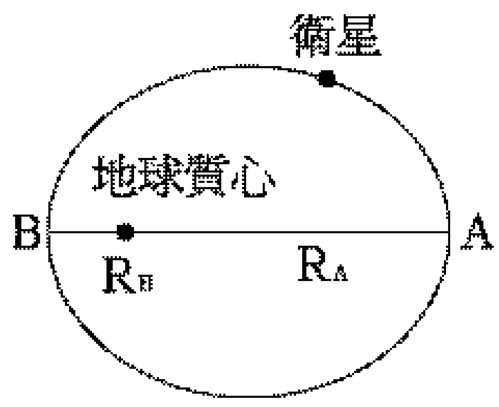
例24.　質量 m 的某行星繞太陽運行，其軌道為圓形。若在單位時間內半徑掃過的面積為 A，則此行星繞太陽公轉的角動量量值為： (A)mA (B)2 mA (C)4 mA (D)0。答：(B)

類 1.某行星之質量爲 M，其繞太陽之角動量爲 L，則此行星與太陽之連線在單位時間內所掃過之面積爲_____。答：$\frac{L}{2M}$

類 2.一行星繞太陽作精圓軌道運動，有關此行星的敘述，何者錯誤？ (A)力學能守恆 (B)繞日角速度之大小與距太陽的距離平方成反比 (C)在近日點與遠日點時，移動速率與太陽的距離成反比 (D)角動量守恆 (E)動量守恆。答：(E)

類 3.行星在近日點對太陽的角動量爲 L，已知近日點與遠日點到太陽的距離比爲 1:4，則行星在遠日點時，對太陽的角動量量值爲若干？ (A)L (B)$\frac{1}{4}$L (C)4L (D)條件不足。答：(A)

類 4.一個人造衛星以橢圓軌道繞地球運行。設 A、B 分別爲衛星距地球最遠及最近的位置（如圖）。若忽略其他星體的影響，則下列敘述何者正確？ (A)衛星在 A 處的動能最小，在 B 處動能最大 (B)若 K_A、K_B 各表衛星在 A、B 處的動能，R_A、R_B 各表地球質心至 A、B 處的距離，則 $\frac{K_A}{K_B}=\frac{R_B}{R_A}$ (C)衛星在 A、B 處的角動量之量值各爲 L_A、L_B，則 $L_A=L_B$ (D)若衛星在軌道上任何位置的動量之量值均相等 (E)在同一軌道上衛星繞地球的週期隨衛星的質量增加而增長。答：(A)(C)



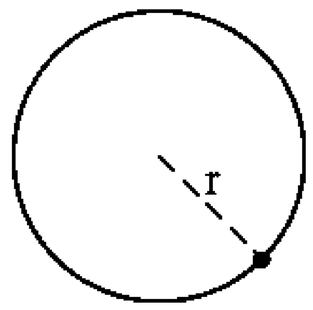
※力矩 $\tau = I\alpha$

例25.　一電動機其飛輪之轉動慣量為 $100\,kg-m^2$，今施 $500\,nt-m$ 之力矩於該飛輪，設飛輪由靜止開始，試求：(a)角加速度為若干？(b)轉過四轉時之角速度為若干？(c)轉過四轉時之轉動角動量為若干？答：(a)5rad/s^2；(b)15.8rad/s；(c)1.58×10^{3}kg-m^2/s

類 1.一物體質量 7.5kg，對其軸之迴轉半徑為 0.2m，若欲在 30 秒內，使其轉速由 110rad/s 均勻增至 230rad/s，則所需力矩大小為_____答：1.2nt-m

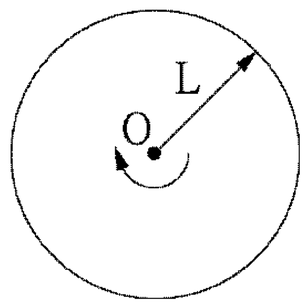
類 2.一質點質量為 2kg，在半徑為 2m 的圓周上，由靜止受 $6\,m\cdot Nt$ 力矩的作用，則 (A)角加速度為 $3\,rad/s^2$ (B)角加速度為 $1.5\,rad/s^2$ (C)2 秒末之角速度為 $3\,rad/s$ (D)2 秒末的角速度為 $1.5\,rad/s$ (E)2 秒內的角位移為 6rad。答：(D)

類 3.質量 m 的質點作圓周運動，半徑為 r，若質點的角速度由 ω_o 均勻增至 $5\omega_o$，共歷時 2 秒，則此質點所受之力矩為若干？



(A) $mr^2\omega_o$ (B) $\frac{1}{2}mr^2\omega_o$ (C) $2mr^2\omega_o$ (D) $\frac{1}{4}mr^2\omega_o$。答：(C)

類 4.附圖所示，為一對獎幸運轉輪，指針長度為 L，質量為 M，對 O 點之轉動慣量為 $\frac{1}{3}ML^2$，若在指針末端，施以垂直指針之力 F，則指針所產生的角加速度大小為多少？ (A) $\frac{3F}{ML}$ (B) $\frac{F}{ML}$ (C) $\frac{F}{3ML}$ (D) $\frac{FM}{3L}$。答：(A)



類 5.一質點質量為 1 公斤，對固定點 O 做半徑為 20 公分的等速率圓周運動，若質點的角速度為 4 弧度/秒，則：

(1)若沿切線方向對質點施 2 牛頓的力，假設質點做圓周運動的半徑仍不變，則質點的角加速度為__(1)__rad/s^2。

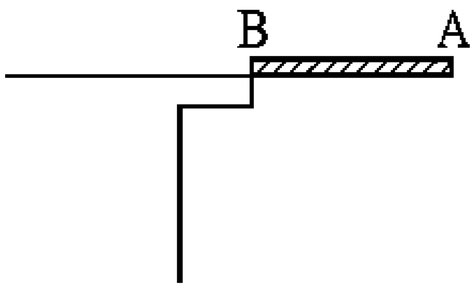
(2)2 秒後質點對 O 點的角動量大小為__(2)__kg・M^2/s。答：(1)10；(2)0.96

類 6.一質點質量為 2 kg，對固定點 O 由靜止做半徑為 1.0m 的等角加速度運動，若角加速度為 $\pi\,rad/s^2$，則此質點：(A)對 O 點之轉動慣量為 $2(kg\cdot m^2)$ (B)質點在 5 秒末的動能為 $25\pi^2$ 焦耳 (C)5 秒末的向心加速度為 $\pi^2(m/s^2)$ (D)繞第 5 圈所需時間為 $2(\sqrt{5}-2)$ 秒 (E)5 秒末的角動量為 $10\pi(kg\cdot m^2/s)$。答：(A)(B)(D)(E)

吳錫玠

※力矩 $\tau = I\alpha$

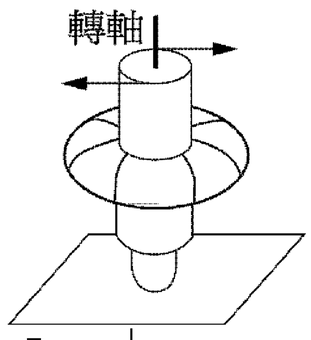
例26.　一根質量為M，長度為L的均質棒，其一端B水平擱在桌緣，另一端A用手扶著，如附圖，當突然放手的瞬間，繞B點的角加速度為若干？(已知繞B點的轉動慣量為 $\frac{1}{3}ML^2$) (A) $\frac{g}{3L}$ (B) $\frac{g}{2L}$ (C) $\frac{3g}{2L}$ (D) $\frac{2g}{3L}$。答：C



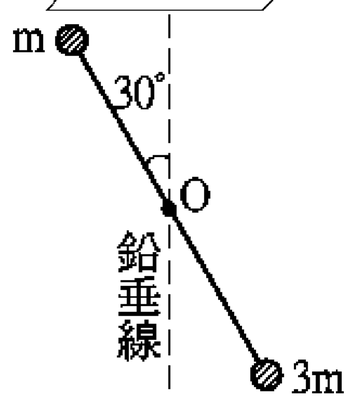
類 1.鋸木頭用之圓形鋸的馬達爲 1 馬力，若已知鋸齒在半徑 10cm 處所施之力爲 10N，則此馬達之轉速爲若干 rps(每秒轉)？ (A)714 (B)1190 (C)7140 (D)746 (E)119。答：(E)

類 2.質量 m_1=2kg 與 m_2=5kg 的兩個小物體連結於長 50cm 的輕棒兩端，整個系統正以 3.0rps 之角速度繞過質心的鉛直軸旋轉。求 (A)系統轉動慣量若干？ (B)欲使此系統在 8.0 秒內靜止下來，則所需供給的平均力矩應爲多少？(A)0.36kg-m^2；(B)0.85nt-m

類 3.市售的零食包裝中，有時會附贈一只塑膠小陀螺。今在頂端處對中心軸施以力偶使其旋轉，(如圖所示)，若軸的直徑爲 d，施力爲 F，陀螺的轉動慣量爲 I，則離手瞬間陀螺的角加速度爲多少？ (A) $\frac{2Fd}{I}$ (B) $\frac{Fd}{I}$ (C) $\frac{Fd}{2I}$ (D)0。答：(B)



類 4.一長度爲 L 的細桿，以通過細桿中心 O 點且垂直於細桿爲轉軸，兩端各有質量 m 與 3m 的質點，若桿與鉛直夾 30° 角處靜止釋放，則(1)重力對 O 點所產生的力矩之量值爲_____。(2)釋放瞬間的角加速度爲_____。答：(1) $\frac{1}{2}mgL$ ；(2) $\frac{g}{2L}$



類 5.有一直徑 1 米之飛輪支於水平軸上，原爲靜止，一繩圈繞於輪之外緣，繩端施以一定力 50 牛頓，4 秒後，繩經解脫 10 米，則此飛輪 (A)角加速度爲 2.5 rad/s^2 (B)切線加速度爲 1.25 m/s^2 (C)其 4 秒末之動能爲 500 焦耳 (D)4 秒末之角速度爲 10 rad/s (E)飛輪之轉動慣量爲 10 $kg\cdot m^2$。答：全

類 6.一轉動器之轉動慣量爲 60 $kg\cdot m^2$，欲使此轉動器由靜止開始以等角加速度轉動，在 10 秒鐘內轉過 100 轉，試求： (a)所施之力矩爲若干？ (b)10 秒末其轉動角動量爲若干？ (c)10 秒後施以 120nt-m 之阻力矩，則再經幾秒即停？答：(a)753.6nt-m；(b)7536kg-m^2/s；(c)20sec

吳錫玠物理

※ $\tau = \dfrac{\Delta L}{\Delta t}$

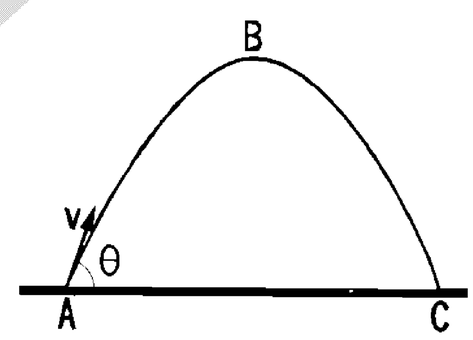
例27.　兩個飛輪之角動量值比為 4：3，施加量值相同之力矩使之剎車，則所需時間之比為：

(A)2：$\sqrt{3}$ (B)4：3 (C)3：4 (D)$\sqrt{3}$：2 (E)16：9 。答：(B)

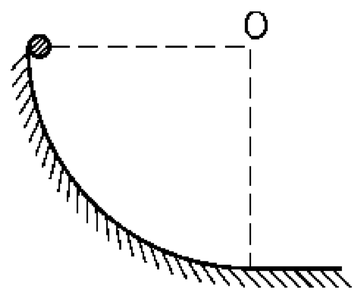
類 1.一質點質量 1 公斤，對固定點 O 作半徑爲 5 公分的等速率圓周運動，若質點的角速度 ω 爲 6 弧度/秒，試求(1)質點 m 對 O 點的角動量之量值？(2)今若恆沿切線方向對質點 m 施 10 牛頓的力，假設質點作圓周運動的半徑仍不變，則質點的角加速度爲若干？(3)又 5 秒後質點的角速度爲若干？答：(1)1.5×10^{-2}kg-m^2/s；(2)2×10^{2}rad/s^2；(3)1006rad/s

※力矩與角動量的關係

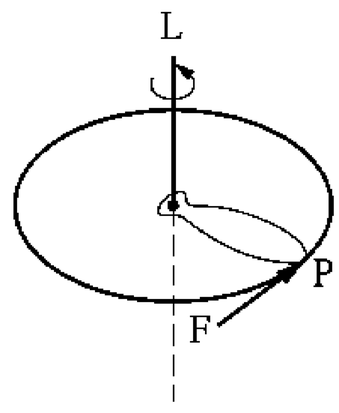
例28.　如右圖，某砲彈由 A 點以 v 之初速度、θ 之仰角($0^o<\theta<90^o$)射出，經最高點 B 後掉回與 A 同一水平面的 C 點，不計空氣阻力。則砲彈由 A→B→C 之過程中相對於 A 點之角動量大小之敘述以下何者正確？ (A)先增加後減少 (B)先減少後增加 (C)一直增加 (D)始終為 0 (E)為一定值，但不為 0。答：(C)



類 1.如圖，有一光滑圓弧軌道，小鋼珠由頂部靜止下滑至底部的過程中，小鋼珠對圓心 O 的物理量量值何者變大？ (A)角速度 (B)角加速度 (C)轉動慣量 (D)所受的力矩 (E)角動量。答：(A)(E)



類 2.如圖所示，沿剛體邊緣施一大小不變的切線推力 F，推動剛體使其繞垂直軸 L 作轉動，則下列敘述何者正確？ (A)此剛體角動量守恆 (B)此剛體的角動量時變率爲一定值 (C)此剛體的角位移時變率爲一定值 (D)此剛體的角速度時變率爲一定值 (E)此剛體的轉動動能爲一定值。答：(B)(D)



※角動量守恆

1.角動量守恆定律：剛體不受力矩或所受合力矩為零，則其角動量維持定值不變，稱圍角動量守恆。

2.公式：若 $\tau = \dfrac{\Delta L}{\Delta t} = 0$，則 $\Delta L = 0$

即 $L = I\omega = mr^2\omega =$定值

即 $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

例29.　下列何者為角動量守恆之應用 (A)花式溜冰的演員，當表演旋轉動作時，常由雙手或某一腳的平伸或收回來改變轉動的角速率 (B)馬戲團的空中飛人利用手腳及身體屈曲伸直以改變其轉動慣量，俾控制滾翻的轉動速率 (C)直昇機利用主、副螺旋槳來保持機身穩定 (D)行星繞日公轉時行星與太陽之連線在相等時間內掃過相同之面積 (E)火箭在太空飛行。答：(A)(B)(C)(D)

類 1.選出正確的敘述？ (A)角動量的量值與所選取的轉軸位置有關 (B)一鐵棒繞棒上某固定軸轉動時，除固定軸外，棒上各個點的角速度相同 (C)同(B)，各點有相同的法線加速度 (D)質點繞固定軸轉動時，角動量的方向垂直於轉動平面 (E)花式滑冰的選手兩手平伸或縮回可改變角動量，進而改變角速度的大小。答：(A)(B)(D)

類 2.下列有關「角動量守恆」定律，何者正確？ (A)作等角加速度運動的質點，其角動量守恆 (B)沿一飛輪的切線施力時，飛輪的角動量守恆 (C)作橢圓軌道運動的行星，其對太陽的角動量隨位置而變 (D)作等速率圓周運動的質點，受一徑向拉力使半徑縮短，則對圓心的角動量亦變小 (E)獨立的雙星系統，其對質心的角動量守恆。答：(E)

類 3.在原地旋轉的舞者，當手臂向外伸長，則： (A)轉動慣量增大 (B)角速度變小 (C)旋轉角加速度保持爲零 (D)角動量增大 (E)角動量不變。答：(A)(B)(E)

類 4.選出下列正確的敘述？ (A)角動量的量值與所選取的轉軸位置有關 (B)一鐵棒繞棒上某固定軸轉動時，除固定軸外，棒上各點的角速度相同 (C)同(B)，各點有相同的法線加速度 (D)質點繞固定軸轉動時，角動量的方向垂直於轉動平面 (E)花式滑冰的演員若一腳平伸或縮回可改變角動量，進而改變角速度的大小。答：(A)(B)(D)

※角動量守恆

例30.　一溜冰者若雙手雙腳併攏則轉動慣量 $50\,kg\cdot m^2$，角動量為 $120\,kg\cdot m^2/s$。則 (a)角速度若干？ (b)今若將雙手兩臂平伸轉動慣量變為 $60\,kg\cdot m^2$，則角動量及角速度各若干？答：(a)2.4rad/s；(b)2rad/s

類 1.一學生坐於可繞垂直軸自由轉動的凳上，兩手水平伸直並各持一個 2 公斤的重物，教師使其以 0.50 轉/秒的角速率轉動。設摩擦可忽略不計，且對垂直軸不施力矩。又設該生將手縮回時該生身體之轉動慣量恆保持 2.4 公斤-公尺^2，且轉動慣量的改變僅由於重物的收回。令重物至轉動軸的原距離爲 1 公尺，而其末距離爲 0.20 公尺，求該生的末角速率。答：1.25 轉/秒

類 2.宇宙中有一獨立雙星系統，以 ω 的角速度繞其質心旋轉，若不受外力的情形下，雙星距離變爲原來的 $\frac{1}{3}$，則繞轉的角速度變爲_____。答：9ω

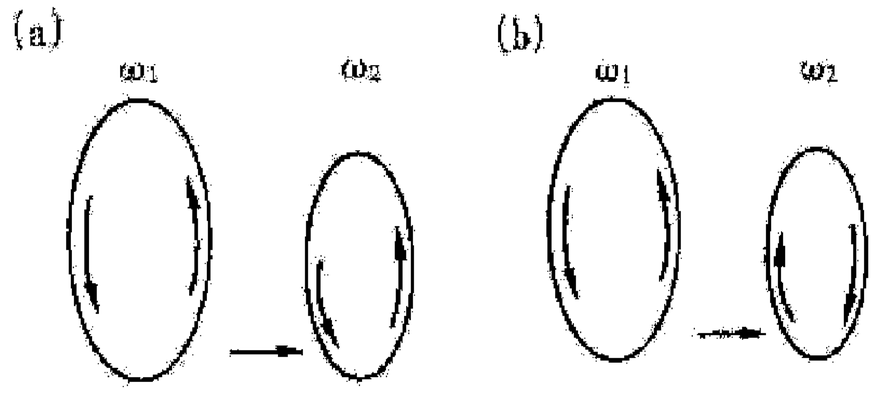
類 3.一質量爲 m 的小星球，在離太陽無窮遠處的速率爲 v，位能爲零。假設小星球不考慮太陽引力之影響，而沿直線運動，則與太陽的質心最近距離爲 b。在太陽的引力作用下，小星球的軌道是一條以太陽爲焦點的雙曲線。設太陽質量爲 M，位置固定；小星球離太陽的質心最短距離爲 d(d 大於太陽之半徑)，重力常數爲 G。則下列有關小星球之敘述，何者爲正確？ (A)對太陽質心的角動量之量值爲 mvb (B)總力學能爲 $\frac{1}{2}mv^2$ (C)在離太陽最近處之加速度量值爲 $\frac{GM}{d^2}$ (D)對太陽的最大速率爲 v (E) $d=\sqrt{(\frac{GM}{v^2})^2+b^2}-\frac{GM}{v^2}$ 【89 日大】答：(A)(B)(C)(E)

類 4.今有一半徑爲 4m 之圓桌，轉動慣量爲 $3200\,kg-m^2$，其中心裝於一鉛直之光滑軸上，一人重 80kg，立於桌之邊緣上，自靜止開始，此人沿桌邊以 2m/s(對地)之速度行走，則：(a)桌面以若干之角速度轉動？(b)經幾秒此人又行至桌面上原處？答：(a)0.2rad/s；(b)9sec

類 5.一質量爲 M，半徑爲 R 之均勻圓盤可繞其中心軸自由旋轉(轉動慣量爲 $\frac{1}{2}MR^2$)。圓盤開始時靜止，今在此圓盤上離軸心 $\frac{R}{2}$ 處，有一質量爲 m 之小蟲沿著半徑爲 $\frac{R}{2}$ 之圓周，在圓盤上以等角速度爬行。設每隔一分鐘小蟲可回到圓盤上的原出發處，則圓盤轉動的角速度爲何？【1997 奧林匹亞初選試題】答：$\frac{\pi}{30}\times\frac{m}{2M+m}$

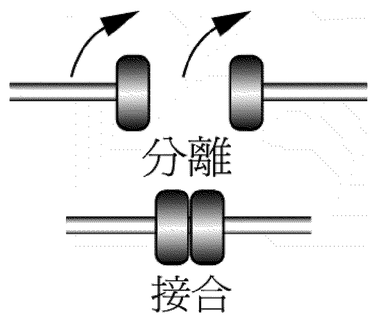
※角動量守恆

例31.　有大小兩圓盤，其轉動慣量分別為 $3.0\,kg-m^2$ 及 $2.0\,kg-m^2$，其角速度分別為 ω_1=20rad/s 及 ω_2=25rad/s，今(a)同轉向結合，(b)反轉向結合，則結合在一起的末角速度各若干？答：(a)22rad/s；(b)2rad/s



類 1.A 和 B 兩飛輪裝在軸上，以有摩擦的離合器 C，把它們接連或分開。A 的轉動慣量是 $8\,kg\cdot m^2$。離合器鬆開時，A 被轉動到角速度為 600rpm。B 最初是靜止的。把離合器接上後，B 加速，而 A 減速，直到二者之角速度相同，末角速度為 400rpm，求 B 之轉動慣量？答：$4\,kg\cdot m^2$

類 2.汽車之離合器是以引擎側的圓盤與變速箱側的圓盤或接合，或分離，來控制動力的傳輸。今有一汽車在離合器分離時，引擎側圓盤的轉動慣量為 10kg．m^2，初角速度 120rad/s；而變速箱側的圓盤轉動慣量為 2 kg．m^2，初角速度 300rad/s。則當兩輪接合在一起時之角速度大小為：(A)50 (B)100 (C)150 (D)200 (E)250(rad/s)。答：(C)

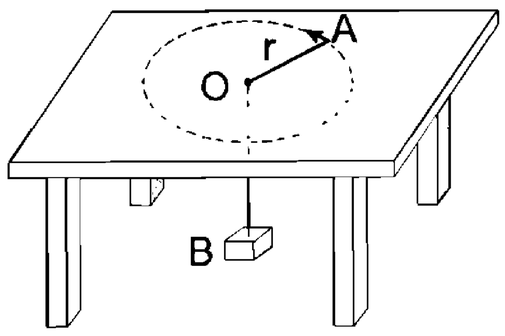


類 3.有一架飛機，上面的乘客除了一個小學生之外，其餘的都是一些重要的政府官員
在飛機起飛不久後飛機就出事了，再過不久可能會墜機
飛機上的人必須要用降落傘逃生
可是發現飛機上的降落傘剛好不夠一個
於是那些大官們不管三七二十一就搶著降落傘紛紛逃生
最後飛機上只剩下駕駛員和那個小學生
於是駕駛員就對小學生說：“剩下一個降落傘就給你用好了，我與飛機共存亡...”
小學生說：“不用啊，降落傘還有兩個，剛剛有一個伯伯背著我的書包跳下去了
“.....　?0?}?

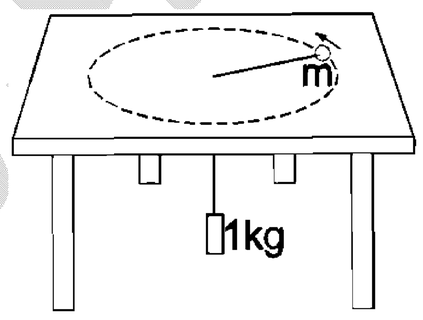
吳錫玠物理

※角動量守恆

例32.　如圖，光滑桌面中心穿有一孔，用繩繫 5kg 的物體 A，通過此孔繞中心做等速圓周運動，半徑 2m，速率 10m/s；問
(1)繩的另一端需吊物 B 之質量應為若干才能維持平衡？答:25kg
(2)桌下繩的一端改用手握住緩慢向下拉 1m，最後須施力若干？共作功多少焦耳？($g=10m/s^2$)答：2000nt；750J

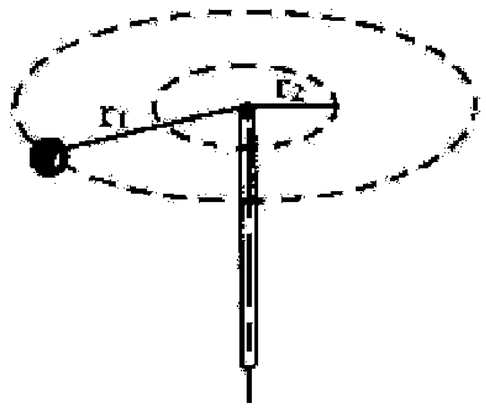


類 1.在光滑桌面上鑽一小洞，以細繩穿過。桌面上的繩端繫住一質量 m 的物體，另一繩端懸掛 1kg 的砝碼。使 m 以 v 的速率作半徑 r 的等速率圓周運動，此時懸掛著的砝碼也恰能維持靜止。不考慮摩擦力，若緩緩施力將砝碼拉下一小段距離並保持砝碼不動，則下列何者正確？(以小洞爲參考點) (A)物體的繞轉週期將變小 (B)物體的加速度將變大 (C)物體的角動量將不變 (D)物體的(線)動量將不變 (E)物體的動能將變大。答：(A)(B)(C)(E)



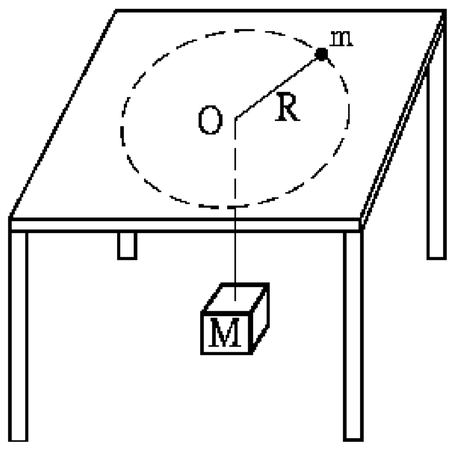
類 2.如圖所示，一質量 m 的小物體由一輕繩連接，穿過一中空管；此管由一手握著而轉動，另一端則由另一手拉著。當以半徑 r_1 旋轉時速率爲 v_1，繩被拉下使轉動半徑變爲 r_2 時，試求 (1)新轉動的切線速率 v_2 及新角速度 ω_2；(2)拉力作功 W 若干？

答：(1) $v_2=\dfrac{v_1r_1}{r_2}$；$\omega_2=\dfrac{r_1v_1}{r_2^2}$；(2) $\dfrac{mv_1^2(r_1^2-r_2^2)}{2r_2^2}$



類 3.在光滑的水平桌面上，細線的一端繫住一質點，而在細線的另一端施以水平拉力，使質點在桌面上作速率爲 v 的等速圓周運動，不考慮細線的重量，今增加拉力，使質點作圓周運動的半徑改變，而其運動的週期減爲原來的一半，則該質點的速率變爲：(A) $2\sqrt{2}$ v (B)2v (C) $\sqrt{2}$ v (D)v (E) $\frac{1}{2}$ v 。答：(C)

類 4.如圖，光滑桌面上有一小孔，一輕繩穿過此孔，一端繫質量 m 的小球，在桌面上作半徑 R，速率 v 的圓周運動，繩的另一端懸一質量 M 的物體恰可平衡，下列敘述何者正確？ (A)M 增大，則 m 對圓心 O 的角動量亦增大 (B)若 m 的半徑變爲 $\frac{1}{3}$R，則速率變爲 3v (C)承(B)，欲平衡，則 M 的質量變爲 27 倍 (D)承(B)，角速度變爲 3 倍 (E)承(B)，角加速度變爲 3 倍。答：(B)(C)



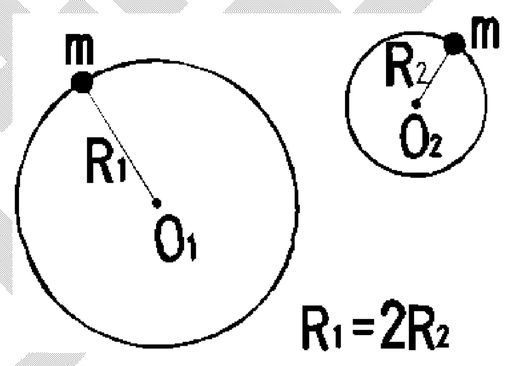
9-5 轉動動能

※轉動動能 $E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$

證明：$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(r\omega)^2=\frac{1}{2}(mr^2)\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$

	質量/轉動慣量	速度/角速度	動能
移動	m	v	$E_k=\frac{1}{2}mv^2$
轉動	I(I=mr²)	ω	$E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$

例33.　兩條長度分別為 R_1 及 R_2 的細繩，各有一端固定在一光滑水平面上的 O_1 及 O_2 點，細繩之另一端則分別繫有質量同為 m 的小物體，並使小物體在水平面上作等速圓周運動，如圖所示。已知 $R_1=2R_2$，下列有關兩細繩的張力 F_1 及 F_2 之比值的敘述，何者為正確？ (A)如兩物體之角速度比為 $\frac{\omega_1}{\omega_2}=2$，則 $\frac{F_1}{F_2}=8$ (B)如兩物體之速率比為 $\frac{v_1}{v_2}=2$，則 $\frac{F_1}{F_2}=4$ (C)如兩物體之圓周運動週期比為 $\frac{T_1}{T_2}=2$，則 $\frac{F_1}{F_2}=2$ (D)如兩物體之動能比為 $\frac{E_{k1}}{E_{k2}}=2$，則 $\frac{F_1}{F_2}=1$ (E)如兩物體之角動量比為 $\frac{L_1}{L_2}=2$，則 $\frac{F_1}{F_2}=\frac{1}{2}$。【88.日大】答：(A)(D)(E)



類 1.質量為 0.2kg 的質點作半徑為 3m 的等速圓周運動，其角速度為 2 弧度/秒，今沿切線方向對質點施以 0.6nt 的力，而質點作圓周運動的半徑仍不變，求開始施力後 2 秒末 (1)質點的角速度大小為若干？(2)質點的動能為若干？答：(1)4rad/s；(2)14.4J

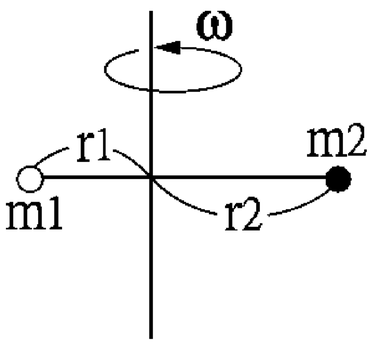
類 2.質量 m 的質點作半徑 r 的等速率圓周運動，對圓心而言其角動量為 L，轉動慣量為 I，則 m 的動能為 (A)$\frac{L^2}{2I}$ (B)$2IL^2$ (C)$\frac{I^2}{2L}$ (D)$\frac{2I}{L^2}$ (E)以上皆非。【單選】答：(A)

類 3.質量 1kg 之質點在半徑 3 米之圓周上作圓周運動，某瞬間之角速度為 $2rad/s$，其角加速度為 $5rad/s^2$，則此質點加速度大小為_____m/s²；轉動動能為_____J。答：$3\sqrt{41}$，18

一質點繞定軸轉動時，其轉動慣量為 I，角動量大小為 L，則此質點的轉動動能為_____。答：$\frac{L^2}{2I}$

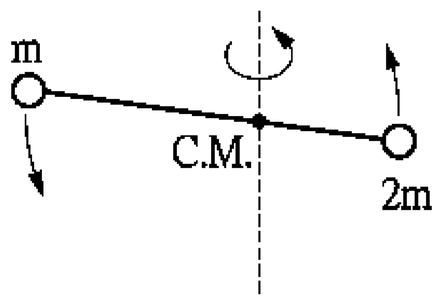
※轉動動能 $E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$

例34.　兩小球質量分別為 m_1 與 m_2，由一長為 L 的細桿相連（質量不計），以通過兩球質量中心，且垂直於細桿的軸作等角速度 ω 轉動，則兩球的轉動動能總和為_____。答：$\frac{1}{2}L^2\omega^2\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$



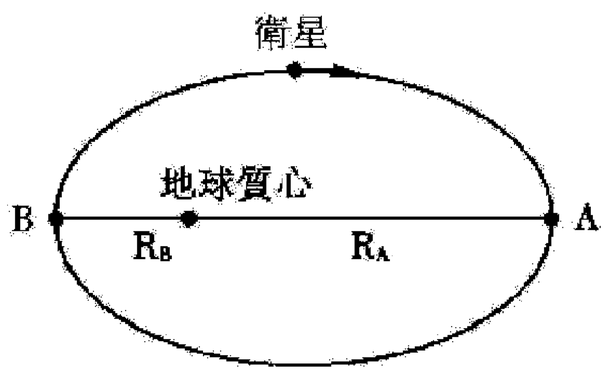
類 1.兩小球質量分別爲 m_1 及 m_2，由一長度爲 l 之細桿(質量可忽略)相連，並以通過兩球質量中心且垂直於細桿的軸，做等角速度 ω 的轉動，則下列敘述何者正確？ (A)旋轉軸與 m_1 的距離爲 $\frac{m_2l}{m_1+m_2}$ (B)兩球均作速率爲 $l\omega$ 的等速圓周運動 (C)兩球的動量量值相等 (D)兩球的角動量量值相等 (E)兩球的動能和爲 $\frac{(m_1+m_2)l^2\omega^2}{2}$【80 年大學】【複選】答：(A)(C)

類 2.兩小球質量爲 m 及 2m，由一長爲 L 的細桿相連(質量不計)，以通過兩球質心且垂直於細桿的軸作等角速度 ω 轉動，則兩球的轉動動能總和爲若干？ (A) $\frac{1}{3}mL^2\omega^2$ (B) $\frac{1}{2}mL^2\omega^2$ (C) $2mL^2\omega^2$ (D) $\frac{1}{4}mL^2\omega^2$。答：(A)



類 3..質量 m 的人造衛星，正以角動量 L 在赤道上繞地軸作半徑 r 的等速率圓周運動，求人造衛星的：(1)動能 E_k；(2)重力位能 U；(3)力學能 E。答：(1) $\frac{L^2}{2mr^2}$；(2) $-\frac{L^2}{mr^2}$；(3) $-\frac{L^2}{2mr^2}$

類 4.一人造衛星以橢圓軌道繞地球運行。設 A、B 分別爲衛星距地球最遠及最近的位置(如圖)。若忽略其他星體的影響，則下列敘述何者正確？ (A)衛星在 A 處的動能最小，在 B 處的動能最大 (B)若 K_A、K_B 各表衛星在 A、B 處的動能，R_A、R_B 各表地球質心到 A、B 處的距離，則 $\frac{K_A}{K_B}=\frac{R_B}{R_A}$ (C)若衛星在 A、B 處的角動量之量值各爲 L_A、L_B，則 $L_A=L_B$ (D)衛星在軌道上任何位置的動量之量值均相等 (E)在同一軌道上衛星繞地球的週期隨衛星的質量增加而增長。【79 日大】答：(A)(C)



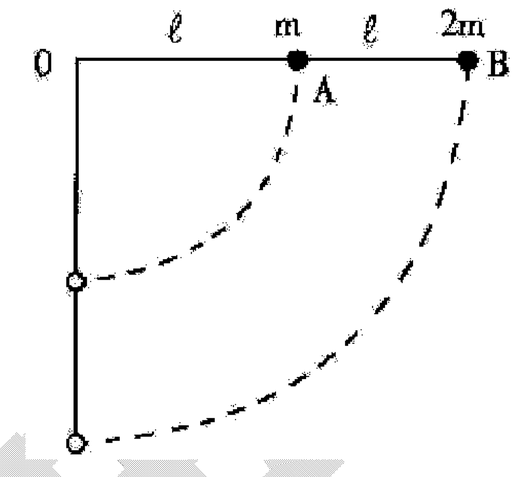
※力學能守恆

例35.　如圖右，質量各為 m 和 2m 的 A、B 兩質點，以輕棒連接，$\overline{OA}=\overline{AB}=l$，輕棒由水平位置靜止釋放，繞 O 點自由旋轉到鉛直位置瞬間，試求：

(1)質點 A 的速率若干？

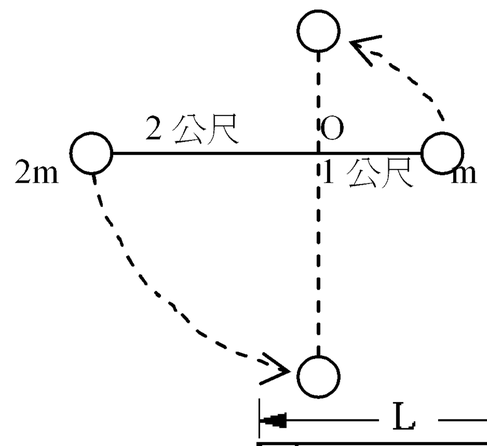
(2)質點 B 的角動量大小若干？

(3)AB 段輕棒張力？答：$\frac{1}{3}\sqrt{10gl}$；$\frac{8}{3}ml\sqrt{10gl}$；$\frac{58}{9}mg$



例36.　一質量為 m，半徑為 R 之實心小鋼球，從高 H 的斜板頂端，由靜止開始向下運動。如果斜板粗糙，鋼球是以純滾動的方式滾到底端，則其到達底端之速度為何？(已知鋼球對其質心的轉動慣量為 $\frac{2}{5}mR^2$)【1997 奧林匹亞初選試題】答：$\sqrt{\frac{10gH}{7}}$

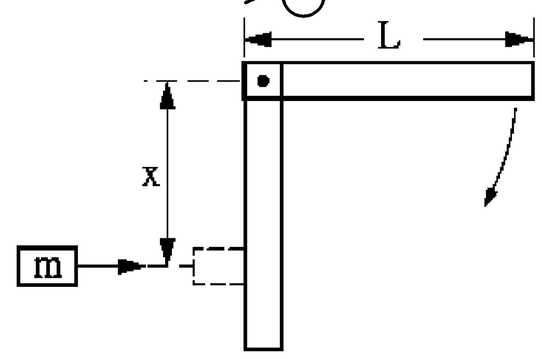
類 1.M_1、M_2 兩小球以無質量之輕棍連起如圖，可繞 O 自由旋轉，從水平位置釋放，求 M_1 之最大速度。(設 M_1=4kg，M_2=2kg，g=10m/s^2)。答：$\sqrt{\frac{80}{3}}$ m/s



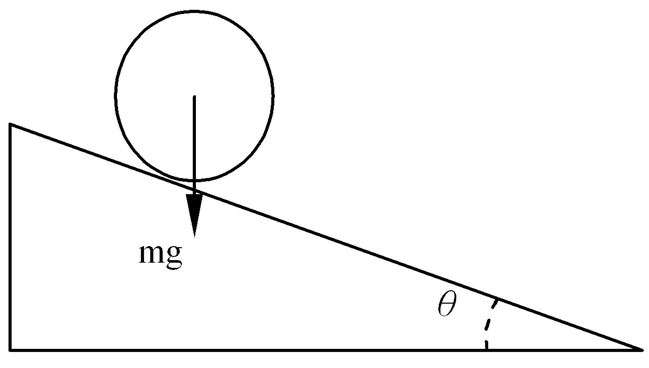
類 2.一根長 L，質量 M 的均質棒，可繞通過其一端的水平光滑軸自由轉動，令棒由水平位置自由落下，當它轉到豎直位置時，正好與由另一邊水平飛來質量爲 m 的小物體相碰，碰撞後兩者均停下來，若軸不受側向力的作用，棒的轉動慣量爲 $\frac{1}{3}ML^2$，則:

(1)均質棒轉至鉛直瞬間，其角速度爲若干？

(2)小物體的入射速度爲若干？答：(1)W＝$\sqrt{\frac{3g}{L}}$；(2)v＝$\frac{ML}{mx}\sqrt{\frac{gL}{3}}$



類 3.一個半徑爲 r，質量爲 m 的圓鐵圈沿著傾斜角爲 θ 的斜面由靜止往下作純滾動。求鐵圈質心的加速度。答：$\frac{g\sin\theta}{2}$



吳錫玠物理